

Outils : Magnétostatique. Équations de Maxwell. Bilans d'énergie électromagnétique.

Une antenne électrique peut être considérée comme un conducteur ohmique en première approximation, dans lequel circule un courant électrique alternatif. On utilise une base cylindrique où $\vec{e}_z$ dirige l'axe de révolution du cylindre.

On pose ici $\vec{j} = j_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ le vecteur densité de courant électrique dans l'antenne, assimilée à un cylindre de hauteur $H = 2$ m et de rayon $R = 1$ cm. Cette densité de courant électrique est supposée uniforme. La conductivité de l'antenne est notée γ .

On suppose que l'antenne est faite de cuivre (conductivité $\gamma = 59 \cdot 10^6$ S.I.), et on note $f = 2,0$ kHz la fréquence du courant électrique.

On rappelle la perméabilité du vide $\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹ et la permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F.m⁻¹.

- (1) Écrire, dans le cas général, les quatre équations de Maxwell.
- (2) Rappeler la loi d'ohm locale pour un conducteur ohmique, et donner l'unité dans le système international de la conductivité γ .
- (3) Exprimer le champ électrique à l'intérieur du matériau, puis exprimer le courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans le matériau.
- (4) Justifier que l'amplitude du courant de déplacement est négligeable devant j_0 . Que peut-on en conclure ?
- (5) Montrer, en utilisant les données de fin d'énoncé, alors que le théorème d'Ampère de la magnétostatique est valable et le démontrer à partir de l'équation de Maxwell-Ampère.
- (6) Faire un schéma du problème et poser en un point M quelconque de l'espace la base cylindrique associée.
- (7) Après avoir justifié pourquoi on peut, tant que l'on reste proche du cylindre, supposer ce dernier comme infini, justifier soigneusement que le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B}(r, t) = \begin{cases} \frac{\mu_0 j_0 r}{2} \cos(\omega t) \vec{e}_\theta & \text{si } r < R \\ \frac{\mu_0 j_0 R^2}{2r} \cos(\omega t) \vec{e}_\theta & \text{si } r > R \end{cases}$$

- (8) En utilisant la loi de Maxwell-Faraday, montrer que la loi d'Ohm dans le matériau ne peut finalement pas être validée.

Pour assurer la viabilité des équations, on raffine le modèle du champ électrique dans le matériau en écrivant :

$$\vec{E} = \frac{j_0}{\gamma} \cos(\omega t) \vec{e}_z + E_1(r, t) \vec{e}_z$$

- (9) Déterminer l'expression de $E_1(r, t)$ en prenant $E_1(r = 0) = 0$ pour tout t . Vérifier que, pour $r = R$, l'amplitude de $E_1(r, t)$ est un ordre de grandeur au dessus de $\frac{j_0}{\gamma}$. Cela revient à dire que l'on ne peut pas négliger les forces électromotrices induites devant la chute de potentiel liée à la résistivité du fil.
- (10) Rappeler l'expression du vecteur de Poynting en fonction des champs électrique et magnétique.
- (11) Exprimer littéralement le vecteur de Poynting sur la surface de l'antenne, puis exprimer la puissance rayonnée $\mathcal{P}_{\text{ray}}(t)$ par l'antenne.
- (12) Vérifier que la puissance moyenne rayonnée sur une période s'écrit :

$$\langle \mathcal{P}_{\text{ray}} \rangle = -\frac{\pi R^2 H j_0^2}{2\gamma}$$

- (13) Exprimer la puissance volumique $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}$ fournie aux charges à une distance r de l'axe, puis exprimer la valeur moyenne $\langle \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} \rangle$ de cette puissance volumique.
- (14) En déduire la puissance moyenne donnée aux charges dans toute l'antenne. Commenter le résultat obtenu.
- (15) Que dire de la valeur moyenne de $\frac{dE_{\text{em}}}{dt}$ où E_{em} représente l'énergie électromagnétique dans l'antenne ? Commenter la signification de ce résultat : l'antenne stocke-t-elle de l'énergie ?

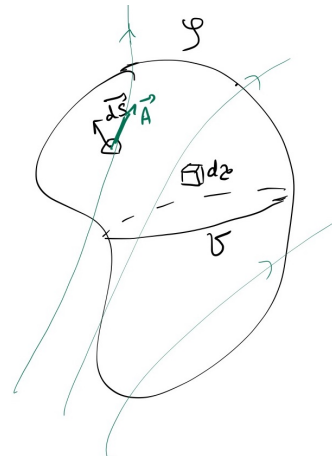
Formulaire :

- **Théorème de Green-Ostrogradski :**

Soit un champ vectoriel $M \mapsto \vec{A}(M)$ et un volume quelconque $\mathcal{V}$ de l'espace délimité par une surface fermée $\mathcal{S}$

Alors :

$$\oiint_{P \in \mathcal{S}} \vec{A}(P) \cdot d\vec{S} = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{A}(M) d\tau$$

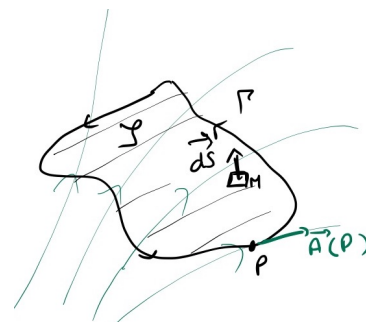


- **Théorème de Stokes:**

Soit un champ vectoriel $M \mapsto \vec{A}(M)$ et une surface quelconque $\mathcal{S}$ orientée s'appuyant sur un contour Γ orienté conformément à l'orientation de $\mathcal{S}$.

Alors :

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{A}(P) \cdot d\vec{\ell} = \iint_{M \in \mathcal{S}} \operatorname{rot} \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}$$



- **Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques :**

Gradient de f

$$\vec{\operatorname{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Divergence de $\vec{A}$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel de $\vec{A}$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_z$$