Chute d'un toboggan

Sujet 2 – Bilan

Outils : Coordonnées cylindriques. Moment de force, moment cinétique, couple. Énergie cinétique de rotation. Travail. Portrait de phase.

Indications et erreurs fréquentes

(1) ♦◊◊ Erreur(s) fréquente(s) : Il faut penser à représenter le punching-ball lorsqu'il n'est pas à la verticale, pour faire apparaître l'angle θ depuis la verticale vers l'axe du punching-ball.
Erreur(s) fréquente(s) : Attention, ici $\overrightarrow{e_z}$ est un vecteur orthogonal au plan dans lequel a lieu le mouvement du punching-ball. $\overrightarrow{e_r}$ doit être radial, donc selon l'axe du punching-ball (de O vers G).
Point de rédaction : Préférer choisir un dessin avec $0 < \theta < \pi/2$ pris positif dans le sens trigonométrique, comme cela $\overrightarrow{e_z}$ vient vers vous, et c'est plus facile de ne pas se tromper (sur le schéma, $\sin\theta$ et $\cos\theta$ seront positifs).

(2) ♦◊◊ Avec les conventions précédentes, utiliser la définition du moment cinétique σ d'un solide en rotation.

(3) ♦◊◊ $\overrightarrow{\Gamma}$ est un couple, donc un moment de force.

(4) ♦◊◊ Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{e_z})$:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sum \mathcal{M}$$

avec $\mathcal{M}$ moment de force par rapport à l'axe de rotation $(O,\overrightarrow{e_z})$.

Il faut donc lister les actions mécaniques qui s'exercent :

- Pas de frottements solides ou visqueux
- Le poids exerce une action, et un moment par rapport à l'axe (il s'applique en G)
- Le couple de rappel $\Gamma = -C\theta\overrightarrow{e_z}$ qui est un moment de force par rapport à O. Il faut le projeter pour avoir le moment par rapport à l'axe.

Erreur(s) fréquente(s) : Attention, le système est bien : tige + sac, de masse totale $M + m$.

Point de rédaction : Préciser le système et le référentiel choisi pour l'étude, dire que ce dernier est galiléen et que l'axe de rotation est fixe, conditions d'applications du T.M.C. La première fois, écrivez en toutes lettres Théorème du Moment Cinétique.

(5) ♦♦◊ Utiliser $\sin\theta \sim \theta$. Plusieurs façons de le rédiger : il faut que le système soit stable, donc les coefficients doivent être de même signe dans l'équation différentielle, ou dire que l'on veut un oscillateur harmonique.

(6) ♦♦◊ Une fois l'oscillateur harmonique posé, identifier la pulsation propre et conclure. Erreur(s) fréquente(s) : Attention à ne pas se laisser berner par les notations, ici ω_0 n'est pas la pulsation propre.

(7) ♦♦◊ La phrase-clef est "Un boxeur frappe le punching-ball, initialement à la verticale, à l'instant $t = 0$, lui communiquant une énergie cinétique E_0."

Erreur(s) fréquente(s) : L'énergie cinétique d'un système en rotation est $E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$ avec ω la vitesse angulaire de rotation. Si le système est en translation, c'est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ avec v la vitesse de chacun de ses points.

(8) ♦♦♦ Question "ouverte", donc faisant appel à de l'initiative et à une rédaction à construire. Question valorisée.

Piste de réflexion : prendre comme système le bras d'un boxeur, et quantifier l'énergie cinétique qu'atteint le bras juste avant de toucher le sac. On peut faire une hypothèse que la quasi-intégralité de cette énergie est transmise au sac.

Utiliser la question précédente pour conclure une fois l'énergie cinétique trouvée.

(9) ♦♦♦ Le régime est pseudo-périodique : que serait le portrait de phase si on avait un oscillateur harmonique ?

Pour quantifier λ, réécrire le TMC avec ce nouveau couple, et identifier le facteur de qualité des oscillations.

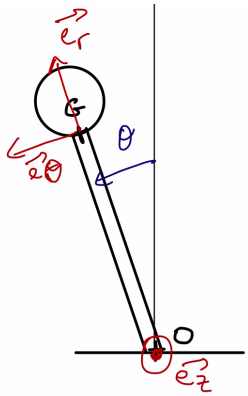
On peut alors estimer le nombre d'oscillations d'amplitude "suffisante" effectuées par le punching-ball, ce qui donne accès en ordre de grandeur à la valeur de Q, et permet de remonter à λ. La pulsation propre est connue depuis la question 6.

Une autre méthode, plus fastidieuse est de dire qu'au bout d'une pseudo-période T, l'amplitude des oscillations est multipliée par $e^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}$ vu la forme des solutions de l'équation différentielle. Une lecture graphique permet de retrouver l'évolution en une période de l'amplitude et de conclure.

(10) ♦♦♦ Il faut d'abord analyser et décrire les observations : quand θ atteint un nombre qui semble être $\frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}$ est transformé en son opposé. Est-ce logique ? Que cela représente-t-il ?

Réponses (sans rédaction et sans justification)

(1) Exemple de schéma :



(2) $\sigma = J\dot{\theta}$

(3) C en N.m ou en N.m.rad^{-1}.

(4) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{C}{J}}$ et $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{(M+m)Lg}{J}}$

(5) $C_{\min} = (M+m)Lg \approx 1{,}4 \cdot 10^2$ N.m.

(6) $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C-C_{\min}}} = 0{,}83$ s

(7) $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = \sqrt{\dfrac{2E_0}{J}}$

(8) En estimant à 10 kg la masse du bras d'un boxeur, en estimant à 1m parcouru en 0,1 s le mouvement, soit 10 m/s, on a une énergie communiquée d'environ 50 J, soit $\dot{\theta} \approx 2$ rad.s^{-1}. [la valeur numérique compte peu, la démarche compte beaucoup !]

(9) J'estime Q à environ 10-11 oscillations. On trouve une expression $\lambda = J\dfrac{\omega_0}{Q}$ par identification. $\lambda = 1 \cdot 10^1$ N.m.s

(10) Quand θ atteint un nombre qui semble être $\frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}$ est transformé en son opposé : on modélise le rebond du punching-ball, par un choc élastique (toute l'énergie cinétique est conservée lors du choc, il change juste de sens).