Étude d'une antenne.

Sujet 2 – Bilan

Outils : Magnétostatique. Équations de Maxwell. Bilans d'énergie électromagnétique.

(1) ♦◊◊ Question de cours. Point de rédaction : Donner le nom de chaque équation de Maxwell en toutes lettres.

(2) ♦◊◊ En rappelant la loi d'Ohm, il faut définir vos notations (champ électrique, vecteur densité de courant électrique, conductivité électrique.) Point de rédaction : Éviter de laisser des $A.V^{-1}$ dans l'unité de γ.

(3) ♦◊◊ Utiliser la loi d'Ohm. Erreur(s) fréquente(s) : Vérifier l'homogénéité vecteur/scalaire. Il faut bien que vos expressions soient cohérentes : vecteur = vecteur

(4) ♦◊◊ Évaluer numériquement le rapport $\frac{\text{amplitude de } j_D}{j_0}$ pour conclure. Une équation de Maxwell se simplifie alors : on parle d'ARQS magnétique.

(5) ♦♦◊ Il faut utiliser l'équation de Maxwell-Ampère dans l'ARQS et le théorème de Stokes. Point de rédaction : La démonstration doit s'appuyer sur un contour ("soit un contour ....")

(6) ♦◊◊ Il s'agit de poser les notations géométriques, de dessiner le cylindre (soit en 3D, soit en deux coupes, une transverse, et une vue du dessus). Point de rédaction : Soignez la clarté du schéma car la question suivant va s'appuyer dessus. Votre point M ne doit pas être sur l'axe, car il faut définir proprement les vecteurs de la base et les coordonnées (comment définir θ quand M est sur l'axe ?).

(7) ♦♦◊ C'est l'application du théorème d'Ampère. Décrire les symétries, les invariances de la distribution de courant, et conclure sur la direction et les dépendances de $\overrightarrow{B}$. Choisir comme contour d'Ampère un cercle de rayon r, et pour calculer le courant enlacé, il faut déterminer le flux du vecteur densité de courant dans la partie du matériau enlacée par le contour. Ce n'est pas le même calcul selon si $r < R$ (le flux est limité à la surface délimitée par le contour) ou $r > R$ (le flux n'est à prendre en compte que dans l'antenne car il n'y a pas de courant entre R et r).

(8) ♦♦◊ Au vu de l'expression de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$, que vaut $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}$? que vaut $\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$? Est-ce cohérent ?

(9) ♦♦♦ Utiliser le formulaire pour $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}$, et en déduire que $\dfrac{\partial E_1}{\partial r} = \dfrac{2\pi f \mu_0 j_0 r}{2}\sin(\omega t)$ dans le matériau (donc pour $r < R$). Conclure en utilisant le fait que $\forall t, E_1(0,t) = 0$: en effet, quand on cherche une primitive de l'équation précédente, une constante d'intégration (constante par rapport à r, donc pouvant dépendre du temps) apparaît. Évaluer numériquement le rapport $\frac{\text{amplitude de } E_1(r=R)}{j_0/\gamma}$ pour conclure.

(10) ♦◊◊ Question de cours.

(11) ♦♦♦ Utiliser l'expression de $\overrightarrow{E}$ en $r = R$ et de $\overrightarrow{B}$ en $r = R$ (la norme de $\overrightarrow{B}$ est continue ici, donc on utilise l'expression que l'on veut de $\overrightarrow{B}$.) La puissance rayonnée est le flux du vecteur de Poynting sortant de l'antenne (seulement sur la face latérale ici, car le vecteur de Poynting est radial).

(12) ♦♦♦ Utiliser que la valeur moyenne temporelle sur une période de $\cos^2(\omega t)$ fait $1/2$, alors que la valeur moyenne de $\cos(\omega t)\sin(\omega t)$ fait 0 [Cela se redémontre en calculant cette valeur moyenne].

(13) ♦♦♦ La puissance volumique cédée aux charges est $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}$. Utiliser les propriétés des valeurs moyennes précédentes pour conclure

(14) ♦♦♦ Intégrer la puissance reçue dans chaque petit bout d'antenne. Comme la puissance volumique moyenne précédente ne dépendait pas de r, elle est uniforme. On peut donc sortir la puissance volumique moyenne de l'intégrale : il ne reste qu'à connaître le volume du cylindre.

(15) ♦♦♦ Faire un bilan d'énergie électromagnétique sur le cylindre : $\dfrac{dE_{em}}{dt}$ est égal à la somme des puissances électromagnétiques reçues (soit l'opposé de celles perdues par rayonnement et données aux charges).

Réponses (sans rédaction et sans justification)

(3) $\overrightarrow{j}_{\mathrm{D}} = -\dfrac{2\pi f \varepsilon_0 j_0}{\gamma} \sin(2\pi f t)\overrightarrow{e_z}$

(4) Rapport des amplitudes de l'ordre de 10^{-15}. L'ARQS magnétique est valable.

On peut simplifie rl'équation de Maxwell-Ampère en $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{B} = \mu_0 \overrightarrow{j} + \cancel{\mu_0 \overrightarrow{j_{\mathrm{D}}}}$

(7) Analyser les symétries et invariances, puis choisir un cercle de rayon r d'axe $\overrightarrow{e_z}$ comme contour d'Ampère.
Le courant enlacé pour $r < R$ est $\pi r^2 j_0 \cos(2\pi f t)$. Pour $r > R$ c'est $\pi R^2 j_0 \cos(\omega t)$.

(9) $E_1(r,t) = \dfrac{\pi f \mu_0 j_0 r^2}{2} \sin(2\pi f t) + g(t)$ mais $\forall t E_1(0,t) = g(t) = 0$, donc g est une fonction nulle.
Le rapport amplitude de E_1 sur j_0/γ vaut environ 23.

(11) $\overrightarrow{\Pi}(r = R, t) = -\dfrac{j_0^2 R}{2}\left[\dfrac{\cos^2(2\pi f t)}{\gamma} + \mu_0 R\pi f \sin(2\pi f t)\cos(2\pi f t)\right]\overrightarrow{e_r}$.

$\mathscr{P}_{\mathrm{ray}} = -\pi R^2 H j_0^2\left[\dfrac{\cos^2(2\pi f t)}{\gamma} + \mu_0 R\pi f \sin(2\pi f t)\cos(2\pi f t)\right]$.

(13) $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{j_0^2}{\gamma}\cos^2(2\pi f t) + \dfrac{\pi f \gamma \mu_0 R^2 j_0}{2}\cos(2\pi f t)\sin(2\pi f t)$. Valeur moyenne : $< \dfrac{\mathrm{d}\mathscr{P}}{\mathrm{d}\tau} >= \dfrac{j_0^2}{2\gamma}$

(14) Écrire le bilan d'énergie électromagnétique puis appliquer la valeur moyenne $< \dfrac{\mathrm{d}E_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} >= - < \mathscr{P}_{\mathrm{ray}} > - < \mathscr{P}_{\mathrm{cha}} >= 0$. L'antenne peut stocker de l'énergie mais elle la restitue d'autant : l'évolution de E_{em} est périodique.