

1 Déterminants	3
1.1 Rappels sur les matrices	4
1.2 Déterminant d'une matrice	5
1.3 Propriétés du déterminant de matrices	5
1.4 Déterminant d'une famille de n vecteurs, d'un endomorphisme	7
1.5 Travaux dirigés	9
2 Compléments d'algèbre linéaire	11
2.1 Applications linéaires	11
2.2 Familles de vecteurs	12
2.3 Sous-espaces vectoriels	13
2.4 Applications linéaires particulières	15
2.5 Sous-espaces stables	15
2.6 Matrices	16
2.7 Travaux dirigés	18
3 Réduction d'endomorphismes	21
3.1 Éléments propres et polynôme caractéristique	21
3.2 Endomorphismes et matrices diagonalisables	23
3.3 Endomorphismes et matrices trigonalisables	24
3.4 Applications de la réduction	25
3.5 Rappels sur les équations différentielles à coefficients constants	26
3.6 Travaux dirigés	27
4 Fonctions vectorielles	29
4.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3	29
4.2 Courbes paramétrées	31
4.2.1 Rappels sur les graphes de fonctions réelles à valeurs réelles.	31
4.2.2 Arcs paramétrés	32
4.2.3 Etude des arcs paramétrés plans.	33
4.3 Travaux dirigés	36
5 Intégration d'une fonction continue	39
5.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	40
5.2 Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque	40
5.3 Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle	42

5.4 Travaux dirigés	44
6 Espaces préhilbertiens réels	47
6.1 Produit scalaire et norme	47
6.2 Orthogonalité	49
6.3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	50
6.4 Travaux dirigés	51
7 Isométries d'un espace euclidien	53
7.1 Isométries vectorielles d'un espace euclidien	53
7.2 Matrices orthogonales	54
7.3 Classification en dimension 2 ou 3	55
7.3.1 Classification des isométries en dimension 2	55
7.3.2 Classification des isométries en dimension 3	56
7.4 Matrices symétriques réelles	56
7.5 Travaux dirigés	57
8 Séries numériques	59
8.1 Généralités	59
8.1.1 Convergence d'une série numérique	59
8.1.2 Calcul de la somme d'une série	60
8.1.3 Linéarité des séries convergentes	61
8.2 Séries à termes positifs	61
8.3 Séries absolument convergentes	62
8.4 Séries alternées	63
8.5 Travaux dirigés	64
9 Séries entières	65
9.1 Convergence d'une série entière	65
9.2 Somme d'une série entière d'une variable réelle.	66
9.3 Fonctions développables en série entière	67
9.4 Exponentielle complexe	69
9.5 Travaux dirigés	70
10 Séries de Fourier	73
10.1 Compléments sur les fonctions définies par morceaux	73
10.2 Coefficients et séries de Fourier	74
10.3 Structure hilbertienne	75
10.4 Théorèmes de convergence	76
10.5 Travaux dirigés	78
11 Equations différentielles	81
11.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1	81
11.1.1 Généralités sur les équations différentielles d'ordre 1	81
11.1.2 Recherche de solution particulière : méthode de variation de la constante	82
11.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2	82
11.3 Méthodes de recherche de solutions particulières	83
11.3.1 Méthode de variation de la constante ou méthode de Lagrange	83
11.3.2 Recherche d'une solution développable en série entière	83
11.4 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants	83
11.5 Equations différentielles d'ordre n à coefficients constants	84
11.6 Travaux dirigés	85

12 Fonctions de plusieurs variables	89
12.1 Topologie de \mathbb{R}^n	89
12.2 Limites et continuité	90
12.3 Dérivées partielles d'ordre 1. Applications de classe \mathcal{C}^1	91
12.4 Extremums locaux d'une fonction de deux variables	92
12.5 Dérivation et composition	93
12.6 Dérivées partielles d'ordre 2. Fonctions de classe \mathcal{C}^2	94
12.7 Equations aux dérivées partielles	94
12.8 Applications géométriques	96
12.9 Travaux dirigés	98
13 Probabilités sur un univers dénombrable	103
13.1 Expériences et événements aléatoires	103
13.2 Événements incompatibles, système complet d'événements	103
13.3 Espace probabilisé dénombrable	104
13.4 Conditionnement	104
13.5 Indépendance en probabilité	105
13.6 Travaux dirigés	107
14 Variables aléatoires réelles	111
14.1 Compléments sur les variables aléatoires réelles finies	111
14.1.1 Variable aléatoire sur un univers fini	111
14.1.2 Lois finies usuelles	112
14.1.3 Couple de variables aléatoires	113
14.2 Variables aléatoires discrètes	115
14.2.1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes	115
14.2.2 Lois discrètes usuelles	117
14.3 Travaux dirigés	119

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; et E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ sur \mathbb{K} . On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

On rappelle qu'une famille (e_1, \dots, e_n) est une base de E si cette famille est **libre** ① et **génératrice** ②, soit

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \quad \text{①}$$

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E \quad \text{②}$$

Soit, pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $u = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.

Le n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ représente les **coordonnées** (ou **composantes**) de u dans \mathcal{B} et on note

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Définition 1.1 Un espace vectoriel est dit **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème et définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :

① E admet une base.

② Toutes les bases de E ont le même cardinal.

Le cardinal d'une base quelconque de E est alors appelée **dimension** de E .

Exemple 1.1 Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Déterminer une base de E , la dimension de E et les coordonnées de $P = X^2 + 2X + 3$ dans cette base.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de dimension n à coefficients dans \mathbb{K} . La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est donnée par les matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, où $E_{i,j}$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le terme situé à la i -ième ligne et à la j -ième colonne qui vaut 1. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est donc un espace vectoriel de dimension n^2 .

1.1 Rappels sur les matrices

Définition 1.2 On appelle matrice à n lignes et p colonnes, à coefficients dans \mathbb{K} , une famille a_{ij} d'éléments de \mathbb{K} indexée par deux indices $i \in \{1, \dots, n\}$ et $j \in \{1, \dots, p\}$. On la représente comme un tableau de nombres. Le coefficient a_{ij} se trouve à la i -ième ligne et à la j -ième colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients dans \mathbb{K} .

Matrices particulières.

- ★ Si $p = 1$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée **matrice colonne**.
- ★ Si $n = 1$, une matrice de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelée **matrice ligne**.
- ★ Si $n = p$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée **matrice carrée**.

- ★ La **matrice identité** d'ordre n est carrée et définie par : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- ★ Matrices **élémentaires** : soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, $\ell \in \{1, \dots, p\}$.
On définit la matrice $E_{k\ell} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par $E_{k\ell} = (a_{ij})$ où $a_{ij} = 1$ si $i = k$ et $j = \ell$, $a_{ij} = 0$ sinon.

Par exemple, dans $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{K})$, $E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition

Soient n et p fixés.

- ① **Addition de deux matrices** : Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$
- ② **Multiplication par un scalaire** : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Remarque. On ne peut additionner que des matrices de même taille.

Produit matriciel.

Définition 1.3 Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $X = (x_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $AX = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec :

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

Exemple 1.2 Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$; en considérant la matrice B comme la matrice obtenue en accolant q matrices colonnes, on peut définir le produit $A \times B = AB$, où la j -ième colonne de AB est le produit de A par la j -ième colonne de B . Ainsi :

Définition 1.4 Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq k \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

On définit le produit $A \times B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ de la manière suivante : $A \times B = (c_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq q}}$ avec :

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{ip}b_{pk} = \sum_{j=1}^p a_{ij}b_{jk}$$

Exemple 1.3 Calculer $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Remarques.

① Le produit matriciel $A \times B$ n'est défini que si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B . La matrices $A \times B$ a alors autant de lignes que A et autant de colonnes de B .

②  Le produit matriciel n'est pas commutatif en général. Il se peut même que $B \times A$ ne soit pas défini alors que $A \times B$ l'est.

Exemple 1.4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \end{pmatrix}$; mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'existe pas!

1.2 Déterminant d'une matrice

Théorème et définition

Il existe une unique application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} , appelée **déterminant**, notée \det telle que :

- ① le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes, on dit qu'il est **n -linéaire**;
- ② l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 , on dit qu'il est une **forme alternée**;
- ③ le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

Exemple 1.5 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

1.3 Propriétés du déterminant de matrices

Théorème. Règles de calculs du déterminant

- ① Echanger deux colonnes multiplie le déterminant par -1 .
- ② Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.
- ③ Si une colonne de la matrice est combinaison linéaire des autres, alors le déterminant est nul.
- ④ Ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.

Preuve 1.1

Exemple 1.6 Calculer les déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix}$

Théorème. Conséquence de la multilinéarité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$;

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Exemple 1.7 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -16; \text{ ou encore : } \begin{vmatrix} x & 1 \\ x & 2 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = x$

Remarque.  Le déterminant est une forme n -linéaire, mais n'est pas une application linéaire. Autrement dit, en général pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Théorème. Déterminant de matrices diagonales ou triangulaires

Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Exemple 1.8 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$

Théorème. Déterminant d'un produit de matrices

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

Corollaire. Caractérisation des matrices inversibles

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

Preuve 1.2

Corollaire. Déterminant d'une matrice inversible

Soient A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$

Théorème. Déterminant de la transposée d'une matrice

Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Remarques.

On rappelle que si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ alors $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Ce théorème a pour conséquence que, pour le calcul du déterminant, les propriétés valables sur les colonnes, sont aussi valables sur les lignes.

Théorème. Développement suivant une ligne ou une colonne

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons Δ_{ij} le déterminant de la matrice de dimension $n - 1$ obtenue à partir de A dans laquelle on a retiré la i -ième ligne et la j -ième colonne. Soit $1 \leq k \leq n$.

On peut développer $\det(A)$ suivant la k -ième ligne :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \Delta_{kj}$$

On peut développer $\det(A)$ suivant la k -ième colonne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{ik}$$

Exemple 1.9 Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1.4 Déterminant d'une famille de n vecteurs, d'un endomorphisme**Théorème et définition**

Il existe une unique application de E dans \mathbb{K} , appelée **déterminant dans la base \mathcal{B}** , telle que :

- ① le déterminant est linéaire par rapport à chacun des vecteurs, on dit qu'il est **n -linéaire**;
- ② l'échange de deux vecteurs a pour effet de multiplier le déterminant par -1 , on dit qu'il est une **forme alternée**;
- ③ le déterminant de $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ vaut 1.

Propriétés.

- ① Echanger deux vecteurs multiplie le déterminant par -1 .
- ② Le déterminant d'une famille de vecteurs ayant deux vecteurs égaux est nul.
- ③ Si un vecteur de la famille est combinaison linéaire des autres, alors le déterminant est nul.
- ④ Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres ne change pas le déterminant.

Théorème. Caractérisation des bases

Soit (u_1, u_2, \dots, u_n) une famille de n vecteurs de E . Alors (u_1, u_2, \dots, u_n) est une base de E si, et seulement si son déterminant dans la base \mathcal{B} est non nul.

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \text{ base de } E \iff \det(u_1, u_2, \dots, u_n) \neq 0$$

Preuve 1.3

Exemple 1.10 Soient $P_1 = X^2 + X + 1$, $P_2 = X^2 - X + 1$ et $P_3 = X^2 + X - 1$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Propriétés. Interprétation géométrique

- ① Le déterminant de deux vecteurs de \mathbb{R}^2 s'interprète comme l'aire algébrique du parallélogramme construit sur ces vecteurs.
- ② Le déterminant de trois vecteurs de \mathbb{R}^3 s'interprète comme le volume algébrique du parallélépipède construit sur ces vecteurs.

Théorème et définition

Soit $\varphi : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E . On appelle **déterminant de φ** le déterminant d'une matrice de φ dans une base de E .

Preuve 1.4**Théorème. Caractérisation des automorphismes**

Soit φ un endomorphisme de E ; alors :

$$\varphi \text{ est un automorphisme de } E \iff \det(\varphi) \neq 0$$

Théorème. Déterminant d'une composée

Soit φ et ψ deux endomorphismes de E ; alors :

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$$

1.5 Travaux dirigés

Exercice 1.1

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de A . En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
2. Variante.
 - (a) Calculer les matrices A^2 et A^3 . Quelle est la matrice $A^3 - 6A^2 + 11A - 6I_3$?
 - (b) En déduire l'écriture de A^{-1} en fonction de I_3 , A et A^2 .
 - (c) On note $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$. On dit que P est un polynôme annulateur de A . Factoriser $P(X)$; puis donner le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$. Déterminer alors A^n , $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.2

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de \mathbb{R}^3 ?

Exercice 1.3

Soient a et b des réels. Calculer le déterminant de la matrice suivant : $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

A quelle(s) condition(s) sur a et b ce déterminant est-il nul?

Exercice 1.4 (D'après Centrale-Supelec)

1. Soit $A_n = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$a_{i,i} = 2 \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket ; \quad a_{i,i+1} = 1 \quad \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket ; \quad a_{i+1,i} = 1 \quad \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \text{et} \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{sinon}$$

On pose $D_n = \det(A_n)$.

- (a) Déterminer une relation de récurrence (\star) entre D_n , D_{n-1} et D_{n-2} .
- (b) On suppose qu'il existe une suite géométrique qui vérifie la relation (\star); montrer que sa raison est solution d'une équation du second degré qu'on précisera.
- (c) Montrer, à l'aide d'une récurrence double, que $D_n = n + 1$.

$$2. \text{ Désormais, on note } \Delta_n = \begin{vmatrix} 2 \cos \alpha & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 \cos \alpha & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 \cos \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix}.$$

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, déterminer une relation de récurrence liant Δ_n , Δ_{n-1} et Δ_{n-2} .
- (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\Delta_n = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$.

Exercice 1.5

On définit le déterminant de VANDERMONDE par :

$$V_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $V_n(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, X)$ est un polynôme de degré $n - 1$.
2. Déterminer ses racines et exprimer son coefficient dominant.
3. En déduire que $V_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$.

Exercice 1.6

1. Soit u l'application : $\begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P + P' \end{matrix}$. Montrer que u est un endomorphisme et calculer $\det(u)$.
2. Même question avec $v : \begin{matrix} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto XP' + P(1) \end{matrix}$.

Exercice 1.7

Soit $V = \{x \mapsto e^x P(x), P \in \mathbb{R}_n[x]\}$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension.
2. Montrer que l'application $D : \begin{matrix} V \rightarrow V \\ f \mapsto f' \end{matrix}$ est un endomorphisme dont on calculera le déterminant.

L'**algèbre** est une branche des mathématiques qui étudie les structures issues des propriétés de certaines équations. L'**algèbre linéaire** consiste donc en la formalisation générale des théories des systèmes d'équations linéaires. En algèbre linéaire, les structures des ensembles et des applications entre ces ensembles sont celles des espaces vectoriels et des applications linéaires.

Le mot « algèbre » est dérivé du mot arabe « al-jabr » qui apparaît dans le titre d'un ouvrage rédigé vers 825 par le mathématicien persan AL-KHWARIZMI, et qui signifie « réduction d'une fracture ». Ce terme est ainsi utilisé pour décrire une méthode de résolution d'équations par réduction.

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

2.1 Applications linéaires

Définition 2.1 Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\varphi : E \rightarrow F$ une application.

φ est une **application linéaire** si :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(\lambda u + v) = \lambda \varphi(u) + \varphi(v)$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E, F)$, c'est un espace vectoriel.

Une application linéaire de E dans \mathbb{K} est appelée **forme linéaire**.

Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** ; une application linéaire bijective est appelée **isomorphisme** et, un endomorphisme bijectif est appelé **automorphisme**

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle **noyau** de φ l'image réciproque de $\{0_F\}$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de E constitué des antécédents de 0_F par φ et on le note $\text{Ker}(\varphi)$:

$$\text{Ker}(\varphi) = \{u \in E, \varphi(u) = 0_F\}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle **image** de φ l'image directe de E , c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de F constitué des valeurs atteintes par φ et on le note $\text{Im}(\varphi)$:

$$\text{Im}(\varphi) = \{v \in F, \exists u \in E, \varphi(u) = v\}$$

Si E est un espace vectoriel de dimension finie n , de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ alors :

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n))$$

Alors, on appelle **rang** de φ la dimension de $\text{Im}(\varphi)$:

$$\text{rg}(\varphi) = \dim(\text{Im}(\varphi))$$

Définition 2.2 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et φ un endomorphisme de E , alors la **matrice canoniquement associée à φ** est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow e_1 \\ \vdots \\ \leftarrow e_n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \cdots & \uparrow \\ \varphi(e_1) & \cdots & \varphi(e_n) \end{array}$$

Proposition

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$:

- ① φ est injective si, et seulement si $\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.
- ② φ est surjective si, et seulement si $\text{Im}(\varphi) = F$.

Théorème du rang

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$:

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \text{rg}(\varphi)$$

Corollaire

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$:

$$\varphi \text{ est bijective} \iff \varphi \text{ est injective} \iff \varphi \text{ est surjective}$$

Exemple 2.1 Soit φ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$

2.2 Familles de vecteurs

Dans ce paragraphe I désigne un ensemble d'indices, non nécessairement fini, au plus dénombrable; par exemple $I = \llbracket 1, n \rrbracket = \{1, 2, \dots, n\}$, ou $I = \mathbb{N}$.

\mathcal{F} désigne une famille de vecteurs de E indexée par $I : \mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$, avec $u_i \in E, \forall i \in I$.

Définition 2.3 On dit que \mathcal{F} est une **famille libre** de E si toute sous-famille finie de \mathcal{F} est libre. Autrement dit, pour tout $J \subset I, J$ finie :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j u_j = 0_E \iff \lambda_j = 0, \forall j \in J$$

Exemple 2.2 Montrer que la famille $\{x \mapsto e^{nx}, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition 2.4 On dit que \mathcal{F} est une **famille génératrice** de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire de vecteurs de \mathcal{F} . Autrement dit :

$$\forall u \in E, \exists J \subset I, J \text{ finie et } \exists (\lambda_j)_{j \in J}, \quad u = \sum_{j \in J} \lambda_j u_j$$

Exemple 2.3 Montrer que la famille $\{X^n, n \in \mathbb{N}\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

Définition 2.5 On dit que \mathcal{F} est une **base** de E si \mathcal{F} est une famille à la fois libre et génératrice de E .

Théorème

Toute famille de polynômes non nuls, échelonnée en degré, est libre.

Plus précisément, toute famille $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ avec $\deg(P_k) = k$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Propriétés

① Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

② Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

③ Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E , alors $(\varphi(u_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $\text{Im}(\varphi)$.

Théorème

Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre de E et si $(u, (u_i)_{i \in I})$ est une famille liée, alors u est combinaison linéaire de $(u_i)_{i \in I}$.

Preuve 2.1**Théorème**

L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.

Preuve 2.2**2.3 Sous-espaces vectoriels**

On rappelle que une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si $\begin{cases} 0_E \in F \\ \forall (u, v) \in F^2 \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F \end{cases}$

Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs de E ; on note $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs u_1, \dots, u_n .

Propriétés

① $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E .

② $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs u_1, \dots, u_n .

③ Si (u_1, \dots, u_n) est famille génératrice de E , alors $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On rappelle également que la **somme** $F + G$ est l'ensemble

$$F + G = \{u \in E, \exists (v, w) \in F \times G, u = v + w\}$$

Propriétés

$F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant F et G ; ainsi $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$.

Enfin, on rappelle que F et G sont **supplémentaires** si tout vecteur de E se décompose de manière unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G ; soit :

$$\forall u \in E, \text{ il existe un unique } (v, w) \in F \times G, \text{ tel que } u = v + w$$

On dit alors que la somme est **directe** et on écrit $E = F \oplus G$.

Propriétés

$$E = F \oplus G \iff F \cap G = \{0_E\} \text{ et } E = F + G$$

Propriétés

Soit E de dimension finie n , de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

① Soient $p \leq n$ et $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Alors F et G sont supplémentaires.

② Soient $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq n$, tels que $p + q = n$, et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de bases respectives (f_1, \dots, f_p) et (g_1, \dots, g_q) . Alors $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E .

③ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$. Alors :

$$E = F \oplus G \iff E = F + G \iff F \cap G = \{0_E\}$$

Définition 2.6 Soient $p \in \mathbb{N}$, $I = \llbracket 1, p \rrbracket$ et $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E .

On appelle **somme** des $(F_i)_{i \in I}$ et on note $\bigoplus_{i \in I} F_i$ ou $\sum_{i=1}^p F_i$, le sous-espace vectoriel F de E défini par

$$F = \bigoplus_{i \in I} F_i = \sum_{i=1}^p F_i = \left\{ u \in E, u = \sum_{i=1}^p u_i, \text{ avec } u_i \in F_i, \forall i \in I \right\}$$

Définition 2.7 Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E .

On dit que la somme F des $(F_i)_{i \in I}$ est en **somme directe** et on note $F = \bigoplus_{i \in I} F_i$ si tout élément de F se décompose de manière unique comme somme de vecteurs de F_i .

Exemple 2.4 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on note G l'ensemble des fonctions paires et H l'ensemble des fonctions impaires. Montrer que $E = G \oplus H$.

Théorème

Une somme des sous-espaces vectoriels F_i est directe si, et seulement si le vecteur nul se décompose de manière unique comme somme de vecteurs des F_i .

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$. Pour tout $i \in I$, on note \mathcal{B}_i une base de E_i . Alors la famille formée de la réunion des $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ est une base de E , appelée **base adaptée à la décomposition en somme directe**

Exemple 2.5 Soit $E = \mathbb{R}_1[X]$, $E_1 = \{P \in E, P(1) = 0\}$ et $E_2 = \{P \in E, P(2) = 0\}$. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F admet un sous-espace supplémentaire dans E .

Remarque.  Ce supplémentaire n'est pas unique.

Définition 2.8 Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

Exemple 2.6 Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E, x + y = 2z \right\}$. Montrer que F est un hyperplan de E .

Propriété

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Autrement dit, un hyperplan est l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène de rang 1. Cette équation est alors l'équation de l'hyperplan.

Propriété

Un hyperplan est un sous-espace vectoriel dont un supplémentaire est une droite vectorielle.

2.4 Applications linéaires particulières

On considère E un \mathbb{K} -espace vectoriel, ainsi que F et G deux sous-espaces supplémentaires de E . Ainsi, $E = F \oplus G$, c'est-à-dire, $\forall u \in E$, u s'écrit de manière unique $u = u_F + u_G$, avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

Définition 2.9 Soit $E = F \oplus G$; $\forall u \in E$, on écrit $u = u_F + u_G$.

① L'application $p : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ u & \mapsto & u_F \end{matrix}$ est un endomorphisme appelé **projecteur** sur F parallèlement à G .

② L'application $s : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ u & \mapsto & u_F - u_G \end{matrix}$ est un endomorphisme appelé **symétrie** par rapport à F parallèlement à G .

Remarque. On note Id_E l'application identité de E .

Si $u = u_F + u_G$, alors $\text{Id}_E(u) = u_F + u_G$; $p(u) = u_F$ et $s(u) = u_F - u_G$.

On en déduit $s(u) + \text{Id}_E(u) = 2p(u)$; soit $s = 2p - \text{Id}_E$. s est alors appelée la symétrie associée à p .

Proposition

Soit $E = F \oplus G$ et soit p le projecteur sur F parallèlement à G . Alors :

- ① $p \circ p = p$.
- ② $\text{Ker } p = G$ et $\text{Im } p = F$.

Proposition

Réciproquement, soit p un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.

Alors $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ sont supplémentaires et p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Proposition

Soit $E = F \oplus G$ et soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

- ① $s \circ s = \text{Id}_E$ et s est un automorphisme.
- ② $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = F$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = G$.

Proposition

Réciproquement, soit s un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \text{Id}_E$.

Alors $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires et s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

Remarque. $u \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \Leftrightarrow s(u) - \text{Id}_E(u) = 0 \Leftrightarrow s(u) = u$; donc $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par s .

$u \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E) \Leftrightarrow s(u) + \text{Id}_E(u) = 0 \Leftrightarrow s(u) = -u$; donc $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs anti-invariants par s .

Exemple 2.7 Identifier et donner les éléments caractéristiques de l'endomorphisme canoniquement associé à la

$$\text{matrice } M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.5 Sous-espaces stables

Définition 2.10 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et φ un endomorphisme de E . On dit qu'un sous-espace F est stable par φ si l'image de F par φ est contenue dans F : $\varphi(F) \subset F$. Autrement dit :

$$F \text{ est stable par } \varphi \iff \forall u \in F, \varphi(u) \in F$$

Propriété

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Si F est un sous-espace stable par φ , alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est une matrice triangulaire par blocs.

Preuve 2.3

Exemple 2.8 ① Soit $E = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et φ un endomorphisme de E tel que $\text{Vect}(e_1)$ et $\text{Vect}(e_2, e_3)$ sont stables par φ . Déterminer la forme de la matrice de φ dans la base (e_1, e_2, e_3) .

② Soit $E = F \oplus G$. Déterminer la matrice de la projection p sur F parallèlement à G , puis celle de la symétrie s par rapport à F et parallèlement à G .

2.6 Matrices

Dans tout ce paragraphe, E est un espace vectoriel de dimension finie.

Définition 2.11 Soit A une matrice carrée de dimension n . On appelle **trace de A** et on note $\text{Tr}(A)$ la somme de ses éléments diagonaux :

$$\text{pour } A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Propriété

L'application $\text{Tr} : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \text{Tr}(M) \end{matrix}$ est une application linéaire; c'est une forme linéaire sur \mathbb{K} .

Théorème

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Corollaire

Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$$

Exemple 2.9 Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $\text{Tr}(A)$. Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $D = P^{-1}AP$, puis $\text{Tr}(D)$.

Définition 2.12 Soit φ un endomorphisme de E , on appelle **trace de φ** et on note $\text{Tr}(\varphi)$, la trace de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associée à φ dans n'importe quelle base de E .

Définition 2.13 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée de dimension n . On appelle **transposée de A** et on note A^T la matrice carrée de dimension n dont les coefficients b_{ij} vérifient $b_{ij} = a_{ji}, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Exemple 2.10 Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui sont égales à leur transposée.

Propriété

L'application transposition : $\begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^T \end{matrix}$ est un endomorphisme.

Corollaire

La transposée d'une combinaison linéaire de matrices est la combinaison linéaire des transposées de ces matrices.

Théorème

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Théorème

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors sa transposée est inversible et

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Définition 2.14 Une matrice carrée égale à sa transposée est appelée **matrice symétrique**. Une matrice carrée égale à l'opposée de sa transposée est appelée **matrice antisymétrique**.

Exemple 2.11 La matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est symétrique.

Théorème

- ① L'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- ② Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Autrement dit, l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve 2.4

Remarque. Dans la cas $n = 2$, on a montré : $\mathcal{S}_2(\mathbb{K}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{A}_2(\mathbb{K}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

$$\text{Et, par exemple, } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymétrique}}.$$

2.7 Travaux dirigés

Exercice 2.1

Soit f l'endomorphisme : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3x - 4y + 4z \\ y \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Que peut-on en déduire?
2. Déterminer $\text{Ker}(f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\text{Ker}(f + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Soit $u = (x, y, z)$; calculer $f \circ f(u)$.

Exercice 2.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; on définit la fonction $f : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MA - AM \end{matrix}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et écrire l'image par f de $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
2. Donner une base du noyau et de l'image de f .
3. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2.3 (D'après Centrale-Supelec)

Soit \mathbb{R}^2 muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $F_1 = \text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $F_2 = \text{Ker}(f - 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles supplémentaires. Préciser un vecteur directeur u_1 de F_1 et un vecteur directeur u_2 de F_2 .

On note q_1 le projecteur sur la droite F_1 parallèlement à la droite F_2 , et q_2 le projecteur sur la droite F_2 parallèlement à la droite F_1 .

2. Déterminer la matrice Q_1 de l'endomorphisme q_1 dans la base \mathcal{B} , et la matrice Q_2 de l'endomorphisme q_2 dans \mathcal{B} .
3. Justifier les égalités : $Q_1^2 = Q_1$; $Q_2^2 = Q_2$; $Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1 = 0_2$; $Q_1 + Q_2 = I_2$ et $A = Q_1 + 2Q_2$.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n , $A^n = Q_1 + 2^n Q_2$.

Exercice 2.4

Soit $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X) - (X+1)P'(X) \end{matrix}$

1. Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. f est-il un automorphisme?
2. Résoudre $f(P) = 2X + 3$; puis $f(P) = X^2 + 2X + 3$.

Exercice 2.5

Les familles de \mathbb{R}^3 suivantes sont-elles libres? génératrices?

1. $u = (0, 1, -2)$, $v = (-1, -2, 1)$, $w = (2, 3, 0)$ dans \mathbb{R}^3
2. $u = (1, 0, -1)$, $v = (-1, 1, 2)$, $w = (1, -2, 2)$ dans \mathbb{R}^3

Exercice 2.6

On se place dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 .

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 2z\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .
Déterminer deux vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 tels que $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
2. Soit $\vec{w} = (1, 1, -2)$ et $G = \text{Vect}(\vec{w})$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires.
3. Déterminer l'expression analytique de la symétrie s par rapport à F , parallèlement à G ; puis celle de la projection p sur F parallèlement à G . Vérifier la relation : $s = 2p - \text{id}_E$.

Exercice 2.7

1. Montrer que la famille de polynômes $(X^n, X^{n-1}(1+X), X^{n-2}(1+X)^2, \dots, X(1+X)^{n-1}, (1+X)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille des $((X-a)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire les polynômes solutions de l'équation différentielle : $(X-a)^2 P'' - n(X-a)P' + nP = 0$.
3. Soient a_1, \dots, a_n des éléments 2 à 2 distincts de \mathbb{K} . On pose $H(x) = (X-a_1) \times \dots \times (X-a_n)$. Montrer que les n polynômes $\left(\frac{H}{X-a_i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ constituent une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. En déduire l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, prenant les valeurs b_1, b_2, \dots, b_n pour chacune des valeurs a_1, a_2, \dots, a_n .

Exercice 2.8

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur x_0 de E tel que $u^2(x_0) \neq 0$.
2. Etablir que la famille $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), u^2(x_0))$ est une base de E .
3. Déterminer la matrice de u et de u^2 dans la base \mathcal{B} .
4. Montrer que la famille (Id_E, u, u^2) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$. Est-ce une base de $\mathcal{L}(E)$?
5. Montrer que l'ensemble C des endomorphismes de E commutant avec u forme un \mathbb{R} -espace vectoriel.
6. Si v est un élément de C , déterminer la forme de sa matrice dans la base \mathcal{B} . En déduire que $C = \text{Vect}(\text{Id}_E, u, u^2)$.
Quel est la dimension de C ?

Exercice 2.9 (D'après Centrale-Supelec)

On considère l'ensemble $\mathcal{F} = \left\{ M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Montrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 2.10

Dans cet exercice, on considère l'endomorphisme φ de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est

donnée par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle une matrice symétrique?
2. Déterminer un vecteur u de \mathbb{R}^3 tel que le sous-espace vectoriel $E_1 = \text{Vect}(u)$ soit stable par φ .
3. Soit $E_2 = \text{Vect}(v, w)$, où $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que E_2 est un sous espace stable par φ .

4. Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathbb{R}^3 .

Exercice 2.11

Soient u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . On suppose que u et v commutent, montrer que $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont stables par v . Que dire de la réciproque?

Exercice 2.12

On se place dans l'espace $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Résoudre dans E l'équation $M + M^T = O_E$.
2. Soit B une matrice quelconque de E . Résoudre dans E l'équation $M + M^T = B$.

Exercice 2.13

Soit ϕ défini sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\phi(M) = \text{Tr}(M)I_n + M$.

1. Vérifier que ϕ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer le noyau et le rang de ϕ . L'endomorphisme ϕ est-il bijectif?
3. Vérifier que $\phi^2 - (n+2)\phi + (n+1)\text{id}_E = 0$, en déduire l'expression de ϕ^{-1} .

Dans tout ce chapitre E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), muni d'une base \mathcal{B} . On considère un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est notée A .

La **réduction de l'endomorphisme** φ consiste en la recherche d'une base dans laquelle l'expression de φ sera la plus "simple" possible.

La **réduction de la matrice** A consiste en la recherche d'une matrice semblable à A (donc représentant encore φ) qui soit diagonale ou triangulaire.

Cette réduction possède de nombreuses applications, comme le calcul des puissances n -ièmes d'une matrice, la recherche des solutions d'une récurrence linéaire d'ordre 2, ou encore la recherche de solutions de systèmes différentiels linéaires, abordés plus tard dans le cours.

3.1 Éléments propres et polynôme caractéristique

Définition 3.1 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une **valeur propre** de φ , s'il existe un vecteur non nul u de E tel que

$$\varphi(u) = \lambda u$$

L'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme φ s'appelle le **spectre** de φ et est noté $\text{Sp}(\varphi)$.

Soit u un vecteur non nul de E . On dit que u est un **vecteur propre** de φ , s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\varphi(u) = \lambda u$$

Pour une valeur propre donnée λ , on appelle **sous-espace propre associé à λ** l'ensemble E_λ des vecteurs u de E tels que $\varphi(u) = \lambda u$. Autrement dit, E_λ est l'ensemble des vecteurs propres associés à λ auxquels on adjoint le vecteur nul.

Remarque.  Par définition, un vecteur propre ne peut pas être le vecteur nul. En revanche 0 peut être une valeur propre, car $\varphi(u) = 0 \cdot u = 0 \Leftrightarrow u \in \text{Ker}(\varphi)$. Un endomorphisme non injectif admet donc 0 comme valeur propre.

Exemple 3.1 Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème

$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de φ si, et seulement si $\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - \varphi) \neq \{0_E\}$.

Le sous-espace propre E_λ associé à λ est le sous-espace vectoriel $\text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - \varphi)$ de E .

Preuve 3.1

Corollaire

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $\text{Ker } \varphi$.
 Donc, 0 est valeur propre de φ si, et seulement si $\text{Ker } \varphi$ n'est pas réduit au vecteur nul. Autrement dit, 0 est valeur propre de φ si, et seulement si φ n'est pas injectif.

Théorème

- ① Le vecteur u est un vecteur propre de φ si, et seulement si $\text{Vect}(u)$ est stable par φ .
- ② Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres.
- ③ Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Preuve 3.2

Exemple 3.2

Définition 3.2 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une **valeur propre** de A , s'il existe un vecteur non nul X de \mathbb{K}^n tel que

$$AX = \lambda X$$

L'ensemble des valeurs propres de l'endomorphisme φ s'appelle le **spectre** de A et est noté $\text{Sp}(A)$.

Soit X un vecteur non nul de \mathbb{K}^n . On dit que X est un **vecteur propre** de A , s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$AX = \lambda X$$

Pour une valeur propre donnée λ , on appelle **sous-espace propre associé à λ** l'ensemble E_λ des vecteurs X de \mathbb{K}^n tels que $AX = \lambda X$. Autrement dit, E_λ est l'ensemble des vecteurs propres associés à λ auxquels on adjoint le vecteur nul.

Théorème

Soit φ un endomorphisme de E dont la matrice dans la base \mathcal{B} de E est A . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et soit $u \in E$ de coordonnées $X = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ dans la base \mathcal{B} . Alors :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } \varphi \Leftrightarrow \lambda \text{ est une valeur propre de } A$$

$$u \text{ est un vecteur propre de } \varphi \Leftrightarrow X \text{ est un vecteur propre de } A$$

Définition 3.3 On appelle **polynôme caractéristique** de φ (respectivement de A) le déterminant de $x\text{Id}_E - \varphi$ (respectivement de $xI_n - A$). On le note $\chi_\varphi(x)$ (respectivement $\chi_A(x)$). On a donc :

$$\chi_\varphi(x) = \det(x\text{Id}_E - \varphi) \quad \text{et} \quad \chi_A(x) = \det(xI_n - A)$$

Exemple 3.3 Déterminer les polynômes caractéristiques des matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Propriétés

- ① Le polynôme caractéristique est un élément de $\mathbb{K}[x]$.
- ② Le coefficient dominant du polynôme caractéristique est égal à 1.
- ③ Le terme constant du polynôme caractéristique est $(-1)^n \det(\varphi) = (-1)^n \det(A)$.
- ④ Les racines du polynôme caractéristique de φ sont les valeurs propres de φ .

Preuve 3.3

Définition 3.4 Soit λ une valeur propre de φ . On appelle **ordre de multiplicité de λ** , son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Exemple 3.4 Pour la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, la valeur 1 est de multiplicité 2 et la valeur propre 4 est de multiplicité 1

Théorème

Soit λ une valeur propre de φ , de sous-espace propre associé E_λ ; on a

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \text{ordre de multiplicité de } \lambda$$

Corollaire

λ est une valeur propre simple de φ si, et seulement si $\dim(E_\lambda) = 1$

Proposition - Lien entre polynôme annulateur et spectre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Π un polynôme annulateur de A . Alors toute valeur propre λ de A est racine de Π

Preuve 3.4

Exemple 3.5 Déterminer les polynômes annulateurs respectifs des projecteurs et symétries.

Que peut-on en déduire?

Remarque.  La réciproque est fautive en général. Toute racine d'un polynôme annulateur de A n'est pas nécessairement une valeur de A . Par exemple, $\Pi(X) = X^2 - X = X(X - 1)$ annule I_n , car $I_n^2 = I_n$, mais 0 n'est pas valeur propre de I_n .

3.2 Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition 3.5 Un endomorphisme φ de E est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Une matrice A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale; autrement dit s'il existe une matrice D diagonale et une matrice de passage P inversible telles que

$$D = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad A = PDP^{-1}$$

Théorème

- ① Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres.
- ② Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si sa matrice associée est diagonalisable.
- ③ Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E .

Corollaire

Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n .

Définition 3.6 Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On dit que P est **scindé** sur \mathbb{K} s'il peut être factorisé en un produit de polynômes de degré 1.

On dit que P est **scindé à racines simples** s'il est scindé et que toutes ses racines sont de multiplicité 1.

Remarque. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de degré supérieur ou égal à 1 est scindé sur \mathbb{C} .

Exemple 3.6 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$P_1 = X^2 - 5X + 6; P_2 = X^3 + X^2 - X - 1 \text{ et } P_3 = X^3 - 1$$

Théorème. Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité

φ est diagonalisable sur $\mathbb{K} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \chi_\varphi(x) \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \text{et} \\ \text{pour chaque valeur propre } \lambda, \dim(E_\lambda) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \end{array} \right.$

Remarque.  Le fait que le polynôme caractéristique soit scindé est une condition nécessaire mais non suffisante.

Corollaire

Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples est diagonalisable.

Remarque.  Le fait que le polynôme caractéristique soit scindé à racines simples est une condition suffisante mais non nécessaire.

Exemple 3.7 Réduire sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C} les matrices : $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème spectral

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres. Autrement dit : pour toute matrice symétrique réelle, il existe une matrice diagonale et une matrice orthogonale P telle que :

$$D = P^{-1}AP = P^TAP$$

Remarque. Nous définirons dans le chapitre 7 la notion de matrice orthogonale. P est orthogonale si et seulement si : $P^T P = I_n \Leftrightarrow P^{-1} = P^T$. De plus, les colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormée.

Exemple 3.8 Soit $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. A_2 est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée. On a vu que $\text{Sp}(A_2) = \{1, 4\}$. On montre que $E_4 = \text{Vect} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_1 = \text{Vect} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Méthode. Pour savoir si une matrice A est diagonalisable, on peut commencer par :

- ♦ vérifier si elle est symétrique réelle, auquel cas elle est diagonalisable;
- ♦ calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(x)$;
- ♦ si $\chi_A(x)$ n'est pas scindé, alors A n'est pas diagonalisable;
- ♦ si $\chi_A(x)$ est scindé à racines simples, alors A est diagonalisable;
- ♦ si $\chi_A(x)$ est scindé, mais certaines racines sont multiples; alors il faut déterminer les sous-espaces propres et vérifier que leur dimension est égale à la multiplicité de chaque racine.

Remarque. Le calcul du polynôme caractéristique n'est pas toujours nécessaire; dans certaines situation l'application de la définition et des théorèmes qui en découlent suffit, comme le montre l'exemple 1 :

Sans calculs, pour $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D_1 = P^{-1}A_1P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.3 Endomorphismes et matrices trigonalisables

Définition 3.7 Un endomorphisme φ de E est **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est triangulaire supérieure.

Une matrice A est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure; autrement dit s'il existe une matrice T triangulaire supérieure et une matrice de passage P inversible telles que

$$T = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PTP^{-1}$$

Remarque. Un endomorphisme diagonalisable est donc, en particulier, trigonalisable.

Théorème

Un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Corollaire

Tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel est trigonalisable.

Théorème

Soit φ un endomorphisme trigonalisable de matrice triangulaire supérieure T .

- ① Les valeurs propres se lisent sur la diagonale de T (en comptant leur multiplicité).
- ② La trace de φ est égale à la somme des valeurs propres (en comptant leur multiplicité).
- ③ Le déterminant de φ est égale au produit des valeurs propres (en comptant leur multiplicité).

Exemple 3.9

3.4 Applications de la réduction

Théorème

Soit A une matrice diagonalisable; alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Preuve 3.5

Exemple 3.10 Soit $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer A^n , $\forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème

Soit A une matrice trigonalisable. Notons λ la valeur propre de A de plus grand module. Si $\lambda \neq 0$, alors :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Tr}(A^{n+1})}{\text{Tr}(A^n)}$$

Exemple 3.11 Rendez-vous dans le TD9

Théorème

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients réels :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On appelle équation caractéristique associée à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'expression

$$r^2 = ar + b \text{ et on note } \Delta \text{ son discriminant}$$

- ◇ Si $\Delta > 0$: les racines simples de l'équation caractéristique sont r_1 et r_2 et

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- ◇ Si $\Delta = 0$: la racine double de l'équation caractéristique est r_0 et

$$u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

- ◇ Si $\Delta < 0$: les racines simples de l'équation caractéristique sont $\alpha e^{i\beta}$ et $\alpha e^{-i\beta}$ et

$$u_n = \alpha^n (\lambda \cos(\beta n) + \mu \sin(\beta n)), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque. La relation $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ s'écrit matriciellement $X_{n+1} = AX_n$ avec

$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; on montre alors que $X_n = A^n X_0$. Pour démontrer ce théorème,

il suffit alors de réduire la matrice A .

Exemple 3.12 Soit (u_n) la suite vérifiant : $\begin{cases} u_0 = \alpha \in \mathbb{R}, u_1 = \beta \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$. Exprimer u_n en fonction de n .

3.5 Rappels sur les équations différentielles à coefficients constants

Définition 3.8 Soit $y : t \mapsto y(t)$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I . On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants une équation de la forme :

$$y'(t) + ay(t) = b(t), \quad \text{où } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathcal{C}(I)$$

Théorème

Les solutions de l'équation différentielle $y'(t) + ay(t) = b(t)$ sont définies sur I par :

$$y(t) = Ce^{-at} + y_p(t), \quad \text{où } C \in \mathbb{R} \text{ et } y_p \text{ est une solution particulière}$$

Exemple 3.13 Résoudre les équations différentielles suivantes :

① $RC \frac{du(t)}{dt} + u(t) = E$, où R, C et E sont des réels et telle que $u(0) = 0$; ② $y' + 2y = e^{-t} + e^{-2t}$

Définition 3.9 Soit $y : t \mapsto y(t)$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle I . On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une équation de la forme :

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad \text{où } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } f \in \mathcal{C}(I)$$

Théorème

On considère l'équation différentielle homogène : $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$.

On appelle équation caractéristique associée à l'équation homogène l'équation :

$$r^2 + ar + b = 0 \text{ et on note } \Delta \text{ son discriminant}$$

◇ Si $\Delta > 0$: les racines simples de l'équation caractéristique sont r_1 et r_2 et y est définie sur I par :

$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

◇ Si $\Delta = 0$: la racine double de l'équation caractéristique est r_0 et y est définie sur I par :

$$y(t) = \lambda e^{r_0 t} + \mu t e^{r_0 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

◇ Si $\Delta < 0$: les racines simples de l'équation caractéristique sont $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ et y est définie par :

$$y(t) = e^{\alpha t} (\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 3.14 Résoudre le problème de Cauchy suivant : $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 5 \cos(t) \\ y(0) = 0; y'(0) = 0 \end{cases}$.

3.6 Travaux dirigés

Exercice 3.1

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est diagonalisable. Réduire A et calculer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. *Variante* : On pose $\Pi(X) = X^3 - X^2 - X + 1$.
 - (a) Montrer que $\Pi(A) = 0$.
 - (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par Π .
 - (c) Retrouver alors l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.2

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Réduire A .
2. En déduire $\{B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AB = BA\}$.

Montrer que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en donner une base.

Exercice 3.3 ★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable et telle que $\text{Sp}(A) = \{a, b\}$, où a et b sont des réels.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, il existe (α_k, β_k) tel que $A^k = \alpha_k A + \beta_k I_n$.

Exercice 3.4

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$.

1. *Une première méthode* : On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
 - (a) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
 - (b) Réduire A afin de calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (c) En déduire les expressions de u_n et de v_n en fonction de u_0 et v_0 .
2. *Une deuxième méthode* : On introduit les suites (S_n) et (D_n) définies par $S_n = u_n + v_n$ et $D_n = u_n - v_n$.
 - (a) Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison. Exprimer alors S_n en fonction de n , de u_0 et de v_0 .
 - (b) Exprimer de même D_n en fonction de n , de u_0 et de v_0 .
 - (c) Conclure.

Exercice 3.5

Déterminer la suite (u_n) définie par la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1 & , & u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Exercice 3.6 ★ (D'après Centrale-Supelec)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. f est-il diagonalisable sur \mathbb{R} ? sur \mathbb{C} ?
2. Soit $Z = X + iY$ un vecteur propre complexe de f associé à la valeur propre $\lambda = a + ib$. En identifiant les parties réelles et imaginaires dans l'égalité $MZ = \lambda Z$, déterminer l'équation cartésienne d'un plan stable par f .

Exercice 3.7

Résoudre le système différentiel : $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) = -x(t) + y(t) + 2z(t) \end{cases}$.

Exercice 3.8 ★ (D'après Centrale-Supelec)

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice J est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ? sur \mathbb{C} ?

Déterminer ses éléments propres.

2. On considère $(a_n), (b_n), (c_n)$ les suites définies par :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n) \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + a_n) \end{cases}$$

Soit $U_n = (a_n, b_n, c_n)$; déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

3. Exprimer A en fonction de J et montrer que A est semblable à une matrice diagonale à préciser.
4. En déduire les expressions des suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ et montrer qu'elles sont convergentes.

Exercice 3.9 ★ (D'après Centrale-Supelec)

Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on appelle χ_n le polynôme caractéristique de A_n .

1. Pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, on pose $u_n = \chi_n(2 \cos \alpha)$. Pour $n \geq 4$, déterminer une relation de récurrence liant u_n, u_{n-1} et u_{n-2} . En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, u_n = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, A_n$ possède n valeurs propres deux à deux distinctes.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, déterminer les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A_n .

On pourra considérer les vecteurs $X_\alpha = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \sin 2\alpha \\ \vdots \\ \sin n\alpha \end{pmatrix}$

Dans tout ce chapitre, les fonctions étudiées seront à valeurs vectorielles, c'est-à-dire à valeurs dans \mathbb{R}^n , avec $n = 2$ ou $n = 3$.

4.1 Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Théorème

L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$, muni de la somme des applications et du produit par un réel, a une structure d'espace vectoriel réel.

Définition 4.1 Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$. On appelle **fonctions coordonnées** ou **fonctions composantes** les fonctions $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, avec $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, telles que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

Définition 4.2 Soit $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$, $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f **admet pour limite ℓ en t_0** et on note $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \ell$, si chaque fonction coordonnée f_i admet pour limite ℓ_i en t_0 , soit si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = \ell_i$$

autrement dit, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in I, |t - t_0| \leq \eta \Rightarrow |f_i(t) - \ell_i| \leq \varepsilon$$

Remarque. On définit de manière analogue la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$, ainsi que la limite à gauche et à droite en t_0 .

Exemple 4.1 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(t) = \left(\frac{t^2+1}{t}, \frac{1}{t}\right)$.

Donner l'ensemble de définition de f et calculer $\lim_{t \rightarrow 1} f(t)$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$, $\ell \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. f admet pour limite ℓ en t_0 si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in I, |t - t_0| \leq \eta \Rightarrow \|f(t) - \ell\| \leq \varepsilon$$

Preuve 4.1

Définition 4.3 Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ et $t_0 \in I$; on dit que f est **continue en** t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$; on dit que f est **continue sur** I si f est continue en tout point t_0 de I . On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ (ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$) l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Définition 4.4 Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ et $t_0 \in I$. On dit que f est **dérivable en** t_0 si chaque fonction coordonnée est dérivable en t_0 . Dans ce cas, on appelle **dérivée de f en t_0** le vecteur

$$f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_n(t_0))$$

Remarque. On définit de manière analogue la notion de dérivabilité à gauche et à droite en t_0 .

Propriétés

Lorsqu'il existe et qu'il n'est pas nul, le vecteur dérivée $f'(t_0)$ s'interprète géométriquement comme un vecteur directeur de la tangente à la courbe représentative de f dans \mathbb{R}^n .

De même, le vecteur dérivée $f'(t_0)$ s'interprète cinématiquement comme le vecteur vitesse d'un point mobile qui décrirait la trajectoire f en fonction du temps t .

Exemple 4.2 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(t) = (t + \frac{1}{t}, \frac{1}{t})$. Calculer $f'(t)$, puis $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(\frac{1}{2})$.

Définition 4.5 Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$; on dit que f est **dérivable sur** I si f est dérivable en tout point t_0 de I .

On dit que f est **de classe \mathcal{C}^k sur** I si chaque fonction coordonnée est de classe \mathcal{C}^k sur I . On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I et à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Exemple 4.3 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ définie par $f(t) = (t + \frac{1}{t}, \frac{1}{t})$. Calculer $f^{(k)}(t)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Théorème

L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Propriétés

Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, deux fonctions vectorielles et une fonction réelle.

Si f , g et h sont dérivables en t_0 alors

- ◇ $f + g$ est dérivable en t_0 et $(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$;
- ◇ $h \times f$ est dérivable en t_0 et $(h \times f)'(t_0) = h'(t_0) \times f(t_0) + h(t_0) \times f'(t_0)$.

Si f , g et h sont dérivables sur I alors

- ◇ $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$;
- ◇ $h \times f$ est dérivable sur I et $(h \times f)' = h' \times f + h \times f'$.

Définition 4.6 Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$; on dit que f admet un **développement limité à l'ordre k au voisinage de** t_0 si chaque fonction coordonnée admet un développement limité à l'ordre k au voisinage de t_0 .

Théorème. Formule de Taylor-Young à l'ordre k

Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et $t_0 \in I$, alors f admet un développement limité à l'ordre k au voisinage de t_0 donné par

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!}f''(t_0) + \dots + \frac{(t - t_0)^k}{k!}f^{(k)}(t_0) + o((t - t_0)^k)$$

Remarque. La fonction $t \mapsto o((t - t_0)^k)$ est une fonction négligeable devant $t \mapsto (t - t_0)^k$ au voisinage de t_0 . Cette fonction peut également s'écrire $t \mapsto (t - t_0)^k \varepsilon(t - t_0)$, où $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t - t_0) = 0$.

Exemple 4.4 Donner le $DL_3(0)$ de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$.

Remarque. Une fonction f peut admettre un développement limité d'ordre k en un point t_0 en lequel f n'est pas définie; auquel cas, on dit que la fonction f est prolongeable par continuité en t_0 .

Exemple 4.5 Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(t) = \left(\frac{\ln(1+t)}{t}, \frac{e^t-1}{t}\right) = (x(t), y(t))$.

Montrer que h est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

On suppose \mathbb{R}^n muni d'une structure euclidienne, c'est-à-dire muni d'un produit scalaire, noté $\langle u, v \rangle$ ou $u \cdot v$ pour tous vecteurs u et v de \mathbb{R}^n . Alors il est possible d'associer à ce produit scalaire une norme en posant $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u \cdot u}$.

Théorème. Dérivée du produit scalaire

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$; alors le produit scalaire $f \cdot g \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ et on a

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} \cdot g^{(k-i)}$$

Corollaire. Dérivée d'une norme

Soient $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que f ne s'annule pas sur I ; alors la norme $\|f\| \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et on a

$$(\|f\|)' = \frac{f' \cdot f}{\|f\|}$$

Théorème. Dérivée d'un déterminant

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$; alors le déterminant $\det(f, g) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et on a

$$(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$$

Soient f, g et h trois fonctions de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^3)$; alors le déterminant $\det(f, g, h) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et on a

$$(\det(f, g, h))' = \det(f', g, h) + \det(f, g', h) + \det(f, g, h')$$

Théorème. Dérivée d'un produit vectoriel

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^3)$; alors le produit vectoriel $f \wedge g \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^3)$ et on a

$$(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$$

$$(f \wedge g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} \wedge g^{(k-i)}$$

4.2 Courbes paramétrées

4.2.1 Rappels sur les graphes de fonctions réelles à valeurs réelles.

Dans ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Définition 4.7 Soit D un sous-ensemble de \mathbb{R} et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On appelle **graphe de f** (ou **représentation graphique de f** , ou encore **courbe représentative de f**) la courbe plane définie par l'équation $y = f(x)$; c'est-à-dire l'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x, f(x))$.

Définition 4.8 Soit I un intervalle de \mathbb{R} ; on considère une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable** en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

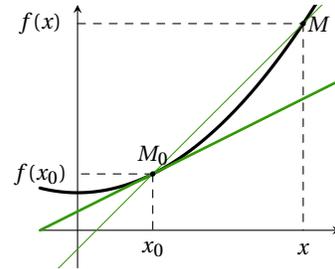
existe et est finie. Dans ce cas cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée **nombre dérivé** de f en x_0 .

Remarques.

- ◇ La quantité $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ s'appelle le **taux de variation** de f au voisinage de x_0 .
- ◇ En posant $x = x_0 + h$, le taux de variation s'écrit aussi $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, ainsi : $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

Le quotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est le taux de variation, ou taux d'accroissement, de la fonction f entre x_0 et x . Graphiquement, il représente la pente de la sécante joignant les points $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M(x, f(x))$ de la courbe représentative \mathcal{C} de f .

Si f est dérivable en x_0 , cette sécante a une position limite, qu'on appelle **tangente** à \mathcal{C} au point M_0 . Ainsi, le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de cette tangente.



Propriété. Equation de la tangente à une courbe

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $x_0 \in I$. Alors $f'(x_0)$ représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 .

Plus précisément, cette tangente admet pour équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Remarques.

- ◇ Si f est définie en x_0 , n'est pas dérivable en x_0 et si le taux de variation de f en x_0 tend vers l'infini; alors le graphe présente une tangente verticale au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. C'est le cas du graphe de la fonction racine carrée en 0, par exemple.
- ◇ Si f est définie en x_0 , mais les dérivées à gauche et à droite sont différentes; alors le graphe présente deux demi-tangente formant un angle. On dit que le graphe possède un **point anguleux**. C'est le cas de la fonction valeur absolue en 0, par exemple.

4.2.2 Arcs paramétrés

Définition 4.9 Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. Pour $t \in I$, on note \mathcal{C} l'ensemble des points de \mathbb{R}^n de coordonnées $f(t)$. Le triplet (I, f, \mathcal{C}) s'appelle un **arc paramétré**.

Si $n = 2$, on parle d'**arc paramétré plan**.

Le couple (I, f) est le **paramétrage** de l'arc et \mathcal{C} est la **courbe paramétrée**.

Exemple 4.6 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$, et \mathcal{C} la courbe paramétrée associée. On reconnaît \mathcal{C} comme le cercle de centre 0 et de rayon 1 (cercle trigonométrique).

On dit alors que $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ est un paramétrage de ce cercle.

Ce paramétrage n'est pas unique; la fonction définie sur $\mathbb{R} : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ donne un autre paramétrage de ce cercle, mais privé du point $(-1, 0)$.

Définition 4.10 Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré et t_0 une borne de I .

Si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty$, on dit que la courbe présente une **branche infinie**.

Remarque. Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré plan. On note $f(t) = (x(t), y(t))$. La courbe \mathcal{C} présente une branche infinie si $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \pm\infty$ ou $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \pm\infty$.

Exemple 4.7 On reprend la fonction définie sur $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$ par $f(t) = (x(t), y(t)) = (t + \frac{1}{t}, \frac{1}{t})$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$; donc \mathcal{C} admet une branche infinie en $+\infty$ et, d'après les limites de $x(t)$ et de $y(t)$ on peut même dire que \mathcal{C} admet une asymptote horizontale lorsque t tend vers $+\infty$.

$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = +\infty$, donc \mathcal{C} admet une branche infinie en 0.

On peut même démontrer que \mathcal{C} admet la droite d'équation $y = x$ comme asymptote oblique.

Définition 4.11 Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré et $t_0 \in I$. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Si $f'(t_0) \neq 0$, on dit que le point $M(t_0)$ de coordonnées $f(t_0)$ est **régulier**. Dans le cas contraire, on dit que le point est **stationnaire**.

On rappelle que le vecteur dérivée $f'(t_0)$ s'interprète cinématiquement comme le vecteur vitesse d'un point mobile qui décrirait la trajectoire f en fonction du temps t . En un point stationnaire le vecteur vitesse s'annule, d'où son nom.

Propriété. Vecteur tangent à une courbe paramétrée

Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$. Soit $t_0 \in I$ tel que $M(t_0)$ soit un point régulier. Alors un vecteur directeur de la tangente à \mathcal{C} en $M(t_0)$ est donné par $f'(t_0)$.

Plus précisément, dans le cas d'un arc plan, une équation cartésienne de cette tangente est donnée par

$$y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$$

Une représentation paramétrique est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = x(t_0) + t x'(t_0) \\ y(t) = y(t_0) + t y'(t_0) \end{cases}$$

Remarque.

Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré plan. On note $f(t) = (x(t), y(t))$.

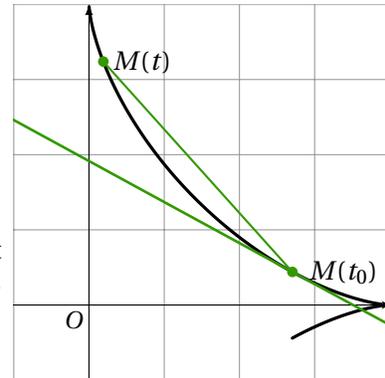
Soient $t \neq t_0$ dans I , on considère les points $M(t)$ et $M(t_0)$ de \mathcal{C} .

La sécante $(M(t_0), M(t))$ est dirigée par le vecteur :

$$(x(t) - x(t_0), y(t) - y(t_0)).$$

Ce vecteur est colinéaire à $(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}, \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0})$.

Lorsque $t \mapsto f(t)$ est dérivable en t_0 alors $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ le sont également, et la valeur limite des vecteurs directeurs des sécantes devient $(x'(t_0), y'(t_0)) = f'(t_0)$.



Exemple 4.8 On considère la fonction définie sur $] -\pi, \pi]$ par $g(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

Déterminer les points stationnaires; puis déterminer une représentation paramétrique de la tangente en un point régulier.

4.2.3 Etude des arcs paramétrés plans.

Dans ce paragraphe, le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Définition du domaine d'étude.

Soit (D, f, \mathcal{C}) un arc paramétré plan. On note $f(t) = (x(t), y(t))$. Le domaine de définition D est l'intersection des domaines de définition de x et de y . D est un intervalle I ou une réunion d'intervalles.

On peut ensuite utiliser certaines propriétés des fonctions x et y pour réduire le domaine d'étude.

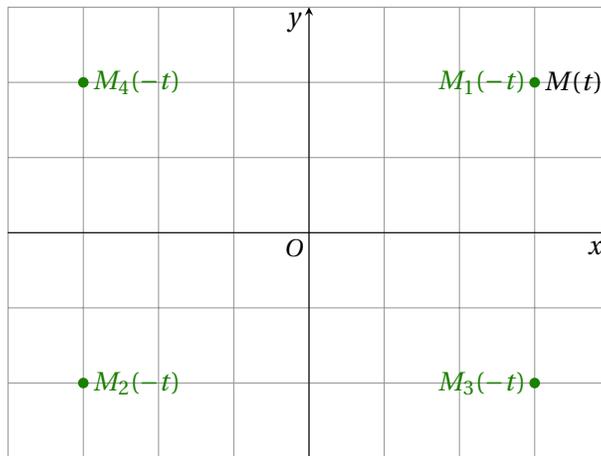
Périodicité

Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré plan. Si x et y sont T -périodiques, alors on peut réduire le domaine d'étude à un intervalle de la forme $[a, a + T[\cap I$. La courbe est alors invariante.

Parités

Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré plan.

- ① Si x et y sont paires, alors on peut réduire le domaine d'étude à un intervalle de la forme $[0, +\infty[\cap I$. La courbe est alors invariante.
- ② Si x et y sont impaires, alors on peut réduire le domaine d'étude à un intervalle de la forme $[0, +\infty[\cap I$. La totalité de la courbe est obtenue par symétrie centrale par rapport à O .
- ③ Si x est paire et y est impaire, alors on peut réduire le domaine d'étude à un intervalle de la forme $[0, +\infty[\cap I$. La totalité de la courbe est obtenue par symétrie d'axe (Ox) .
- ④ Si x est impaire et y est paire, alors on peut réduire le domaine d'étude à un intervalle de la forme $[0, +\infty[\cap I$. La totalité de la courbe est obtenue par symétrie d'axe (Oy) .



Remarque. Cas particulier où les fonctions x et y sont 2π -périodiques :

Il peut être intéressant de calculer $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$. En effet, supposons avoir restreint de domaine d'étude à $[0, \pi]$; alors $t \in [0, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq \pi - t \leq \pi \Leftrightarrow \pi - t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Ainsi, si $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$ s'expriment simplement en fonction de $x(t)$ et $y(t)$, on pourra restreindre le domaine d'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Exemple 4.9 On considère la courbe paramétrée, définie sur \mathbb{R} par : $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$

- x et y sont périodiques; donc on peut étudier sur $[-\pi, \pi]$ et la courbe est invariante.
- x est paire et y est impaire; donc on peut étudier sur $[0, \pi]$ et on obtient la totalité de la courbe par symétrie d'axe (Ox) .
- $x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$; donc on peut étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et on obtient la totalité de la courbe par symétrie d'axe (Oy) .

Etude des variations simultanées

Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré plan. On note $f(t) = (x(t), y(t))$ et on suppose que $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$.

On dérive alors les fonctions x et y , on étudie le signe de ces dérivées pour en déduire les variations simultanées des fonctions x et y .

Exemple 4.10 On considère la courbe paramétrée définie sur $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$ par $\begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$

Comme x et y sont impaires, on peut étudier sur $] 0, +\infty[$ et on obtiendra la totalité de la courbe par symétrie de centre O . Dresser les tableaux de variations conjoints des fonctions x et y sur $] 0, +\infty[$.

Etude des tangentes et tracé de la courbe

Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré plan. On note $f(t) = (x(t), y(t))$ et on suppose que $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$. Soit $t_0 \in I$.

◇ Si $M(t_0)$ est un point régulier :

Un vecteur tangent est donné par $f'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$. Ainsi si $x'(t_0) = 0$, alors \mathcal{C} admet une tangente **verticale** en $M(t_0)$ et si $y'(t_0) = 0$, alors \mathcal{C} admet une tangente **horizontale** en $M(t_0)$.

◇ Si $M(t_0)$ est un point stationnaire :

Le vecteur $f'(t_0)$ est le vecteur nul et ne peut être vecteur directeur de la tangente.

Propriété. Vecteur tangent à un arc plan

Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré plan tel que $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$. On suppose qu'il existe un entier $i < k$ tel que $f^{(i)}(t_0)$ soit non nul.

Alors un vecteur directeur de la tangente à \mathcal{C} en $M(t_0)$ est donné par le premier vecteur dérivé non nul dans la suite $(f^{(j)}(t_0))_{1 \leq j \leq i}$.

Exemple 4.11 On considère la courbe paramétrée définie sur \mathbb{R} par $g(t) = \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$

Les points de paramètres respectifs 0 et $\frac{\pi}{2}$ sont stationnaires.

Déterminer un vecteur tangent en chacun de ces points.

Propriété. Position relative d'une courbe par rapport à sa tangente

Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré plan tel que $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$. On suppose que $t_0 \in I$. La position relative locale de \mathcal{C} par rapport à sa tangente en $M(t_0)$ est donnée par les termes du développement limité de f au voisinage de t_0 .

Exemple 4.12 On considère à nouveau la courbe paramétrée définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par $f(t) = \begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$

$x'(1) = 0$ et $y'(1) = -1$, donc, au point $M(t=1) = M(2, 1)$, la courbe \mathcal{C} admet une tangente verticale.

$x(1+h) = 1+h + \frac{1}{1+h} = 1+h + 1-h+h^2 + o(h^2) = 2+h^2 + o(h^2)$; $y(1+h) = \frac{1}{1+h} = 1-h+h^2 + o(h^2)$;

on a donc $f(1+h) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{tangente}} + h \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + o(h^2)$. Le terme d'ordre 2 est positif, donc la courbe se trouve à

droite de la tangente verticale.

Propriété. Longueur d'une courbe

Soit (I, f, \mathcal{C}) un arc paramétré plan tel que $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$. Soient t_1 et t_2 deux points de I , on suppose que l'arc est régulier sur $[t_1, t_2]$. La longueur L de l'arc de courbe compris entre $M(t_1)$ et $M(t_2)$ est donné par

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Exemple 4.13 On considère à nouveau la courbe paramétrée définie sur \mathbb{R} par $g(t) = \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$.

Déterminer la longueur de cette courbe.

4.3 Travaux dirigés

Exercice 4.1

1. On considère la fonction $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $t \mapsto A(t)$, dérivable. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $C_1(t)$ la première colonne de $A(t)$ et $C_2(t)$ la deuxième colonne, on a donc $A(t) = (C_1(t), C_2(t))$.

On note $D(t) = \det(A(t))$; montrer que D est dérivable et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$D'(t) = \det(C_1'(t), C_2(t)) + \det(C_1(t), C_2'(t))$$

Plus généralement, on peut montrer que si A est une fonction dérivable de \mathbb{R} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en notant $C_j(t)$ la j -ième colonne de $A(t)$ et $D(t) = \det(A(t))$; alors D est dérivable et on a :

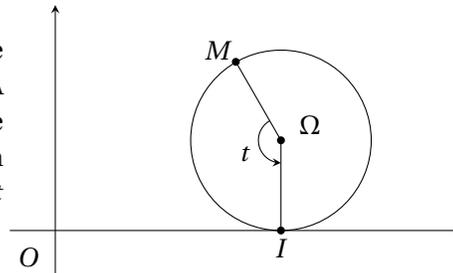
$$D'(t) = \det(C_1'(t), C_2(t), \dots, C_n(t)) + \det(C_1(t), C_2'(t), \dots, C_n(t)) + \dots + \det(C_1(t), C_2(t), \dots, C_n'(t))$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$, on pose $D_0(t) = 1$, $D_1(t) = t$, et, pour tout $n \geq 2$, $D_n(t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{t^3}{6} & \frac{t^2}{2} & t & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{t^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{t^2}{2} & t \end{vmatrix}$.

Montrer que D_n est dérivable et calculer $D_n'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire une expression de $D_n(t)$.

Exercice 4.2 La cycloïde

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Un cercle \mathcal{C} de rayon 1 de centre Ω roule sans glisser sur l'axe (Ox) . A l'instant $t = 0$, le cercle a son centre sur l'axe (Oy) et on note $M(t)$ le point du cercle situé au point O à l'instant $t = 0$. On note $I(t)$ le point de contact entre \mathcal{C} et l'axe (Ox) . La variable t correspond à la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega I})$.



1. Déterminer, en fonction de t , une paramétrisation de la courbe décrite par le point M .

2. On s'intéresse à l'arc, appelé cycloïde, défini par :
$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

- (a) Quelle transformation permet d'obtenir le point $M(t + 2\pi)$ à partir du point $M(t)$?
- (b) Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 pour les fonctions $x(t)$ et $y(t)$.
- (c) Etudier et tracer la cycloïde.
- (d) Calculer la longueur d'une arche de cycloïde.

Exercice 4.3 Folium de Descartes

On considère la courbe \mathcal{C} définie par :
$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

1. Pour $t \neq 0$ et $t \neq -1$, comparer $x(\frac{1}{t})$ et $y(\frac{1}{t})$ à $x(t)$ et $y(t)$. En déduire que \mathcal{C} admet un axe de symétrie que l'on précisera.

2. Expliquer pourquoi il suffit d'étudier la courbe pour $t \in]-1, 1[$. Etudier les variations simultanées de x et de y sur $] -1, 1[$.
3. Déterminer une équation de l'asymptote oblique à la courbe \mathcal{C} .
4. Construire la courbe \mathcal{C} .

Exercice 4.4 *Lemniscate de Bernoulli*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Etudier la courbe définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} \\ y(t) = \frac{\sin t \cos t}{1 + \cos^2 t} \end{cases}$$

En particulier, on calculera : $x\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$ et $y\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

2. On pose $z = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$; montrer que $\cos t = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ et que $\sin t = \frac{2z}{1+z^2}$.

En déduire qu'une autre paramétrisation de la lemniscate est donnée par :
$$\begin{cases} x(t) = \frac{z+z^3}{1+z^4} \\ y(t) = \frac{z-z^3}{1+z^4} \end{cases}$$

Exercice 4.5 *Cardioïde*

Etudier la courbe définie par :
$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t + \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin t + \sin(2t) \end{cases}$$

Calculer la longueur de cette courbe.

Exercice 4.6 *Deltoïde*

Etudier la courbe définie par :
$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t + \cos(2t) \\ y(t) = 2 \sin t - \sin(2t) \end{cases}$$

Calculer la longueur de cette courbe.

Exercice 4.7 *Courbes de Lissajous*

Etudier les courbes suivantes :

$$(a) \begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x(t) = 2 \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}$$

Exercice 4.8 *Nephroïde*

Un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ roule sans glisser à l'extérieur d'un cercle de rayon R .

Démontrer que la représentation paramétrique de la trajectoire d'un point M de ce cercle peut s'écrire :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{R}{2} (3 \cos t - \cos(3t)) \\ y(t) = \frac{R}{2} (3 \sin t - \sin(3t)) \end{cases}$$

Construire cette courbe.

Exercice 4.9

La courbe paramétrée par :
$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{1+2t} - t \\ y(t) = \frac{t^2 + 2t^3}{1+t} \end{cases}$$
 admet-elle un point singulier? Si oui, déterminer un vecteur tangent à la courbe en ce point.

Dans tout ce chapitre, les fonctions sont **continues** sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Théorème fondamental du calcul intégral

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I , et soit $a \in I$.

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Corollaire

① Si F est une primitive quelconque de f sur I alors $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$.

② Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I alors $\int_a^b f'(t) dt = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$.

Exemple 5.1 On cherche à déterminer les valeurs propres de l'application φ définie sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ par : $f \mapsto \int_0^x f(t) dt$.

Formule du changement de variable

Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I et f une fonction continue sur $\varphi(I)$. Alors pour tous a, b dans I :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

Exemple 5.2 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x} dx$ en posant $x = \arcsin t$ et en cherchant deux réels a et b vérifiant

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t}$$

5.1 Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Définition 5.1 Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, avec $a \in \mathbb{R}$. On dit que $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est une **intégrale convergente** si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Si tel est le cas, on note cette limite $\int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Remarque. Dans le cas où la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ n'admet pas de limite finie quand x tend vers $+\infty$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est dite **divergente**.

Exemple 5.3 Convergence et calcul (éventuel) des Intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$.

Proposition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues et à valeurs positives sur $[a, +\infty[$. On suppose que pour tout $t \in [a, +\infty[$, on a : $0 \leq f(t) \leq g(t)$.

① Si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

② Si $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ diverge.

Exemple 5.4 Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t}{e^t + 1} dt$.

5.2 Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Définition 5.2 Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, avec $a \in \mathbb{R}$, $b > a$ ou $b = +\infty$. On dit que $\int_a^b f(t) dt$ est une **intégrale convergente** si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures. Si tel est le cas, on note cette limite $\int_a^b f(t) dt$.

Définition 5.3 Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, avec $a < b$, ou $a = -\infty$ et $b \in \mathbb{R}$. On dit que $\int_a^b f(t) dt$ est une **intégrale convergente** si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers a par valeurs supérieures. Si tel est le cas, on note cette limite $\int_a^b f(t) dt$.

Remarque. Pour des fonctions continues sur un intervalle $]a, b[$, avec $a < b$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; il est préférable d'étudier les convergences en a et en b séparément.

Proposition. Intégrales de Riemann

① L'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$ et dans ce cas :

$$\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}$$

② L'intégrale $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$ converge si, et seulement si $\alpha < 1$ et dans ce cas :

$$\int_0^1 t^{-\alpha} dt = \frac{1}{1 - \alpha}$$

Preuve 5.1**Proposition. Intégrales de référence**

① L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente et

$$\int_0^1 \ln(t) dt = -1$$

② L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si, et seulement si $\alpha > 0$ et dans ce cas :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$$

Preuve 5.2**Théorème**

Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$ existe et est finie (autrement dit si on peut prolonger f par continuité en a), alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Exemple 5.5 Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t}{e^t - 1} dt$.

Proposition. Relation de Chasles

Soient $a < c < b$, avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, $c \in \mathbb{R}$, et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$, tels que les intégrales généralisées $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. Alors $\int_a^b f$ converge et on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Exemple 5.6 Etudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$.

Proposition. Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues et telles que les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ sont convergentes, et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors l'intégrale $\int_a^b (\lambda f + g)$ converge et on a :

$$\int_a^b (\lambda f + g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

Proposition. Positivité

Soit f une fonction positive sur $[a, b]$ et telle que l'intégrale $\int_a^b f$ converge. Alors $\int_a^b f(t) dt$ est positive.

Proposition. Croissance

Soient f et g deux fonctions telles que les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent.
 Si, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Théorème. Changement de variable

Soient f une fonction continue sur $]a, b[$ et φ une fonction strictement croissante de classe \mathcal{C}^1 sur $] \alpha, \beta[$ telle que $a = \lim_{u \rightarrow \alpha} \varphi(u)$ et $b = \lim_{u \rightarrow \beta} \varphi(u)$.

Les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature et, si elles convergent, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$$

Remarque. On peut adapter le théorème précédent au cas où φ est strictement décroissante.

Exemple 5.7 Convergence et calcul de l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t} dt$.

Théorème. Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b[$ avec $b > a$ ou $b = +\infty$.

Si $\lim_{t \rightarrow b} u(t)v(t)$ existe et est finie, alors les intégrales $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ et $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ sont de même nature et, si elles convergent, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Remarque. On peut adapter le théorème précédent au cas où l'intégrale est généralisée en a .

Exemple 5.8 Convergence l'intégrale $L = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

5.3 Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 5.4 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} .

Si $\int_a^b f$ est absolument convergente, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Définition 5.5 Soit f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On dit que f est **intégrable** sur I si son intégrale sur I est absolument convergente.

Exemple 5.9 La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $[0, 1]$.

Notation. Si f est intégrable sur I , on note $\int_I f$ ou $\int_I f(t) dt$ l'intégrale de f sur I .

Remarque. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur I » et « l'intégrale $\int_I f$ est absolument convergente ».

Théorème

Soit f une fonction continue et intégrable sur I à valeurs dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} . On a :

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt$$

Corollaire

Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} .

Si f est intégrable sur I , alors $\int_I f(t) dt$ converge.

Remarque. L'intégrabilité d'une fonction sur I est une condition **suffisante** pour que $\int_I f(t) dt$ converge; mais cette condition n'est **pas nécessaire**.

Exemple 5.10 Nous avons démontré que l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente. Montrons que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$: considérons donc $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$.

On pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$; par Chasles on a $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{n \geq 0} u_n$.

Dans u_n , on pose $t = x + n\pi$, alors $dt = dx$ et on a : $u_n = \int_0^\pi \frac{|\sin(x+n\pi)|}{x+n\pi} dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+n\pi} dx$;

$\forall x \in [0, \pi]$, $\frac{1}{x+n\pi} \geq \frac{1}{\pi+n\pi}$, donc, par croissance de l'intégrale, il vient, $u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{(n+1)\pi}$

Nous verrons plus tard que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ est la série harmonique divergente, donc, par comparaison la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge et donc $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge ■

Proposition. Linéarité

Soient f et g deux fonctions intégrables sur I , et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors la fonction $\lambda f + g$ est intégrable sur I .

Remarque. Ce théorème a pour conséquence que l'ensemble des fonctions intégrables sur I est un espace vectoriel.

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$.

Si $f \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g$, alors l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ est équivalent à l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$.

Exemple 5.11 Etudier la convergence des intégrales ① $\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{t})}{t} dt$ et ② $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$.

Si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique à l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$.

Si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique à l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

Remarque. En particulier, ce théorème est valable si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$.

Exemple 5.12 Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

Théorème

Si f une fonction continue et intégrable sur I et telle que $\int_I |f(t)| dt = 0$, alors f est identiquement nulle sur I .

5.4 Travaux dirigés

Exercice 5.1

1. Etudier la convergence des intégrales $\int_1^{+\infty} \ln t \, dt$; $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} \, dt$ et $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)} \, dt$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n} \, dt$. Montrer que I_n converge si et seulement si $n \geq 2$. Calculer I_n , $\forall n \geq 2$.

Exercice 5.2 (d'après CCP)

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ est convergente.
2. On admet que $I = \frac{\pi}{2}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que l'intégrale $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t} \, dt$ est convergente et déterminer sa valeur.
3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \, dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 5.3 Transformée de Laplace

Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} et $p \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\mathcal{L}(f)(p)$ la transformée de Laplace définie par :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} \, dt$$

Montrer que $\mathcal{L}(f)(p)$ est bien convergente.

On suppose de plus que $f(0) = 0$. Montrer que la transformée de Laplace de la fonction $\frac{df}{dt}$ est égale à $p\mathcal{L}(f)(p)$.

Exercice 5.4 Un calcul de l'intégrale de Dirichlet

1. Montrer que la transformée de Laplace de la fonction : $x \mapsto \sin x$ est la fonction : $p \mapsto \frac{1}{1+p^2}$.
2. Démontrer pour tout $p \in]0, +\infty[$, que $\int_0^{+\infty} e^{-px} \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_p^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \, du$.
3. En passant à la limite lorsque p tend vers 0 dans l'égalité précédente, déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

appelée *intégrale de Dirichlet*.

Exercice 5.5 (d'après Centrale-Supelec)

1. Déterminer l'unique solution f du système différentiel :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, & f'(t) - f(t) = e^{-t} (\cos t - 2 \sin t) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

2. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} f(t) \, dt$ est convergente et calculer I .

Exercice 5.6 (d'après CCP)

On considère la fonction f définie sur $[-1, 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\ln(1-t)}{t} & t \in [-1, 0[\cup]0, 1[\\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

On définit alors la fonction *Dilogarithme* sur $[-1, 1[$ par :

$$L(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^x f(t) dt$$

1. Vérifier que L est bien définie et de classe \mathcal{C}^2 sur $[-1, 1[$.
2. Déterminer $L'(x)$, pour tout $x \in [-1, 1[$.
3. Démontrer que l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ est convergente.

(On pourra utiliser le changement de variable $u = 1 - t$.)

Pour la suite de l'exercice, on admet que $-\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt = L(1) = \frac{\pi^2}{6}$.

4. Montrer que $\forall x \in [-1, 1[$, $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$.

(On pourra par exemple dériver les deux membres de l'égalité.)

En déduire la valeur de $L(-1)$ en fonction de π .

5. Démontrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ converge et calculer sa valeur en fonction de π .

(On pourra poser $t = 1 - e^{-x}$)

Exercice 5.7

1. Soient a et b deux réels et f une fonction continue sur \mathbb{R} vérifiant : $f(a + b - x) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calculer $\int_a^b x f(x) dx$ en fonction de $\int_a^b f(x) dx$.

2. *Application.* Calculer $I = \int_0^\pi \frac{x}{1 + \sin x} dx$.

Exercice 5.8

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

1. Déterminer une expression de I_n à l'aide de la formule du binôme.
2. Déterminer une relation de récurrence liant I_n et I_{n-1} et en déduire la valeur de I_n en fonction de n .
3. En déduire, à l'aide de la question 1., une formule sommatoire.

Exercice 5.9

Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on pose $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx$.

1. Justifier l'existence de $I_{n,p}$, $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.
2. Calculer $I_{n,p}$.

Exercice 5.10

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$J = \int_0^1 x (\operatorname{Arctan} x)^2 dx$$

Exercice 5.11 (d'après ESTP 1991)

Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x > 0$, on pose $F_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin^n(t) dt$.

1. Montrer que cette intégrale généralisée converge.
2. Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$.
3. En écrivant $F_n(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin^{n-1}(t) \sin(t) dt$ pour $n \geq 2$ et en utilisant l'intégration par parties, établir la relation :

$$F_n(x) = \frac{n(n-1)}{n^2 + x^2} F_{n-2}(x)$$

En déduire les valeurs de $F_3(x)$ et $F_5(x)$.

4. Pour k et n entiers tels que $1 \leq k \leq n$, on introduit les intégrales

$$I_{n,k} = \int_0^{+\infty} x^{k-1} F_n(x) dx \quad , \quad S_{n,k} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^k} dt$$

On admet la convergence de ces intégrales, ainsi que la validité de l'interversion suivante des signes d'intégration :

$$\int_0^{+\infty} x^{k-1} \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin^n(t) dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \sin^n(t) \left(\int_0^{+\infty} e^{-xt} x^{k-1} dx \right) dt$$

Exprimer $S_{n,k}$ au moyen de $I_{n,k}$. On distinguera les cas $k = 1$ et $k \geq 2$.

5. Calculer l'intégrale de Dirichlet : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
6. Déterminer les réels a, b, c, α, β et γ tels que :

$$\frac{5x^4}{(1+x^2)(9+x^2)(25+x^2)} = \frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{9+x^2} + \frac{c}{25+x^2} \quad \text{et} \quad \frac{20x^3}{(1+x^2)(9+x^2)(25+x^2)} = \frac{\alpha x}{1+x^2} + \frac{\beta x}{9+x^2} + \frac{\gamma x}{25+x^2}$$

En déduire les rationnels A, B et C tels que $S_{5,5} = A\pi$ et $S_{5,4} = B \ln(3) + C \ln(5)$.

Ce chapitre a pour objectif d'introduire les notions fondamentales liées à la structure **préhilbertienne** d'un espace vectoriel.

Cette structure tient donc son nom du mathématicien allemand David HILBERT, professeur à l'université de Königsberg, puis de Göttingen de 1895 à 1930. En 1900, au congrès de Paris, HILBERT présente 23 problèmes : ce sont, selon lui, des pistes de recherche qui doivent guider les mathématiques pour le siècle qui s'ouvre. Ce programme s'avèrera très fécond et il est encore de nos jours à l'origine de nombreuses recherches.

Si, à la structure préhilbertienne d'un espace vectoriel, on ajoute la notion de complétude, alors on parle d'**espace de Hilbert** ou **espace hilbertien**, dans lequel on peut appliquer les techniques d'analyse. Ces espaces sont des outils indispensables dans les théories des *équations aux dérivées partielles*, de la *mécanique quantique*, de l'*analyse de Fourier* et la *théorie ergodique* (introduite par le physicien Ludwig BOLTZMANN en 1871) qui forme le fondement mathématique de la *thermodynamique*.

6.1 Produit scalaire et norme

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Définition 6.1 Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est un **produit scalaire** sur E si φ est bilinéaire, symétrique, positive et définie-positive. Plus précisément si :

- ① φ est **bilinéaire**, soit si :
 - ★ l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire pour tout y de E ;
 - ★ l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire pour tout x de E ;
- ② φ est **symétrique**, soit si : $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$, $\forall (x, y) \in E^2$;
- ③ φ est **positive**, soit si : $\varphi(x, x) \geq 0$, $\forall x \in E$;
- ④ φ est **définie-positive**, soit si : $\varphi(x, x) = 0$, $\Leftrightarrow x = 0$.

Notations. Pour $(x, y) \in E^2$, le produit scalaire est usuellement noté $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$ ou $x \cdot y$.

Exemple 6.1 Si $E = \mathbb{R}^n$, on définit le produit scalaire canonique de la manière suivante :

$$\text{soit } u = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } v = (y_1, \dots, y_n), \text{ alors } \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Dans \mathbb{R}^3 , on considère $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 1, -2)$, $w = (1, 2, 3)$; calculer $\langle u, v \rangle$, $\langle u, w \rangle$, $\langle w, v \rangle$.

Exemple 6.2 Si $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$; on peut définir un produit scalaire en posant $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Définition 6.2 Un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien réel**.
Un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé **espace euclidien**.

Théorème. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E , alors

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$$

avec égalité si, et seulement si (x, y) est une famille liée.

Preuve 6.1

Exemple 6.3 Majorer $\int_0^1 \sqrt{t} e^t dt$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Comparer avec la majoration obtenue avec l'inégalité de la moyenne.

Définition 6.3 On appelle **norme** sur E , une application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- ① **positivité** : $\forall u \in E, \|u\| \geq 0$;
- ② **inégalité triangulaire** : $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$;
- ③ **positive homogénéité** : $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$;
- ④ **séparation** : $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Théorème et définition

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E , alors $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ est une norme sur E appelée **norme associée au produit scalaire**

Preuve 6.2

Exemple 6.4 Dans \mathbb{R}^3 , on considère $u = (1, 1, 1)$, $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$, $w = (1, 2, 3)$; calculer $\|u\|$, $\|v\|$, $\|w\|$.

Exemple 6.5 Si $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$; la norme issue du produit scalaire peut être définie par : $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt}$. Calculer $\|\exp\|$ et $\|\ln\|$.

Définition 6.4 Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E de norme associée $\| \cdot \|$. On appelle **distance associée au produit scalaire** l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$

Exemple 6.6 $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$; on note $f : t \mapsto e^t$ et $g : t \mapsto 1 + t$, le développement limité d'ordre 1 de f au voisinage de 0. Calculer $d(f, g)$.

Théorème d'Al-Kashi

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E de norme associée $\| \cdot \|$. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$ on a :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Corollaire. Identité du parallélogramme

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E de norme associée $\| \cdot \|$. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$ on a :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Corollaire. Identité de polarisation

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E de norme associée $\| \cdot \|$. Alors, pour tout $(x, y) \in E^2$ on a :

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$

Remarque. Un espace vectoriel muni d'une norme est un espace préhilbertien si, et seulement si la norme vérifie l'identité du parallélogramme.

Dans ce cas, le produit scalaire est défini par l'identité de polarisation : $\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$.

Il s'agit du théorème de Fréchet-Von Neumann-Jordan, qui est hors programme.

6.2 Orthogonalité

Définition 6.5 Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E . Deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$.

Exemple 6.7 $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$; on note $f : t \mapsto \cos(n\pi t)$ et $g : t \mapsto \sin(n\pi t)$, où $n \in \mathbb{N}^*$; montrer que f et g sont orthogonaux.

Théorème de Pythagore

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E de norme associée $\| \cdot \|$.

$$\langle x, y \rangle = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Définition 6.6 Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E ; F et G sont des **sous-espaces orthogonaux** si :

$$\forall u \in F, \forall v \in G, \langle u, v \rangle = 0$$

Soient F un sous-espace vectoriel de E ; on appelle **orthogonal de F** , noté F^\perp , l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à F , autrement dit :

$$F^\perp = \{u \in E, \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in F\}$$

Exemple 6.8 $E = \mathbb{R}^n$; on note $u = (1, \dots, 1)$ et $F = \text{Vect}(u)$. Déterminer F^\perp .

Théorème

Un vecteur est orthogonal à un sous-espace vectoriel F de dimension finie si, et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F .

Preuve 6.3

Exemple 6.9 $E = \mathbb{R}^3$; on note $F = \{u = (x, y, z), x + y + z = 0\}$. Montrer que $v = (1, 1, 1)$ est orthogonal à F .

Définition 6.7 Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur E .

① Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est **orthogonale** si : $\forall i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = 0$.

② Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est **orthonormée** ou **orthonormale** si : $\begin{cases} \forall i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = 0 \\ \forall i \in I, \|u_i\| = 1 \end{cases}$.

Exemple 6.10 La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille orthonormée de \mathbb{R}^3 .

Théorème

Toute famille orthogonale ou orthonormale de vecteurs non nuls est libre.

Preuve 6.4

Théorème. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une famille libre d'un espace préhilbertien E . Alors il existe une famille orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ telle que $\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

Exemple 6.11 $E = \mathbb{R}_2[X]$; on définit le produit scalaire : $\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

Construire une base orthonormée de E à partir de la base canonique.

Corollaire

Tout espace vectoriel euclidien ou tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien possède une base orthonormée.

Théorème. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Soit $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}}$ un vecteur de E . Alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_i = \langle u, e_i \rangle$$

Exemple 6.12 $E = \mathbb{R}_2[X]$; une base orthonormée est $\mathcal{B}_0 = (1, \sqrt{3}(2X - 1), \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1))$.
Donner les coordonnées de $P = X^2$ dans \mathcal{B}_0 .

Théorème

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Soient $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)_{\mathcal{B}}$ et $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)_{\mathcal{B}}$ deux vecteurs de E . Alors :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad \text{et} \quad \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

Exemple 6.13 On reprend $E = \mathbb{R}_2[X]$ de base canonique $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$
et base orthonormée est $\mathcal{B}_0 = (1, \sqrt{3}(2X - 1), \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1))$. Calculer la norme de $P = X^2$.

Remarque. Dans un espace euclidien, si les coordonnées sont exprimées dans une base orthonormée, alors le produit scalaire et la norme sont le **produit scalaire euclidien canonique** et la **norme euclidienne canonique**.

6.3 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Définition 6.8 Soit F est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien E .

On appelle **projection orthogonale sur F** la projection sur F parallèlement à F^\perp .

Théorème

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ d'un espace préhilbertien E . Soit $x \in E$, alors le projeté orthogonal de x sur F est donné par :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i$$

Théorème

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et F^\perp sont supplémentaires.

Preuve 6.5

Corollaire

Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien, alors $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

Théorème

Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E . Soit $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F l'unique élément de F qui minimise $\|x - y\|$ avec $y \in F$.

Définition 6.9 Soit F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E .

Soit $x \in E$, on appelle **distance de x à F** le réel :

$$d(x, F) = \min_{y \in F} (\|x - y\|) = \|x - p_F(x)\|$$

6.4 Travaux dirigés

Exercice 6.1

On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application définie sur $E \times E$ par $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur E .
2. En déduire que : $\forall (a_{ij})_{(i,j) \in [1,n]^2}, \left| \sum_{i=1}^n a_{ii} \right| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$
3. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de E des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux.
4. Déterminer le projeté orthogonal d'une matrice A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.2

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour tout $(P, Q) \in E^2$, on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Montrer que \langle , \rangle est un produit scalaire sur E .
2. Trouver un polynôme de degré 1 orthogonal à $X^2 + X + 1$.
3. Déterminer une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$.
4. Déterminer $p_F(X^3)$, où $p_F(X^3)$ désigne le projecteur orthogonal sur F .

Exercice 6.3

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer $\left| \int_0^1 \ln t e^t dt \right|$.

Exercice 6.4

On note $E = \mathcal{C}([-a, a], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur $[-a, a]$, où $a \in \mathbb{R}$ et, pour f et g de E , on pose :

$$\langle f | g \rangle = \int_{-a}^a f g$$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Montrer que le sous-espace vectoriel des fonctions paires de E et le sous-espace des fonctions impaires de E sont des supplémentaires orthogonaux.

Exercice 6.5

1. Montrer que l'ensemble des solutions du système : $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ est un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^4 de dimension 2.
2. Construire une base orthonormale (u_1, u_2) de F .
3. Donner la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de \mathbb{R}^4 de la projection orthogonale sur F ; puis celle de la symétrie orthogonale par rapport à F .
4. Soit $X = (1, 1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$; calculer $d(X, F)$.

Exercice 6.6

On se place dans $E = \mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire standard : $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(t)g(t) dt$.

1. Soit $F = \text{Vect}(t \mapsto \cos t, t \mapsto \sin t)$. Déterminer une base orthonormale de F .

2. Déterminer alors $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (t - a \cos t - b \sin t)^2 dt$.

Exercice 6.7 (*D'après Centrale-Supelec*)

$$E = \mathbb{R}[X].$$

1. Soit n un entier positif ou nul. Montrer que lorsque $t \rightarrow +\infty$, $t^n e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

En déduire que l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

2. Calculer I_n pour $n = 0, 1, \dots, 8$.

3. On considère l'application φ définie sur $E \times E$ par $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$, où P et Q sont deux éléments de E .

Montrer que pour tous polynômes P et Q cette intégrale est bien convergente.

Montrer que φ est un produit scalaire.

On suppose désormais que E est muni de ce produit scalaire et on pose $\varphi(P, Q) = \langle P, Q \rangle$.

4. On considère $F = \text{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ avec $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2$.

Construire une base orthonormale de F pour le produit scalaire défini précédemment à partir de la famille (P_0, P_1, P_2) .

5. Déterminer la projection orthogonale du polynôme P_3 défini par $P_3(X) = X^3$ sur F .

6. Déterminer pour quelles valeurs de a, b, c , l'expression $\int_0^{+\infty} e^{-t} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 dt$ est minimale.

Dans tout le chapitre E désigne un espace vectoriel euclidien, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de norme associée $\| \cdot \|$.

7.1 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Définition 7.1 Un endomorphisme f d'un espace euclidien est une **isométrie vectorielle** s'il conserve la norme :

$$\forall u \in E, \quad \|f(u)\| = \|u\|$$

Théorème

Un endomorphisme f de E est une isométrie vectorielle si, et seulement s'il conserve le produit scalaire :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Preuve 7.1

Définition 7.2 Un endomorphisme qui conserve le produit scalaire est appelé **endomorphisme orthogonal**

Exemple 7.1 ① Quel que soit l'espace euclidien E , Id_E et $-\text{Id}_E$ sont des endomorphismes orthogonaux.

② On pose $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

On considère $\varphi : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ f & \mapsto & \varphi(f) \end{matrix}$, où $\varphi(f)$ est définie par $\varphi(f(t)) = f(1-t)$.

Montrer que φ est un endomorphisme orthogonal.

Remarques. Il est donc équivalent de dire qu'un endomorphisme est orthogonal et que cet endomorphisme est une isométrie vectorielle.

Soit f un endomorphisme orthogonal; alors les seules valeurs propres de f sont -1 ou 1 .

Preuve 7.2

Théorème

Un endomorphisme orthogonal est bijectif; donc est un automorphisme.

Preuve 7.3

Théorème

Soit f un endomorphisme de E .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- ① f est une isométrie vectorielle de E , ou un endomorphisme orthogonal de E ;
- ② l'image par f d'une base orthonormée de E est une base orthonormée de E ;
- ③ l'image par f de toute base orthonormée de E est une base orthonormée de E .

Preuve 7.4

Définition 7.3 Soit F un sous-espace vectoriel de E , on note F^\perp l'orthogonal de F . On rappelle que $E = F \oplus F^\perp$.

On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à F , la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à F^\perp .

On appelle **réflexion** une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Exemple 7.2 Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire : $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$.

On pose F l'espace vectoriel des matrices symétriques, alors F^\perp est l'ensemble des matrices antisymétriques. Déterminer la symétrie orthogonale s par rapport à F .

Théorème

L'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E muni de la composition des applications est un groupe, noté $O(E)$ et appelé **groupe orthogonal**

Remarque. Un ensemble est un groupe si :

- ① il contient l'élément neutre;
- ② il est stable par composition;
- ③ tout élément de cet ensemble est inversible.

Théorème

Si F est un sous-espace stable par une isométrie vectorielle, alors son orthogonal est également stable par cette isométrie.

7.2 Matrices orthogonales

Définition 7.4 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **orthogonale** si : $A^T A = I_n$.

L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, noté $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$, et est appelé **groupe orthogonal d'ordre n**

Exemple 7.3 Soit $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; montrer que A est orthogonale.

Théorème

Une matrice est orthogonale si et seulement si les vecteurs colonnes de la matrice forment une base orthonormée, ou, si et seulement si les vecteurs lignes forment une base orthonormée.

Exemple 7.4 Sans calcul, en appliquant le résultat précédent, on voit que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonale.

Remarques.  Une matrice construite avec une base *orthonormale* est une matrice *orthogonale*.
Si une matrice est orthogonale, alors sa transposée l'est aussi.

Corollaire

Soit \mathcal{B}_0 une base orthonormale de E . Une base \mathcal{B} de E est orthonormale si, et seulement si la matrice de passage de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B} est orthogonale.

Corollaire

Soit \mathcal{B}_0 une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E . Alors u est une isométrie vectorielle si, et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ est orthogonale.

Exemple 7.5 Soit l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 , $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$. Montrer que f est une isométrie vectorielle.

Corollaire

Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à -1 ou 1 . De même, le déterminant d'une isométrie vectorielle est égal à -1 ou 1 .

Définition 7.5 Une isométrie de déterminant égal à 1 est appelée **isométrie vectorielle positive (directe)**; une isométrie de déterminant égal à -1 est appelée **isométrie vectorielle négative (indirecte)**.

L'ensemble des isométries vectorielles positives est noté $\text{SO}(E)$, et est appelé **groupe spécial orthogonal**.

De même, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant égal à 1 est noté $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\text{SO}(n)$.

Définition 7.6 Une base orthonormale de E de déterminant égal à 1 est appelée **base orthonormale directe**.

Cette base donne une **orientation** de l'espace E . On dit alors que l'espace euclidien E est **orienté**.

Exemple 7.6 • $\det(A) = \frac{1}{27} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}(1-8-8-4-4-4) = -1$; donc l'endomorphisme canoniquement associé à A est une isométrie indirecte.

• $\det(f) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$; donc f est une isométrie directe.

7.3 Classification en dimension 2 ou 3

7.3.1 Classification des isométries en dimension 2

Théorème

Soit f une isométrie vectorielle de \mathbb{R}^2 . Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de f dans toute base orthonormée (e_1, e_2) soit de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$R(\theta)$ est la matrice de la rotation vectorielle de centre O et d'angle θ ; $S(\theta)$ est la matrice de la symétrie orthogonale (réflexion) par rapport à $\Delta = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ et telle que $(\overline{e_1}, \Delta) = \frac{\theta}{2}$.

Preuve 7.5

Exemple 7.7 Reconnaître l'endomorphisme associé à $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

Remarque. La rotation d'angle 0 (identité) admet la valeur propre double égale à 1 ; la rotation d'angle π admet la valeur propre double égale à -1 ; dans les autres cas, la rotation n'admet pas de valeur propre réelle.

La symétrie orthogonale admet deux valeurs propres simples égales à 1 et à -1 . Elle est donc diagonalisable.

Preuve 7.6

7.3.2 Classification des isométries en dimension 3

Théorème

Soit u une isométrie vectorielle de \mathbb{R}^3 . Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que la matrice de u dans une base orthonormée soit de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad SR(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$R(\theta)$ est la matrice de la rotation vectorielle d'axe $\text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et d'angle θ ; $SR(\theta)$ est la matrice de la composée d'une rotation d'angle θ et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan (réflexion).

Méthode. Pour déterminer la nature d'une isométrie vectorielle f en dimension 3 à partir de sa matrice :

- ① on vérifie que la matrice est orthogonale;
- ② on calcule le déterminant :
 - ★ s'il est égal à 1 : il s'agit d'une rotation;
 - l'axe de la rotation est donné par $\text{Ker}(f - \text{id}_E) = \text{Vect}(u)$, où u est de norme 1;
 - $\cos\theta$ est obtenue à partir de la trace de la matrice égale à $1 + 2\cos\theta$;
 - $\sin\theta$ est donné par $\det(u, v, f(v))$, où v est un vecteur de norme 1 et orthogonal à u .
 - ★ s'il est égal à -1 : il s'agit de la composée d'une rotation et d'une réflexion;
 - l'axe de la rotation est donné par $\text{Ker}(f + \text{id}_E) = \text{Vect}(u)$, où u est de norme 1;
 - $\cos\theta$ est obtenue à partir de la trace de la matrice égale à $-1 + 2\cos\theta$;
 - $\sin\theta$ est donné par $\det(u, v, f(v))$, où v est un vecteur de norme 1 et orthogonal à u .

Exemple 7.8 Reconnaître les endomorphismes associés à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

7.4 Matrices symétriques réelles

Définition 7.7 Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle si : $A^T = A$.

Théorème

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Théorème spectral

Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Autrement dit, pour toute matrice symétrique réelle A , il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que

$$D = P^{-1}AP = P^TAP$$

Exemple 7.9 Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

7.5 Travaux dirigés

Exercice 7.1

On note $E = \mathcal{C}([-a, a], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues sur $[-a, a]$, où $a \in \mathbb{R}$ et, pour f et g de E , on pose :

$$\langle f | g \rangle = \int_{-a}^a f g$$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
2. Montrer que le sous-espace vectoriel F des fonctions paires de E et le sous-espace vectoriel G des fonctions impaires de E sont des supplémentaires orthogonaux.
3. Déterminer la symétrie orthogonale par rapport à F .

Exercice 7.2 D'après CCP

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on note $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire et \wedge le produit vectoriel. Soit \vec{u} un vecteur unitaire (c'est-à-dire de norme 1) de \mathbb{R}^3 et f l'application définie par :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, f(\vec{x}) = \frac{1}{2} (\vec{x} + (\vec{x} | \vec{u}) \vec{u} + \sqrt{3} \vec{u} \wedge \vec{x})$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .
2. Expliquer comment compléter \vec{u} en $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 .
3. Préciser la matrice de f dans la base \mathcal{B} . Reconnaître alors f .
4. On suppose désormais que $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Préciser la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice 7.3

Soit E l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 , orienté et muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

1. Former une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ telle que v et w appartiennent au plan vectoriel P d'équation : $x + z = 0$.
2. Former la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .
3. Reconnaître alors f .

Exercice 7.4

Pour chaque matrice, déterminer les éléments caractéristiques de l'endomorphisme u de \mathbb{R}^3 canoniquement associé :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \quad C = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.5

Dans cet exercice on considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique et de la base canonique, orthonormée directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les trois questions sont indépendantes.

1. Déterminer la matrice A dans la base canonique de la rotation r d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de l'axe dirigé et orienté

$$\text{par } a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer la matrice B dans la base canonique de la réflexion s par rapport au plan d'équation

$$x + y + z = 0$$

3. Déterminer les éléments caractéristiques de la rotation r telle que

$$r(\vec{i} + \vec{j}) = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \text{ et } r(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

Exercice 7.6

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Pour quels a, b de \mathbb{R} , a-t-on $A \in O(\mathbb{R})$?
2. Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme associé.

Exercice 7.7 *D'après Centrale-Supelec*

Soient a, b et c trois réels et M la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

1. Développer $(X - a)(X - b)(X - c)$.
2. Prouver que M est la matrice d'une rotation si, et seulement si, a, b et c sont les trois racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + k$, avec $k \in \left[0, \frac{4}{27}\right]$

L'utilisation de sommes infinies apparaît dès l'Antiquité avec ARCHIMÈDE pour des calculs d'aires et de volumes.

Une manipulation rigoureuse du concept de **série** est étroitement liée à la notion de *limite*. Une absence de définition précise conduira à deux nombreuses interrogations, à l'exemple des paradoxes de ZENON.

Il faut attendre le XVII^e siècle, pour voir se développer l'étude des séries en lien avec le développement du *calcul différentiel et intégral*. En 1715, Brook TAYLOR, en donnant la construction des séries qui portent son nom, renforce ce lien, sans toutefois se préoccuper de la convergence. Quelques années plus tard, l'importance de ce développement est mis en valeur par Joseph LAGRANGE qui développe une théorie générale des **séries entières**, qui s'apparente à ce qu'on appelle aujourd'hui les *développement limités*.

Enfin, au début du XIX^e siècle, soucieux de rigueur, Louis-Augustin CAUCHY, établit une définition précise de la notion de limite et de convergence d'une série.

8.1 Généralités

8.1.1 Convergence d'une série numérique

Définition 8.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

Soit $N \in \mathbb{N}$, on appelle **somme partielle d'ordre N** la somme : $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$.

On appelle alors **série de terme général u_n** et on note $\sum u_n$ la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles.

Si la suite des sommes partielles admet une limite finie, alors on dit que la **série converge** ; cette limite s'appelle alors la **somme de la série** que l'on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a donc, lorsque la limite existe est finie :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N u_n$$

Le **reste d'ordre N** est alors défini par : $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$, et on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_N + R_N$.

Si la suite des sommes partielles n'admet pas de limite ou une limite infinie, alors on dit que la **série diverge**.

Remarques

- ① La série $\sum u_n$ est une suite ; donc peut converger ou non. En particulier, on peut parler de la série, même en cas de divergence.

La somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est la limite, si elle existe, de la série. $\triangle!$ On ne peut donc pas manipuler la somme d'une série en cas de divergence.

- ② Si la suite de nombre (u_n) est définie à partir de n_0 , la série s'écrit $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et, en cas de convergence, la somme de cette série s'écrit $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Théorème. Condition nécessaire de convergence
 Le terme général d'une série convergente tend vers 0.
 Si le terme général ne tend pas vers 0, alors la série **diverge grossièrement**.

Preuve 8.1

Remarque $\triangle!$ Pour qu'une série $\sum u_n$ converge, il est donc *nécessaire* que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$; mais cette condition *n'est pas suffisante*.

Exemple 8.1 • La série $\sum (-1)^n$ diverge grossièrement.

• La série harmonique est la série de terme général $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. Le terme général de cette série tend vers 0, mais nous verrons dans l'exemple 8 que cette série diverge.

8.1.2 Calcul de la somme d'une série

Définition 8.2 Soit $q \neq 1$, un réel ou un complexe. On appelle **série géométrique** la série $\sum q^n$.

Théorème. Série géométrique

① La somme partielle d'une série géométrique est : $\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$.

② La série géométrique converge $\iff |q| < 1$, et dans ce cas la somme de la série est $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$.

Exemple 8.2 Calculer $\sum q^n$ dans le cas où $q = \frac{1}{2}$, puis dans le cas où $q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Remarque. Imaginons un nombre N constitué d'une infinité de chiffres tous égaux à 9.

On pourrait écrire $N = \dots 999\ 999\ 999$. Imaginez alors le résultat de l'opération $N + 1$.

Ce nombre pourrait aussi s'écrire $N = 9 + 90 + 900 + 9000 + \dots = 9 \times \sum_{n=0}^{+\infty} 10^n$; comme $10 > 1$, la série géométrique est divergente; et pourtant...

si on applique le résultat du théorème, on aurait $N = 9 \times \frac{1}{1 - 10} = -1$, ce qui est cohérent avec le résultat de l'addition $N + 1$ ✓

Théorème. Télescopage

Soit (u_n) une suite de nombre réels ou complexes; alors $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^N (u_{n+1} - u_n) = u_{N+1} - u_0$$

Théorème

Une suite (u_n) est une suite convergente si, et seulement si la série des différences $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est une série convergente.

Preuve 8.2

Exemple 8.3 Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

8.1.3 Linéarité des séries convergentes

Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}).

- ① La série $\sum (u_n + v_n)$ est convergente de somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- ② La série $\sum \lambda u_n$ est convergente de somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

8.2 Séries à termes positifs

Définition 8.3 on dit qu'une série $\sum u_n$ est une **série à termes positifs** si $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème

Une série à termes positifs converge si, et seulement si la suite des ses sommes partielles est majorée.

Preuve 8.3

Théorème. Critères de comparaison

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ou telles que $u_n = o(v_n)$.

- ① Si $\sum v_n$ est une série convergente, alors $\sum u_n$ est également convergente et, dans le cas où $u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- ② Si $\sum u_n$ est une série divergente, alors $\sum v_n$ est également une série divergente.

Exemple 8.4 Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$.

Théorème. Critère d'équivalence

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, telles que $u_n \sim v_n$.

Alors, la convergence de la série $\sum u_n$ est équivalente à la convergence de la série $\sum v_n$.

On dit que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple 8.5 Etudier la convergence des séries $\sum \frac{1}{2^n + n}$ et $\sum \frac{1}{n+1}$.

Remarque.  Le critère d'équivalence n'est valable que pour des séries à termes positifs. Il est possible de créer deux suites (u_n) et (v_n) équivalentes telles que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

Théorème. Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs non nuls telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}$.

- ① Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- ② Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- ③ Si $\ell = 1$, alors on ne peut pas conclure.

Exemple 8.6 Etudier la convergence des séries $\sum \frac{1}{2^n}$; $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{n!}{n^n}$.

Remarque. La règle de d'Alembert est aussi appelée **règle comparaison à une série géométrique**.

Théorème. Comparaison séries-intégrales

Soit $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive et décroissante.

Alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ sont de la même nature. De plus :

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(t) dt \leq R_N \leq \int_N^{+\infty} f(t) dt$$

On rappelle que $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n)$; cet encadrement peut s'illustrer comme suit :



Exemple 8.7 ① Etudier la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

② Donner un encadrement du reste d'ordre N de la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Corollaire. Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$

Exemple 8.8 Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

8.3 Séries absolument convergentes

Définition 8.4 Une série $\sum u_n$ à termes réels ou complexes est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème

① Toute série absolument convergente est convergente. Dans ce cas, on a :

② **Inégalité triangulaire** : $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Exemple 8.9 Etudier la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

8.4 Séries alternées

Une série $\sum u_n$ de nombres réels est une **série alternée** si u_{n+1} est de signe opposé à u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 8.10 La série $\sum \frac{\cos(n\pi)}{n}$ est une série alternée.

Théorème. Critère des séries alternées

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs et décroissant vers 0. Alors :

- ① la série alternée $\sum (-1)^n u_n$ est convergente ;
- ② R_N est du signe de u_{N+1} et $|R_N| \leq |u_{N+1}|$.

Preuve 8.4

Exemple 8.11 Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

8.5 Travaux dirigés

Exercice 8.1

Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries dont le terme général est :

$$a_n = \frac{1}{5^n} \quad ; \quad b_n = \frac{1}{2n+1} \quad ; \quad c_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad ; \quad d_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$$

$$e_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \geq 2 \quad ; \quad f_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\frac{1}{n} \cos\frac{1}{n+1}}, \quad n \geq 1 \quad ; \quad g_n = \frac{n+1}{n!}$$

Exercice 8.2

1. On considère la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.

(a) Etudier les variations de la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

(b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$.

2. Désormais, on considère la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

(a) Etudier les variations de la fonction $g : t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$ sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

(b) Calculer $\int_2^n \frac{\ln t}{t^2} dt$.

(c) En déduire que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge. On note alors S la somme de cette série et R_N le reste d'ordre N .

(d) Démontrer que $\frac{1 + \ln(N+1)}{N+1} \leq R_N \leq \frac{1 + \ln N}{N}$.

(e) En déduire une valeur de N_0 telle que la somme partielle S_{N_0} donne une valeur approchée de S à 10^{-6} près.

Exercice 8.3

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 8.4

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \left(\sin \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \quad ; \quad \sum \frac{2^n n!}{n^n} \quad ; \quad \sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

Exercice 8.5

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

1. Déterminer la nature de la série de terme général $a_n = u_n - u_{n-1}$, pour $n \geq 2$.

2. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge. Sa limite est la **constante d'Euler**, notée γ .

9.1 Convergence d'une série entière

Définition 9.1 On appelle **série entière** de la variable réelle ou complexe z , une série de terme général $a_n z^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels ou de complexes. Une série entière est donc une série de fonctions définie par :

$$S(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

Exemple 9.1 $\sum z^n$ est une série entière avec $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$; on reconnaît une série géométrique, donc elle converge pour tout z vérifiant $|z| < 1$ et dans ce cas vaut $\frac{1}{1-z}$.
 $\sum n z^n$ est également une série entière avec $a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$, dont ne sait pas étudier la convergence, ni calculer la valeur pour le moment.

Théorème. Lemme d'Abel

Soit un réel $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, alors, pour tout complexe z tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve 9.1

Définition 9.2 On appelle **rayon de convergence** d'une série entière, la borne supérieure de l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Si on note R le rayon de convergence, on a :

$$R = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n) \text{ est bornée} \}$$

$R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$; un rayon de convergence peut éventuellement être nul, ou infini.

Exemple 9.2 Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Théorème. Conséquence du lemme d'Abel

Si le rayon R d'une série entière $\sum a_n z^n$ est strictement positif, alors :

- ① Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- ② Pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente

Remarque. Ce théorème permet de redéfinir le rayon de convergence R d'une série entière :

$$R = \sup \{ |z|, \text{ pour } z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ converge absolument} \}$$

Exemple 9.3 D'après ce théorème, on en déduit que la série $\sum z^n$ a un rayon de convergence égal à 1. Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum nz^n$; $\sum 3\frac{z^n}{2^n}$ et $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Définition 9.3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^*$.

- On appelle **disque ouvert de convergence** dans \mathbb{C} , le disque ouvert de centre O et de rayon R :

$$\{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$$
- On appelle **intervalle ouvert de convergence** dans \mathbb{R} , l'intervalle $] - R, R[= \{x \in \mathbb{R}, |x| < R\}$.

Remarques. ① Si $R = +\infty$ le disque ouvert de convergence est le plan complexe tout entier et l'intervalle ouvert de convergence est \mathbb{R} tout entier.

② La série entière réelle $\sum \frac{x^n}{n}$ admet comme rayon de convergence $R = 1$; donc l'intervalle ouvert de convergence est $] - 1, 1[$. Que se passe-t-il aux bords? Pour $x = 1$, on sait que la série $\sum \frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente, mais pour $x = -1$; on a montré que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. En général on ne peut rien dire de la convergence de la série aux bords du domaine ouvert de convergence.

Théorème.
 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels ou de complexes telles que $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors les rayons de convergence R_a et R_b des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifient : $R_a \geq R_b$.

Preuve 9.2

Exemple 9.4 Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} \ln(n) z^n$.

Théorème.
 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de réels ou de complexes telles que $|a_n| \sim |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont égaux.

Preuve 9.3

Exemple 9.5 Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 1} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) z^n$.

Théorème.
 Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exemple 9.6 On retrouve ainsi, le fait que la série $\sum nz^n$ a un rayon égal à 1.

9.2 Somme d'une série entière d'une variable réelle.

Définition 9.4 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$.

On définit la **fonction somme** de la série entière par :

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exemple 9.7 On considère la série $\sum 3\frac{x^n}{2^n}$; on a vu que $R = 2$; on peut donc définir la fonction somme f sur $] - 2, 2[$.

Pour $x \in] - 2, 2[$, on a donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 3 \frac{x^n}{2^n} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = 3 \times \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{6}{2 - x}$.

Remarque. Dans certaines situations, il ne sera pas possible d'exprimer la fonction somme à l'aide des fonctions usuelles.

Théorème.

La fonction somme d'une série entière est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

Théorème. Dérivation terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors la fonction somme f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$ et, pour tout $x \in] -R, R[$ on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Exemple 9.8 Définir et exprimer la somme de la série entière $\sum n x^n$.

Théorème. Intégration terme à terme

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$. Alors la fonction somme f est continue sur $] -R, R[$ et la primitive de f qui s'annule en 0 est donnée, pour tout $x \in] -R, R[$, par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Exemple 9.9 Définir et exprimer la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$.

Remarque. Les fonctions dérivées et primitives d'une fonction somme d'une série entière ont le même rayon de convergence que la série entière.

9.3 Fonctions développables en série entière

Définition 9.5 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de 0. On dit que f est **développable en série entière au voisinage de 0** (DSE) s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \forall x \in] -R, R[$$

Théorème

Soit f une fonction développable en série entière au voisinage de 0. Alors f est de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0 et les coefficients a_n sont donnés par la série de Taylor :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Exemple 9.10 On considère la fonction définie par $f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$. On ne peut pas exprimer f à l'aide de fonctions usuelles par les techniques classiques, mais nous allons essayer de montrer que f est développable en série entière. Pour cela, nous allons montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.

Remarques.

① Ce théorème démontre que si le développement en série entière existe, alors celui-ci est unique.

②  Si une fonction est développable en série entière, alors elle est de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0 ; mais la réciproque est fautive. Il existe des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0 dont le développement en série entière a un rayon nul.

Il existe également des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} dont la série de Taylor admet sur \mathbb{R} une somme différente de f .

En 1823, comme exemple de ce cas de figure, CAUCHY propose la fonction :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{1}{x^2}) = -\infty$; on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, et on en déduit que f est continue en 0.

De plus, f est dérivable sur \mathbb{R}^* , comme composée de telles fonctions, et $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Par prépondérance, on démontre que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$, et, par le théorème de la limite de la dérivée, on prouve que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que $f'(0) = 0$.

De même, par récurrence, on démontre que f est de classe \mathcal{C}^∞ et que $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$.

La fonction f est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , de série de Taylor nulle, et est donc différente de sa série de Taylor pour tout $x \neq 0$.

Développements en série entière usuels				
Fonction f	\mathcal{D}_f	DSE	Rayon	Intervalle de validité
$\frac{1}{1-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1+x)$	$] -1, +\infty[$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$	1	$] -1, 1[$
e^x	\mathbb{R}	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	∞	\mathbb{R}
$\cos(x)$	\mathbb{R}	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots$	∞	\mathbb{R}
$\sin(x)$	\mathbb{R}	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	∞	\mathbb{R}
$(1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$] -1, +\infty[$	$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	1	$] -1, 1[$

Exemple 9.11 Donner le rayon de convergence et reconnaître la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$.

9.4 Exponentielle complexe

Définition 9.6 Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. L'exponentielle du complexe z est défini par :

$$\exp(z) = e^z = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Théorème

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

9.5 Travaux dirigés

Exercice 9.1

On considère une série entière $\sum a_n z^n$. On sait qu'elle converge pour $z = 5i$ et qu'elle diverge pour $z = 4 + 3i$. Que peut-on dire de son rayon de convergence?

Exercice 9.2

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \quad ; \quad \sum \frac{\sqrt{n} \ln(n)}{n^2 + 1} x^n \quad ; \quad \sum \frac{n^n}{n!} x^n$$

Exercice 9.3

Donner le développement en série entière et le rayon de convergence des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{2-x}\right) \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{-x^2 + x + 2} \quad ; \quad h(x) = \cos^4 x$$

Exercice 9.4

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série de terme général :

$$a_n = \frac{n}{n!} \quad ; \quad b_n = n^2 + 3n + 1 \quad ; \quad c_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 3n + 2}$$

Exercice 9.5

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \text{Tr}(A^n)$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 9.6 (D'après CCP)

- Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, puis de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$.
- On pose $\forall n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{n(n-1)}$. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$.
- Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$. Exprimer $f(x)$ à l'aide des fonctions usuelles et montrer que f est prolongeable par continuité en $-R$ et en R .
- Justifier la convergence, puis calculer la somme des séries $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

Exercice 9.7

Montrer que la fonction $f : x \mapsto (\text{Arcsin } x)^2$ est solution d'un problème de Cauchy à déterminer. En déduire que f est développable en série entière autour de 0.

Exercice 9.8 (D'après CCP)

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et en préciser le rayon de convergence. En déduire que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

2. Calculer la valeur exacte de $\text{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. En déduire que : $\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$.

3. Pour tout entier naturel n , on note $S_n = 2\sqrt{3} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}$

(a) Montrer que $|S_n - \pi| \leq \frac{2\sqrt{3}}{(2n+3)3^{n+1}}$.

(b) Programmer une fonction `rang(p)` d'argument un entier p et qui retourne le plus petit entier N tel que tel que $\frac{2\sqrt{3}}{(2N+3)3^{N+1}} \leq 10^{-p}$.

Quel est alors le plus petit entier naturel N tel que $\frac{2\sqrt{3}}{(2N+3)3^{N+1}} \leq 10^{-12}$?

(c) Programmer ensuite une fonction `serie(p)` d'argument un entier p et qui retourne une somme partielle S_N telle que $|S - S_N| \leq 10^{-p}$.

On pourra utiliser la fonction `rang(p)`.

En déduire les douze premières décimales de π .

4. Complément.

(a) Donner la valeur exacte de $\text{Arctan}(1)$.

(b) Que peut-on dire de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ pour $x = 1$?

(c) Si on pose $T_n = 4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$, on montrerait que (T_n) converge vers π et que $|T_n - \pi| \leq \frac{4}{2n+3}$.

Quel serait alors le plus petit entier N tel que $\frac{4}{2N+3} \leq 10^{-12}$? Quel commentaire peut-on faire?

5. On rappelle la formule de MACHIN :

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$$

Quel est l'intérêt d'une telle formule?

Exercice 9.9 (D'après CCP)

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{n-\lambda}{n+1} a_n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

2. On pose : $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 dont f est une solution sur $] -R, R[$. En déduire $f(x)$.

Exercice 9.10 (D'après Centrale-Supelec)

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

1. Montrer que : $\forall n \geq 1, 1 \leq a_n \leq n^2$.
2. Calculer à l'aide de Python les 20 premiers termes de la suite (a_n) .
3. Calculer la rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.
4. On pose, $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum a_n x^n$. Montrer que f est solution de : $(1-x)y' - (1+2x)y = 0$.
5. En déduire l'expression de $f(x)$, $\forall x \in]-R, R[$.

Issu d'une famille nombreuse et de condition modeste, Joseph FOURIER (1768 – 1830) est rapidement remarqué pour ses dons exceptionnels.

Il veut entrer dans l'armée, mais sa condition sociale l'en empêche ; après un passage dans un monastère, il étudie dans la toute nouvelle *Ecole normale supérieure*, puis enseigne à l'*Ecole polytechnique*.

En 1798, il suit BONAPARTE dans son expédition égyptienne et celui-ci le nomme préfet de l'Isère à son retour.

Les travaux de FOURIER concernent, en physique, *la théorie de la chaleur*. Il s'intéresse notamment à l'étude de la propagation de la chaleur dans un solide. Il parvient à des *équations aux dérivées partielles*, qu'il n'arrive à résoudre que sous la forme de sommes de fonctions trigonométriques. Il donne l'expression des coefficients et résout le problème, déjà abordé avant lui par EULER, BERNOULLI et D'ALEMBERT, du *développement d'une fonction en série trigonométrique*. Il se préoccupe peu des problèmes de convergence, ce que fera le mathématicien allemand GUSTAV DIRICHLET quelques années plus tard.

10.1 Compléments sur les fonctions définies par morceaux

Définition 10.1 Une fonction définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} est dite **continue par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable comme fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Une fonction définie sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} est dite **de classe \mathcal{C}^1 par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable comme fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Définition 10.2 Soit T un réel strictement positif. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **T -périodique** si on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$$

Définition 10.3 Une fonction T -périodique est dite **continue par morceaux** (respectivement **de classe \mathcal{C}^1 par morceaux**) si elle est continue (respectivement de classe \mathcal{C}^1) sur une période.

Exemple 10.1

Théorème

L'ensemble des fonctions à valeurs réelles, T -périodiques et continues par morceaux sur \mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition 10.4 Soit f une fonction à valeurs réelles, T -périodique et continue par morceaux.

On appelle **valeur moyenne de f** :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Exemple 10.2

Propriété

Soit f une fonction à valeurs réelles, T -périodique et continue par morceaux.

La valeur moyenne de f est donnée par :

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

10.2 Coefficients et séries de Fourier

Définition 10.5 Soit f une fonction à valeurs réelles, T -périodique et continue par morceaux; on pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On appelle **coefficients de Fourier trigonométriques** les réels définis par :

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_k(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, & \forall k \in \mathbb{N}^* \\ b_k(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt & \forall k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Remarques.

- ① $a_0(f)$ représente la valeur moyenne de la fonction f .
- ② On peut définir les coefficients de Fourier complexes, en posant $c_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt$.
On a alors : $a_k(f) = c_k(f) + c_{-k}(f)$ et $b_k(f) = ic_k(f) - ic_{-k}(f)$;
ou encore :

$$a_k(f) = 2 \operatorname{Re}(c_{-k}(f)) = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{ik\omega t} dt \right)$$

et

$$b_k(f) = 2 \operatorname{Im}(c_{-k}(f)) = 2 \operatorname{Im} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{ik\omega t} dt \right)$$

- ③ Pour une fonction 2π -périodique, on a $\omega = 1$ et alors les coefficients de Fourier s'écrivent :

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt & \forall k \in \mathbb{N}^* \\ b_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt & \forall k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

- ④ Dans le calcul des coefficients de Fourier, on peut simplifier les expressions à l'aide des résultats suivants :

$$\begin{aligned} \cos(n\pi) &= (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} & ; & \quad \sin(n\pi) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \cos\left(2p \times \frac{\pi}{2}\right) &= (-1)^p, \quad \forall p \in \mathbb{N} & ; & \quad \sin\left(2p \times \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N} \\ \cos\left((2p+1) \times \frac{\pi}{2}\right) &= 0, \quad \forall p \in \mathbb{N} & ; & \quad \sin\left((2p+1) \times \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p, \quad \forall p \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Propriété. Cas des fonctions paires

Si f une une fonction T -périodique (respectivement 2π -périodique) et paire, alors :

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt \\ a_k(f) &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \\ b_k(f) &= 0 &\forall k \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Propriété. Cas des fonctions impaires

Si f une une fonction T -périodique (respectivement 2π -périodique) et impaire, alors :

$$\begin{aligned} a_k(f) &= 0 &\forall k \in \mathbb{N} \\ b_k(f) &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \end{aligned}$$

Exemple 10.3**Propriété. Symétrie glissée**

Si f une une fonction T -périodique vérifiant la relation

$$f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$$

alors tous les coefficients d'indices pairs sont nuls.

Exemple 10.4

Définition 10.6 Soit f une fonction à valeurs réelles, T -périodique et continue par morceaux; on pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
Les **sommées partielles de Fourier** d'ordre n de f sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n(f) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$$

Exemple 10.5**10.3 Structure hilbertienne****Théorème**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions T -périodiques et continues par morceaux. L'application :

$$\begin{aligned} E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt \end{aligned}$$

est un produit scalaire sur E , qui confère à E une structure préhilbertienne.

Preuve 10.1**Théorème**

Soit E l'espace préhilbertien des fonctions T -périodiques et continues par morceaux muni du produit scalaire précédent.

La famille

$$\mathcal{F}_n = \{x \mapsto 1, x \mapsto \sqrt{2} \cos(k\omega x), k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x \mapsto \sqrt{2} \sin(k\omega x), k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

est une famille orthonormée de E .

Preuve 10.2

Remarque.

Nous pouvons écrire $a_0 = \langle f, t \mapsto 1 \rangle$, $a_k(f) = \sqrt{2} \langle f, t \mapsto \sqrt{2} \cos(k\omega t) \rangle$ et $b_k = \sqrt{2} \langle f, t \mapsto \sqrt{2} \sin(k\omega t) \rangle$

La somme partielle de Fourier d'ordre n d'une fonction f peut ainsi être interprétée comme la projection orthogonale de f sur $\text{Vect}(\mathcal{F}_n)$.

10.4 Théorèmes de convergence

Théorème de Parseval

Soit f une fonction T -périodique, continue par morceaux sur \mathbb{R} et de coefficients de Fourier $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Alors les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et on a l'égalité :

$$\frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Exemple 10.6

Remarque.

Considérons l'espace préhilbertien F des fonctions T -périodiques et continues sur \mathbb{R} , muni du produit scalaire : $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)g(t) dt$. Si on fait l'hypothèse que la famille

$$\mathcal{F} = \{x \mapsto 1, x \mapsto \sqrt{2} \cos(n\omega x), n \in \mathbb{N}^*, x \mapsto \sqrt{2} \sin(n\omega x), n \in \mathbb{N}^*\}$$

est une base orthonormée de F ; alors les coordonnées de f dans cette base seraient

$$a_0, \frac{1}{\sqrt{2}} a_n, n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{2}} b_n, n \in \mathbb{N}^*$$

L'égalité de Parseval traduit alors le fait que la norme de f peut se déduire du produit scalaire, mais également se calculer comme la norme euclidienne canonique des coordonnées dans une base orthonormée.

Définition 10.7 Soit f une fonction continue par morceaux. On appelle **régularisée de f** , notée \tilde{f} la fonction définie par :

$$\tilde{f}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$$

Exemple 10.7

Remarques.

- ①  En général, la régularisée n'est pas une fonction continue.
- ② Si f est continue en x_0 , alors $\tilde{f}(x_0) = f(x_0)$.

Théorème de Dirichlet

Soit f une fonction T -périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} . Alors la série de Fourier converge en tout point et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)) = \tilde{f}(x)$$

Exemple 10.8

Corollaire. Cas des fonctions continues

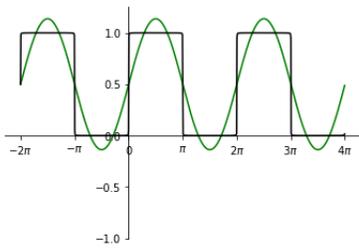
Soit f une fonction T -périodique, continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathbb{R} . Alors la série de Fourier converge en tout point et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)) = f(x)$$

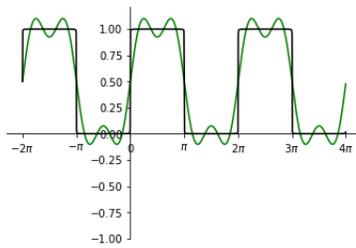
Exemple 10.9

Voici les courbes représentatives des sommes partielles de Fourier d'ordre n pour la fonction 2π -périodique définie par :

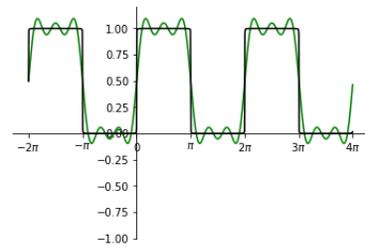
$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{pour } 0 \leq t < \pi \\ f(t) = 0 & \text{pour } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$



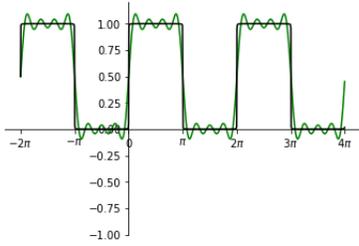
$n = 1$



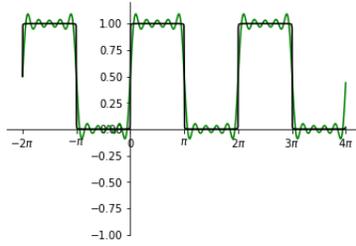
$n = 3$



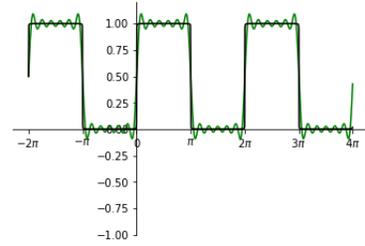
$n = 5$



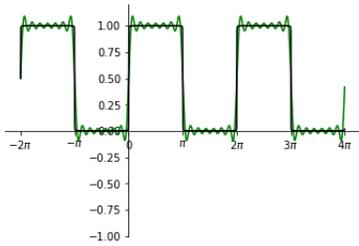
$n = 7$



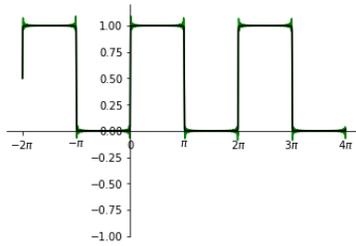
$n = 9$



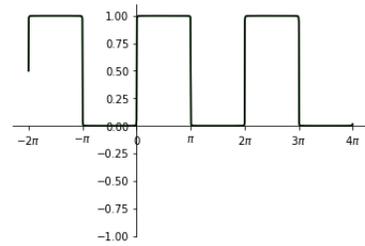
$n = 11$



$n = 15$



$n = 100$



$n = 1000$

10.5 Travaux dirigés

Exercice 10.1

Développer en série de Fourier et étudier la convergence de la série dans les cas suivants :

1. f est 2π -périodique et définie par :
$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{pour } 0 \leq t < \pi \\ f(t) = 0 & \text{pour } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$
2. f est 2π -périodique et définie par $f(t) = t, \forall t \in]-\pi, \pi]$.
3. f est 2π -périodique, paire et définie par $f(t) = \pi - t, \forall t \in [0, \pi]$. Calculer alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 10.2 (D'après CCP)

On considère la fonction $f, 2\pi$ -périodique définie par :
$$\begin{cases} f(t) = \cos t, & \forall t \in [0, \pi] \\ f(t) = 0, & \forall t \in]-\pi, 0] \end{cases}$$

1. Déterminer la série de Fourier de f , étudier sa convergence.
2. Calculer la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(4n^2 - 1)^2}$.

Exercice 10.3

On considère la fonction $f, 2\pi$ -périodique et paire définie par $f(t) = t^2$, pour tout $t \in [0, \pi]$.

1. Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.
2. En déduire la valeur de sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 10.4

On considère la fonction $f, 2\pi$ -périodique définie par $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ sur $[0, 2\pi[$ et la fonction $g, 2\pi$ -périodique telle que :
$$\begin{cases} g(x) = 1 & \text{pour } x \in [-1, 1] \\ g(x) = 0 & \text{pour } x \in]-\pi, -1[\cup]1, \pi] \end{cases}$$

1. Déterminer les séries de Fourier des fonctions f et g .
2. En déduire que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Exercice 10.5

1. Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction impaire f de période 2π , définie par $f(t) = t(\pi - t)$ pour $0 \leq t \leq \pi$.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f .
3. Quelle relation obtient-on en appliquant la formule de Parseval?

Exercice 10.6

On définit les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique par :

$$\operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Déterminer la série de Fourier de la fonction 2π -périodique qui coïncide avec $x \mapsto \operatorname{ch}x$ sur $[-\pi, \pi]$.

En déduire la valeur des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 + 1}$.

Exercice 10.7

Soit f la fonction 2π -périodique, paire, coïncidant sur $[0, \pi]$ avec la fonction $t \mapsto t$.

Déterminer les coefficients de Fourier de f . En déduire la valeur des sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Dans tout le chapitre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

11.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

11.1.1 Généralités sur les équations différentielles d'ordre 1

Définition 11.1 Soit I un intervalle, et $a : I \rightarrow \mathbb{K}$, $b : I \rightarrow \mathbb{K}$, deux fonctions continues.

Une **équation différentielle d'ordre 1** est une équation (E) du type :

$$y' + a(t)y = b(t)$$

où l'inconnue y est une fonction $I \rightarrow \mathbb{K}$, dérivable.

L'équation différentielle $(E_0) : y' + a(t)y = 0$ est appelée **équation homogène**.

Théorème

L'ensemble (S_0) des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène (E_0) :

$$y' + a(t)y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ de dimension 1.

Théorème

Soit A une primitive de a . L'ensemble des solutions de (E_0) est :

$$\mathcal{S}_0 = \{t \mapsto Ce^{-A(t)}, C \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(t \mapsto e^{-A(t)})$$

Théorème. Structure des solutions

Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $y = y_h + y_p$, où y_h est une solution quelconque de l'équation homogène de (E_0) et y_p est une solution particulière de (E) .

Exemple 11.1 Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle : $t^2 y' + y = 1$.

Théorème de superposition

Supposons que $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$. Soit y_1 une solution particulière de $y' + a(t)y = b_1(t)$ et y_2 une solution particulière de $y' + a(t)y = b_2(t)$. Alors $y_p = y_1 + y_2$ est une solution particulière de (E) .

Théorème de Cauchy

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soient $t \mapsto a(t)$ et $t \mapsto b(t)$ des applications continues de I dans \mathbb{K} . Soit t_0 un élément de I et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une **unique** solution $t \mapsto y(t)$.

11.1.2 Recherche de solution particulière : méthode de variation de la constante

On suppose connue une solution $t \mapsto y_h(t) = C e^{-A(t)}$ de l'équation *homogène* (E_0). On pose alors :

$$y_p(t) = C(t) e^{-A(t)}$$

On a donc $y'_p(t) = C'(t) e^{-A(t)} - C(t) a(t) e^{-A(t)}$; on reporte dans l'équation (E), il vient :

$$C'(t) e^{-A(t)} - C(t) a(t) e^{-A(t)} + a(t) C(t) e^{-A(t)} = b(t) \Leftrightarrow C'(t) = b(t) e^{A(t)}$$

On intégrant $t \mapsto b(t) e^{A(t)}$, on trouve $t \mapsto C(t)$, puis $y_p(t)$.

Exemple 11.2 Résoudre sur $]0, +\infty[$, le problème de Cauchy : $\begin{cases} t y' + y = \ln(t) \\ y(1) = 0 \end{cases}$

11.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Théorème. Structure des solutions

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soient $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$ et $t \mapsto c(t)$ des applications continues de I dans \mathbb{K} . On considère l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad (E)$$

On note (H) l'équation différentielle dite homogène associée :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (E_0)$$

La solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de (E_0).

Théorème

L'ensemble (S_0) des solutions de l'équation homogène (E_0) :

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2.

Théorème de Cauchy

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soient $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$ et $t \mapsto c(t)$ des applications continues de I dans \mathbb{K} . Soit t_0 un élément de I et α, β deux réels. Le problème :

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

admet une **unique** solution $t \mapsto y(t)$.

11.3 Méthodes de recherche de solutions particulières

11.3.1 Méthode de variation de la constante ou méthode de Lagrange

On suppose connue une solution $t \mapsto h(t)$ de l'équation *homogène* (H). On pose alors

$$y(t) = z(t)h(t)$$

On reporte y dans (E) et, en supposant que y est solution de (E), on obtient une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction $t \mapsto z'(t)$:

$$h(t)z''(t) + (2h'(t) + a(t)h(t))z'(t) = c(t)$$

On résout cette dernière équation par des méthodes connues, puis on intègre z' pour obtenir z , ce qui permet de déduire y .

Exemple 11.3 Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0$; on pourra vérifier que $x \mapsto x+2$ est solution.

11.3.2 Recherche d'une solution développable en série entière

Le principe est de considérer la fonction

$$y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{alors}$$

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

En supposant que y est solution de (E), on obtient une relation de récurrence sur les termes de la suite (a_n) ce qui permet d'en déduire y .

Exemple 11.4 Résoudre les équations différentielles :

$$\textcircled{1} \quad t^2 y'' + 4t y' + 2y = \frac{1}{1-t}$$

$$\textcircled{2} \quad x^2 y'' + 4x y' + (2 - x^2)y = 1$$

11.4 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Définition 11.2 Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans \mathbb{K} et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ un vecteur de classe

\mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Un **système différentiel linéaire** d'ordre 1 à coefficients constants et sans second membre est l'équation :

$$X' = AX$$

où $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ est le vecteur dérivé de X .

Une **solution de ce système différentiel** est toute application $X : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ de classe \mathcal{C}^1 sur I , telle que, pour tout $t \in I$:

$$X'(t) = AX(t)$$

Une telle solution est appelée **courbe intégrale ou orbite**.

On appelle **problème de Cauchy** associé au système $X' = AX$ la recherche d'une solution du système satisfaisant à une condition initiale de la forme $X(t_0) = X_0$. On le note :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Théorème de Cauchy

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soient A une matrice carrée d'ordre n , t_0 un élément de I et $X_0 \in \mathbb{K}^n$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une **unique** solution $t \mapsto X(t)$ définie sur I .

Théorème

Soient A une matrice carrée d'ordre n . L'ensemble des solutions de

$$X' = AX$$

est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

Exemple 11.5 Résoudre les systèmes : ① $\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2z \\ y' = 6x - 5y + 4z \\ z' = 4x - 4y + 4z \end{cases}$; $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et ② $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$

Remarque. Dans le cas où A est diagonalisable; on note $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs propres de A et $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ les vecteurs propres.

Alors la solution $t \mapsto X(t)$ est combinaison linéaire des vecteurs $t \mapsto e^{\lambda_i t} U_i$. On peut donc déduire le comportement asymptotique de X en fonction du signe de la partie réelle des valeurs propres de A .

11.5 Equations différentielles d'ordre n à coefficients constants

Définition 11.3 Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ une famille de nombre réels. Une **équation différentielle d'ordre n à coefficients constants** est une équation de la forme :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$$

Théorème

Toute équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n à coefficients constants est équivalente à un système différentiel linéaire d'ordre 1 à n équations.

Preuve 11.1

Exemple 11.6 Résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 : $y''' = y$

11.6 Travaux dirigés

Exercice 11.1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & y' + 4ty = te^{-t^2} \\ \text{(b)} & y' + \frac{1}{x}y = \cos x; y(\pi) = 0 \\ \text{(c)} & y'' - y' - 2y = e^x + e^{-x} \\ \text{(d)} & y'' - 2y' + 5y = 40 \cos x; y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{array}$$

Exercice 11.2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & (1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = 0 \\ & x \mapsto e^x \text{ et solution} \\ \text{(b)} & t^2 y'' - ty' + y = 1 - \ln t \\ & t \mapsto t \text{ est solution de l'équation homogène} \end{array}$$

Exercice 11.3

(a) Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle suivante :

$$t^2 y'' + ty' - y = \frac{1}{1-t} - t$$

(b) Résoudre l'équation différentielle :

$$4ty'' + 2y' + y = 0$$

On pourra commencer par chercher une solution développable en série entière.

Exercice 11.4 On cherche à déterminer toutes les fonctions f définies et deux fois dérivables sur \mathbb{R}_+^* telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\mathcal{E})$$

1. Montrer que si f vérifie (\mathcal{E}) , alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 f''(x) + f(x) = 0 \quad (\mathcal{E}')$.
2. Etant donnée f définie sur \mathbb{R}_+^* , on considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(t) = f(e^t)$.
Calculer $g'(t)$ et $g''(t)$ en fonction de f' , f'' et e^t .
Montrer alors que f vérifie (\mathcal{E}') si, et seulement si g vérifie : $\forall t \in \mathbb{R}, g''(t) - g'(t) + g(t) = 0$.
3. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' - y' + y = 0$.
En déduire l'ensemble des fonctions f définies sur \mathbb{R}_+^* vérifiant (\mathcal{E}') .
4. Montrer que l'unique fonction f vérifiant (\mathcal{E}) et la condition initiale $f(1) = 3$ est définie par :

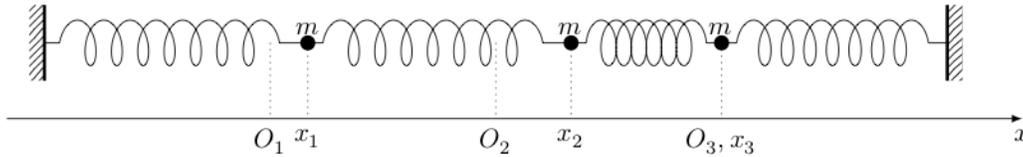
$$f(x) = \sqrt{x} \left[3 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) \right]$$

Exercice 11.5 Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x - 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 4x + 2y - 3z \\ y' = 2y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 11.6 (D'après Centrale-Supelec)

On considère un système de 3 oscillateurs couplés, où les 4 ressorts sont identiques et de constante de raideur k . Les positions des masses m sont repérées par leurs abscisses x_1, x_2 et x_3 à partir de leur position d'origine respective O_1, O_2 et O_3 , positions pour lesquelles les ressorts ne sont pas tendus. On suppose qu'on lâche les masses aux abscisses x_{1m}, x_{2m} et x_{3m} sans vitesse initiale.



On montre, en appliquant le principe fondamental de la dynamique et en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (avec $\omega_0 \in \mathbb{R}_+^*$), que les abscisses x_1, x_2 et x_3 vérifient le système différentiel :

$$(S_1) : \begin{cases} x''_1(t) = -2\omega_0^2 x_1(t) + \omega_0^2 x_2(t) \\ x''_2(t) = \omega_0^2 x_1(t) - 2\omega_0^2 x_2(t) + \omega_0^2 x_3(t) \\ x''_3(t) = \omega_0^2 x_2(t) - 2\omega_0^2 x_3(t) \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice M telle que (S_1) s'écrive $X''(t) = MX(t)$.

Exprimer M en fonction de $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

2. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P orthogonale telles que $A = PDP^T$.

3. On pose $X = PY$. Montrer que $X''(t) = MX(t)$ si et seulement si $Y''(t) = \omega_0^2 DY(t)$.

4. Résoudre le système différentiel $Y''(t) = \omega_0^2 DY(t)$; en déduire alors la solution du système (S_1) , c'est-à-dire déterminer les expressions de x_1, x_2 et x_3 en fonction de t et des conditions initiales x_{1m}, x_{2m} et x_{3m} .

Exercice 11.7

Le but de cet exercice est de calculer la valeur des séries :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \times \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}$$

On considère la série entière de la variable réelle x définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \times \frac{x^n}{n}$.

1. On pose $u_n = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \times \frac{1}{n}$; montrer que

$$\forall n \geq 1, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{2n+1} \quad (1)$$

2. En déduire le rayon de convergence R de $f(x)$.

3. A l'aide de la relation (1) montrer que $\forall n \geq 1, (2n+1)u_{n+1}x^{n+1} = nu_nx^{n+1}$.

4. En déduire que f est solution sur $] - R, R[$ de l'équation différentielle

$$(2x - x^2)y' - y = x \quad (2)$$

5. Soit $x \in]0, 2[$. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{2x - x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{2 - x}$.

6. Montrer alors que la solution de l'équation homogène associée à l'équation (2) est définie par

$$y_h(x) = C \sqrt{\frac{x}{2 - x}}$$

7. Soit $x \in]0, 2[$. On pose $I(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2t - t^2}} dt$. Calculer $I(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\frac{t}{2}}$.

8. A l'aide de la méthode de variation de la constante, déterminer la solution particulière de l'équation (2).

9. Déterminer alors la solution générale de l'équation différentielle (2).

10. Donner un équivalent de f en 0. Déterminer alors l'expression de $f(x)$ pour tout $x \in]0, 2[$.

11. Déterminer la valeur de S et de T .

Remarque. En 1985, le mathématicien D.H. LEHMER a étudié les séries du type $T(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n^k}{\binom{2n}{n}}$ et a conjecturé

l'existence de 2 entiers $U(k)$ et $V(k)$ tels que $T(k) = U(k) + \pi V(k)$.

Dans tout le chapitre n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

12.1 Topologie de \mathbb{R}^n

Définition 12.1 On rappelle que le **produit scalaire canonique** de \mathbb{R}^n vérifie les propriétés ci-dessous :

Si (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé de \mathbb{R}^2 , on a

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad u \cdot v = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix} = x_u x_v + y_u y_v$$

Si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 , on a

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^3, \quad u \cdot v = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

On appelle **norme euclidienne** sur \mathbb{R}^n la norme associée au produit scalaire canonique, on la note $\| \cdot \|$ et on a

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad \|u\| = \sqrt{u \cdot u}$$

Si (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé de \mathbb{R}^2 , on a

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \quad \|u\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$$

Si $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 , on a

$$\forall u \in \mathbb{R}^3, \quad \|u\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n, \quad |u \cdot v| \leq \|u\| \times \|v\|$$

On appelle **distance euclidienne** sur \mathbb{R}^n , la distance associée à la norme euclidienne et on a

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n, \quad d(u, v) = \|u - v\|$$

Définition 12.2 Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle **boule ouverte de centre a et de rayon r** l'ensemble des éléments de \mathbb{R}^n tels que leur distance à a soit strictement inférieure à r et on la note

$$B(a, r) = \{u \in \mathbb{R}^n, d(u, a) < r\} = \{u \in \mathbb{R}^n, \|u - a\| < r\}$$

De même, on appelle **boule fermée de centre a et de rayon r** l'ensemble des éléments de \mathbb{R}^n tels que leur distance à a soit inférieure ou égale à r et on la note

$$\overline{B}(a, r) = \{u \in \mathbb{R}^n, d(u, a) \leq r\} = \{u \in \mathbb{R}^n, \|u - a\| \leq r\}$$

Définition 12.3 Soit A une partie de \mathbb{R}^n . On dit que A est **bornée** s'il existe une boule fermée contenant A ; autrement dit, s'il existe $r > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(0, r)$; ce qui se traduit par : $\exists r > 0, \forall u \in A, \|u\| \leq r$

Définition 12.4 Une partie non vide A de \mathbb{R}^n est dite **ouverte** si en tout $u \in A$, il existe une boule ouverte de centre u contenue dans A ; autrement dit

$$A \text{ est une partie ouverte} \Leftrightarrow \forall u \in A, \exists r > 0, B(u, r) \subset A$$

Une partie non vide A de \mathbb{R}^n est dite **fermée** si et seulement si son complémentaire dans \mathbb{R}^n est un ouvert.

Remarque. Par convention, l'ensemble vide est un ouvert de \mathbb{R}^n . Les ensembles \emptyset et \mathbb{R}^n sont donc à la fois des parties ouvertes et fermées de \mathbb{R}^n .

Exemple 12.1 Représenter les parties Γ_1 et Γ_2 suivantes :

- ① $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$
- ② $\Gamma_2 = \{(x, y), -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$

Remarque. Par définition topologique, dans \mathbb{R} , $]0, 1[$ est un ouvert; $[0, 1]$ est un fermé; $]0, +\infty[$ est un ouvert et $[0, +\infty[$ est un fermé.

Définition 12.5 Soit A une partie non vide de \mathbb{R}^n et u un point de \mathbb{R}^n .

u est un **point intérieur** à A s'il existe une boule ouverte centrée en u entièrement contenue dans A .

u est un **point extérieur** à A s'il existe une boule ouverte centrée en u entièrement contenue dans le complémentaire de A , c'est-à-dire d'intersection vide avec A .

u est un **point de la frontière** ou un **point du bord** de A si toute boule ouverte centrée en u a une intersection non vide à la fois avec A et avec le complémentaire de A .

u est un **point adhérent** à A si tout ouvert contenant u a une intersection non vide avec A .

Remarque. Un point adhérent à A est soit un point intérieur à A , soit un point de la frontière de A . L'ensemble des points adhérents à A s'appelle l'**adhérence** de A , noté \overline{A} . C'est un fermé; plus précisément, c'est le plus petit fermé contenant A .

Exemple 12.2 Soit $\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 2, 0 \leq y \leq x\}$. Donner un point intérieur, un point extérieur, un point sur la frontière et un point adhérent.

12.2 Limites et continuité

Dans toute cette partie A désigne une partie non vide de \mathbb{R}^n et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles définie sur A .

Définition 12.6 Soit u un point adhérent à A . On dit que f admet une **limite en u** lorsqu'il existe un réel b vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, v \in A \text{ et } \|v - u\| \leq \eta \Rightarrow |f(v) - b| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim_{v \rightarrow u} f(v) = b$ et on dit que f tend vers b lorsque v tend vers u

Exemple 12.3 ① Soit $f(x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^2}$; déterminer la limite de f en $(1, 1)$, en $(2, 1)$ et $(1, 2)$ et en $(0, 0)$.

② Soit $g(x, y) \mapsto \frac{x^2}{x^2+y^2}$; déterminer la limite de g en $(0, 0)$.

③ Soit $h(x, y) \mapsto \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$; déterminer la limite de h en $(0, 0)$.

Définition 12.7 Soit u un point de A . On dit que f est **continue en u** lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, v \in A \text{ et } \|v - u\| \leq \eta \Rightarrow |f(v) - f(u)| \leq \varepsilon$$

On dit que f est **continue sur A** si f est continue en tout point de A .

Propriétés

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Soient f et g deux fonctions de A dans \mathbb{R} . Soit $u \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- ◇ Si f et g sont continues en u alors $f + g$ est continue en u .
- ◇ Si f est continue en u alors λf est continue en u .
- ◇ Si f et g sont continues en u alors $f \times g$ est continue en u .

Théorème

Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes

Exemple 12.4 Déterminer les extremums de la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ sur Γ_2 .

12.3 Dérivées partielles d'ordre 1. Applications de classe \mathcal{C}^1

Définition 12.8 Soit A une partie ouverte de \mathbb{R}^2 , $f : \begin{cases} A & \rightarrow \mathbb{R} \\ u = (x, y) & \mapsto f(u) = f(x, y) \end{cases}$ une application.

On considère $a(a_1, a_2)$ un point de A .

On dit que f admet des **dérivées partielles** en a si les fonctions $x \mapsto f(x, a_2)$ et $y \mapsto f(a_1, y)$ sont dérivables respectivement en a_1 et en a_2 . Dans ce cas, les dérivées partielles sont notées $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

On trouve aussi les notations $\partial_x f(a)$ et $\partial_y f(a)$, ou encore $D_x f(a)$ et $D_y f(a)$.

Dans le cas où $n = 3$, on définit de même la dérivée partielle par rapport à la troisième variable $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Exemple 12.5 Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes : $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ et $f(x, y, z) = \frac{e^{xz}}{x+y}$.

Définition 12.9 Soient A une partie ouverte de \mathbb{R}^n et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est de **classe \mathcal{C}^1 sur A** si

- ◇ f admet des dérivées partielles en tout point u de A ;
- ◇ chacune des dérivées partielles est continue sur A .

Propriétés

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Soient f et g deux fonctions de A dans \mathbb{R} . Soit $u \in A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- ◇ Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur A alors $f + g$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A .
- ◇ Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur A alors λf est de classe \mathcal{C}^1 sur A .
- ◇ Si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur A alors $f \times g$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A .

Définition 12.10 Soient A une partie ouverte de \mathbb{R}^2 , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur A et $a(a_1, a_2)$ un point de A . On appelle **gradient** de f en a le vecteur, noté $\nabla_a(f)$ de coordonnées

$$\nabla_a(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$$

Lorsque A est une partie ouverte de \mathbb{R}^3 et $a(a_1, a_2, a_3) \in A$, le gradient de f en a s'écrit

$$\nabla_a(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a), \frac{\partial f}{\partial z}(a) \right)$$

Définition 12.11 Soient A une partie ouverte de \mathbb{R}^n , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur A et a un point de A . On dit que f admet un **point critique** en a lorsque le gradient de f en a est nul.

Exemple 12.6 Déterminer les points critiques de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = (x^2 + 3y^2) e^{-x^2 - y^2}$.

Théorème. Formule de Taylor Young à l'ordre 1

Soient A une partie ouverte de \mathbb{R}^2 , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur A et a un point de A . Pour tout $h \in A$ tel que le segment $[a, h] \subset A$, on a

$$f(a + h) = f(a) + h \cdot \nabla_a(f) + o(\|h\|)$$

Pour $n = 2$, cette égalité peut s'écrire :

$$f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)$$

Pour $n = 3$, elle devient :

$$f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + h_3 \frac{\partial f}{\partial z}(a) + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}\right)$$

Exemple 12.7 Déterminer les développements de Taylor à l'ordre 1 en $(0, 0)$ des fonctions :

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{1+x+y} \text{ et } (x, y) \mapsto \ln(1+x+xy)$$

12.4 Extremums locaux d'une fonction de deux variables

Définition 12.12 Soit f une fonction définie sur un ouvert A de \mathbb{R}^2 et $a \in A$.

On dit que f admet un **minimum local** en a s'il existe un ouvert U contenant a et inclus dans A tel que

$$f(u) \geq f(a), \forall u \in U$$

On dit que f admet un **maximum local** en a s'il existe un ouvert U contenant a et inclus dans A tel que

$$f(u) \leq f(a), \forall u \in U$$

On dit que f admet un **extremum local** en a si f admet en a un minimum local ou un maximum local.

Théorème

Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert A de \mathbb{R}^2 .

Si f admet un extremum local en a alors a est un point critique, autrement dit $\nabla f(a) = 0$

Remarque.  La réciproque est fausse.

En effet un point critique peut être un extremum local ou un point col.

Exemple 12.8 ① Soit $f(x, y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$.

Déterminer les éventuels points critiques et extremums locaux de f .

② Soit $f(x, y) = (x^2 + 3y^2) e^{-x^2 - y^2}$. Déterminer la nature des points $O(0, 0)$ et $A(1, 0)$.

Théorème

Une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur une partie fermée bornée de \mathbb{R}^2 est bornée et atteint ses bornes, soit en un point critique, soit en un point frontière.

Exemple 12.9 Déterminer les extremums de la fonction f définie par $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ sur Γ_2 .

12.5 Dérivation et composition

Théorème

Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et, U et V deux parties ouvertes de \mathbb{R} .

Soient $x : \begin{cases} I \rightarrow U \\ t \mapsto x(t) \end{cases}$ et $y : \begin{cases} I \rightarrow V \\ t \mapsto y(t) \end{cases}$ deux applications de classe \mathcal{C}^1 . Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $U \times V$ de \mathbb{R}^2 . On considère l'application $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(t) = f(x(t), y(t))$. Alors F est une application de classe \mathcal{C}^1 sur I et, pour tout $t \in I$ on a

$$F'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

Théorème

Soient A une partie ouverte de \mathbb{R}^2 et, U et V deux parties ouvertes de \mathbb{R} .

Soient $u : \begin{cases} A \rightarrow U \\ (x, y) \mapsto u(x, y) \end{cases}$ et $v : \begin{cases} A \rightarrow V \\ (x, y) \mapsto v(x, y) \end{cases}$ deux applications de classe \mathcal{C}^1 .

Soit $g : (u, v) \mapsto g(u, v)$ une application de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert $U \times V$ de \mathbb{R}^2 . On considère l'application $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$. Alors f est une application de classe \mathcal{C}^1 sur A et, pour tout $a \in A$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) \frac{\partial g}{\partial u}(u(a), v(a)) + \frac{\partial v}{\partial x}(a) \frac{\partial g}{\partial v}(u(a), v(a))$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial u}{\partial y}(a) \frac{\partial g}{\partial u}(u(a), v(a)) + \frac{\partial v}{\partial y}(a) \frac{\partial g}{\partial v}(u(a), v(a))$$

Exemple 12.10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par $f(x, y) = e^{x-y} + \ln(x+y)$.

- ① Soient x et y les fonction définies sur \mathbb{R}_+^* par $x(t) = t$ et $y(t) = t^2$. On pose $F(t) = f(x(t), y(t))$; calculer $F'(t)$.
- ② On pose $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ et $g(u, v) = f(x, y)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial u}$ et $\frac{\partial g}{\partial v}$.

Cas particulier des coordonnées polaires :

Soit A un ouvert de \mathbb{R}^2 . On considère les applications : $\begin{cases} x : (r, \theta) \mapsto x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y : (r, \theta) \mapsto y(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases}$

On note U et V les images respectives de A par x et y ; et on considère les applications f et g , telles que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur $U \times V$ et g est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur A . Soit $a = (r, \theta)$ un point de A , on a alors

$$\frac{\partial g}{\partial r}(a) = \frac{\partial x}{\partial r}(a) \frac{\partial f}{\partial x}(x(a), y(a)) + \frac{\partial y}{\partial r}(a) \frac{\partial f}{\partial y}(x(a), y(a))$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(a) = \frac{\partial x}{\partial \theta}(a) \frac{\partial f}{\partial x}(x(a), y(a)) + \frac{\partial y}{\partial \theta}(a) \frac{\partial f}{\partial y}(x(a), y(a))$$

ce qui s'écrit plus simplement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r} &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

Exemple 12.11 On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$.

On pose $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ et $g(r, \theta) = f(x, y)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.

12.6 Dérivées partielles d'ordre 2. Fonctions de classe \mathcal{C}^2

Définition 12.13 Soit f une fonction définie sur un ouvert A de \mathbb{R}^n admettant des dérivées partielles d'ordre 1. On suppose que les dérivées partielles admettent elles aussi des dérivées partielles d'ordre 1. Ces dernières s'appellent les dérivées partielles d'ordre 2 de f . Ces dérivées partielles se notent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Définition 12.14 Soit f une fonction définie sur un ouvert A de \mathbb{R}^n . On dit que f est de classe \mathcal{C}^2 sur A si

- ◇ f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur A par rapport à n'importe quel couple de ses variables;
- ◇ toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont continues sur A .

Théorème de Schwarz

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert A . Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Remarque. La contraposée du théorème de Schwarz peut s'exprimer ainsi

$$\text{si } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ alors } f \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^2$$

Exemple 12.12 Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x, y) = e^{x-y} + \ln(x+y)$$

Définition 12.15 Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur l'ouvert A . On appelle **laplacien** de f au point $a \in A$ et on note $\Delta f(a)$ l'expression

$$\Delta f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

Si $n = 3$, on a

$$\Delta f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)$$

12.7 Equations aux dérivées partielles

Théorème. Equation aux dérivées partielles d'ordre 1

Soient $I \times J$ un ouvert de \mathbb{R}^2 et $h : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère l'équation aux dérivées partielles d'ordre 1 suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = h(x, y)$$

Les solutions $f : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions de classe \mathcal{C}^1 de la forme :

$$f(x, y) = H(x, y) + g(y)$$

où H est une primitive de la fonction $x \mapsto h(x, y)$ et g une application quelconque et de classe \mathcal{C}^1 sur J .

Remarque. Pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles d'ordre 1 on sera amené à effectuer un changement de variable pour toujours se ramener à une équation du type précédent.

Exemple 12.13 Résoudre l'équation aux dérivées partielles : $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$; en posant $\begin{cases} u = x \\ v = x + 2y \end{cases}$

Théorème. Système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1

Soient g et h deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . On considère le **système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1** suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y) \end{cases}$$

Les solutions f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 existent si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- ① $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$
- ② $x \mapsto g(x, y)$ admet une primitive $G(x, y)$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}
- ③ l'expression $h(x, y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x, y)$ ne dépend pas de x

Dans ces conditions, les solutions sont de la forme :

$$f(x, y) = G(x, y) + K(y) + C$$

où $y \mapsto K(y)$ est une primitive de $y \mapsto h(x, y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x, y)$ et $C \in \mathbb{R}$.

Remarques. La condition ① est imposée par le théorème de Schwarz.

Le rôles des fonctions g et h sont symétriques, donc, pour les conditions ② et ③ ces fonctions peuvent être interverties; on choisira la fonction la plus simple à intégrer.

Exemple 12.14 Résoudre : $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (x+1)\cos(x+y) + \sin(x+y) - \sin(x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (x+1)\cos(x+y) \end{cases}$

Equations aux dérivées partielles d'ordre 2. Théorème 1

Soit $I \times J$ un ouvert de \mathbb{R}^2 . On considère l'**équation aux dérivées partielles d'ordre 2** suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

Les solutions f de classe \mathcal{C}^2 sur $I \times J$ sont de la forme :

$$f(x, y) = xK(y) + L(y)$$

où K et L sont des fonctions quelconques de classe \mathcal{C}^2 sur J .

Equations aux dérivées partielles d'ordre 2. Théorème 2

Soit $I \times J$ un ouvert de \mathbb{R}^2 . On considère l'**équation aux dérivées partielles d'ordre 2** suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Les solutions f de classe \mathcal{C}^2 sur $I \times J$ sont de la forme :

$$f(x, y) = K(x) + L(y)$$

où K et L sont des fonctions quelconques de classe \mathcal{C}^2 sur J .

Remarques. Pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles d'ordre 2 on sera amené à effectuer un changement de variable pour toujours se ramener à une équation de l'un des deux types précédents.

Le théorème 1 pourrait s'écrire avec comme équation : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Exemple 12.15

En 1747 dans ses *Recherches sur les cordes vibrantes* D'ALEMBERT est amené à résoudre l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Pour résoudre cette équation, on effectue le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$$

12.8 Applications géométriques

Définition 12.16 Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . L'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $f(x, y) = 0$ est une courbe du plan appelée **courbe implicite**.

Remarque. Une courbe plane définie par une équation de la forme $y = g(x)$ peut être considérée comme une courbe implicite en posant $f(x, y) = g(x) - y$.

Définition 12.17 On dit qu'un point (x_0, y_0) est un **point régulier** d'une courbe implicite définie par l'équation $f(x, y) = 0$ si $f(x_0, y_0) = 0$ et $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$.

Théorème

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On note Γ la courbe implicite d'équation $f(x, y) = 0$. Soit (x_0, y_0) un point régulier de Γ . Alors Γ admet en (x_0, y_0) une tangente d'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

En particulier, cette tangente peut être définie comme la droite orthogonale au gradient de f en (x_0, y_0) et passant par le point (x_0, y_0) .

Remarque. Dans le cas particulier d'une courbe définie par une équation de la forme $y = g(x)$, en posant $f(x, y) = g(x) - y$, on a $\frac{\partial f}{\partial x} = g'(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$; on retrouve formule connue de l'équation de la tangente en (x_0, y_0) :

$$y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0)$$

Exemple 12.16

L'ellipse Γ ci-contre admet pour équation implicite

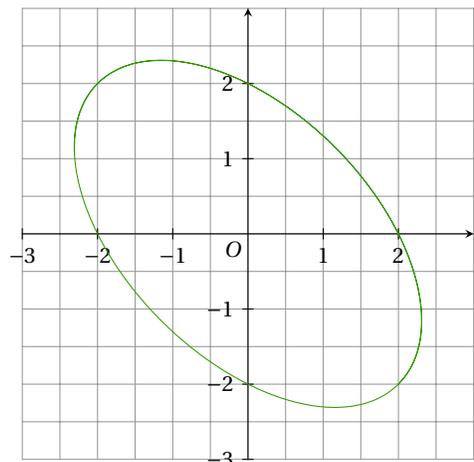
$$x^2 + xy + y^2 = 4$$

Par une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ on a les relations :

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X + Y) \end{cases}$$

Dans ce nouveau repère l'équation devient :

$$\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}Y^2 = 4$$



On peut également montrer que cette ellipse admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(t) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(t) \\ y(t) = -2 \cos(t) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(t) \end{cases}$$

Déterminer une équation de la tangente à Γ au point $P(2,0)$.

Définition 12.18 Soit $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . L'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $f(x, y, z) = 0$ est une surface appelée **surface implicite**.

Remarque. Une fonction $g : (x, y) \mapsto g(x, y)$ peut être représentée par une nappe d'équation $z = g(x, y)$. Cette nappe peut donc être considérée comme surface implicite en posant $f(x, y, z) = g(x, y) - z$.

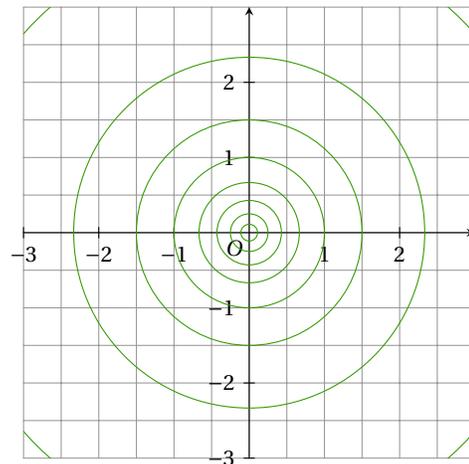
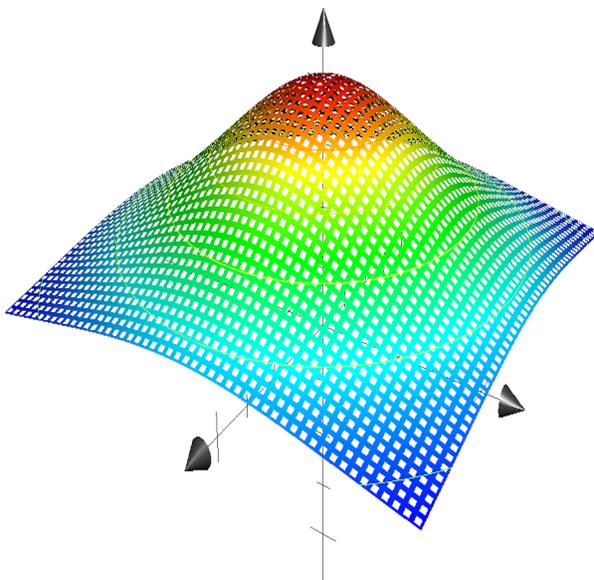
On peut également représenter la fonction g par les courbes d'équation $g(x, y) = \lambda$ appelée **lignes de niveau**.

Théorème

En un point où il est non nul, le gradient de g est orthogonal aux lignes de niveau $g(x, y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de g .

Exemple 12.17 Soit la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par $g(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$.

Les représentations possibles de g sont :



Lignes de niveau $g(x, y) = \lambda$ avec $\lambda = \frac{n}{10}$ pour $n \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$.

Définition 12.19 On dit qu'un point (x_0, y_0, z_0) est un **point régulier** d'une surface implicite définie par l'équation $f(x, y, z) = 0$ si $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ et $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Théorème

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On note Σ la surface implicite d'équation $f(x, y, z) = 0$. Soit (x_0, y_0, z_0) un point régulier de Σ . Alors Σ admet en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un plan tangent d'équation :

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \overrightarrow{MM_0} = 0$$

ce qui s'écrit encore :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

En particulier, ce plan tangent peut être défini comme le plan orthogonal au gradient de f en (x_0, y_0, z_0) et passant par le point (x_0, y_0, z_0) .

Exemple 12.18

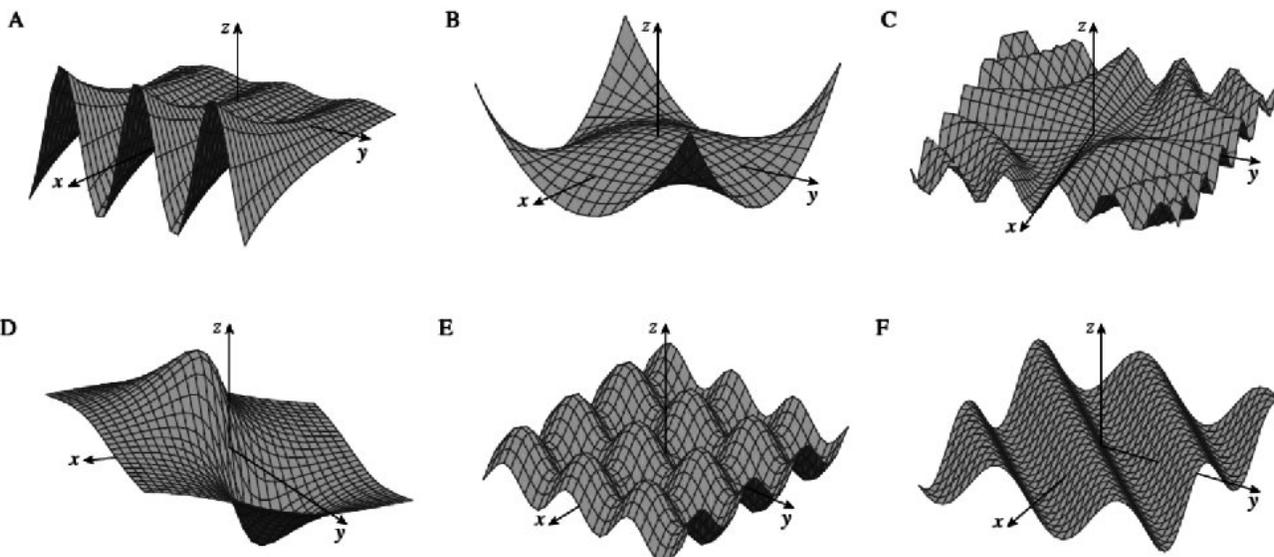
12.9 Travaux dirigés

Exercice 12.1 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

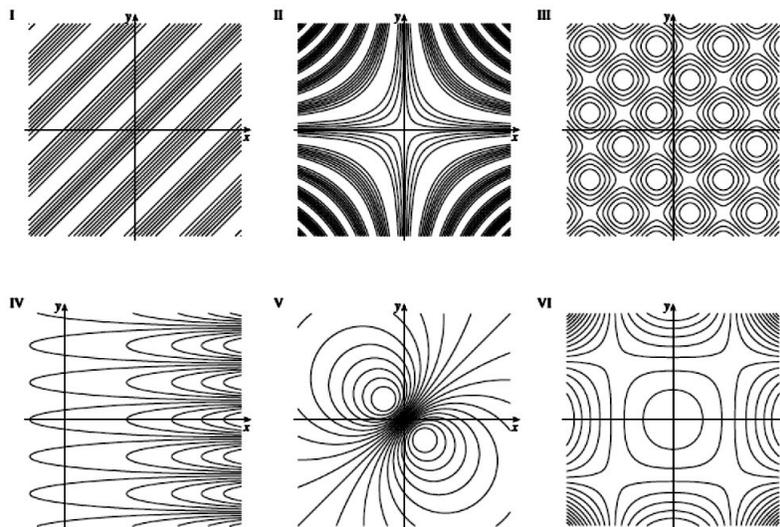
$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que f admet des dérivées partielles selon x et y en tout point de \mathbb{R}^2 .
3. Montrer que ces fonctions ne sont pas continues en $(0, 0)$. En déduire que f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $(0, 0)$.

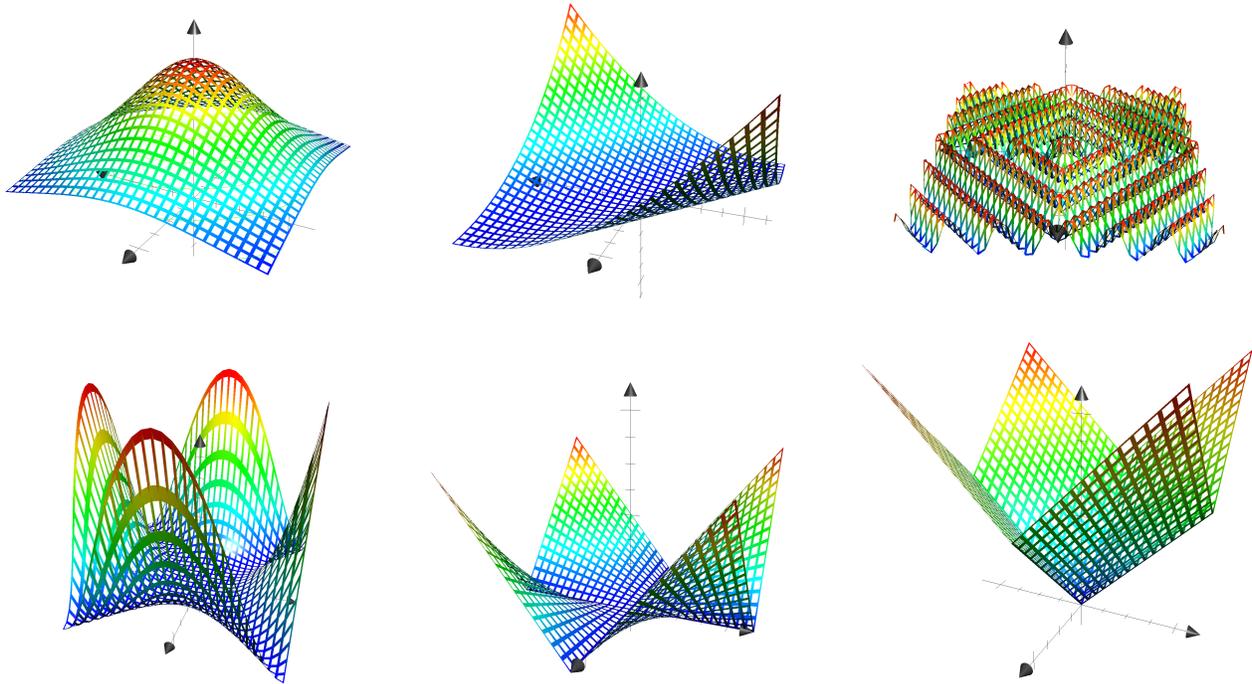
Exercice 12.2 Le premier groupe d'images correspond à la représentation graphique de fonctions à deux variables.



Le second groupe d'images correspond aux lignes de niveau des fonctions représentées au-dessus. Relier les représentations graphiques à leurs lignes de niveau.



Exercice 12.3 Relier chacun des graphiques ci-dessous avec la fonction qu'elle représente.



$$f_1(x, y) = |x| + |y|; f_2(x, y) = |xy|; f_3(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}; f_4(x, y) = (x^2 - y^2)^2; f_5(x, y) = (x - y)^2; f_6(x, y) = \sin(|x| + |y|)$$

Exercice 12.4 *Le contre-exemple de Peano*

On considère la fonction f suivante :

$$(x, y) \mapsto \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0); (0, 0) \mapsto (0, 0)$$

1. Montrer que f admet des dérivées partielles selon x et y en tout point de \mathbb{R}^2 .

On admet que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 12.5 Appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 à la fonction $f : (x, y) \mapsto e^{x-y} + \ln(1 + x + y)$, en $(0, 0)$.

Exercice 12.6 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points critiques et déterminer si ce sont des extrémums locaux :

$$f_1 : (x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3; f_2 : (x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y; f_3 : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

Exercice 12.7 Déterminer toutes les fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 , vérifiant le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + x^2 + 3y^2 \end{cases}$$

Exercice 12.8 Soit f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 , on définit

$$g : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \end{matrix}$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f en fonction de celles de g .
2. Résoudre alors les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\text{a) } \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{b) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{c) } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice 12.9 Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que : $\begin{matrix} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{matrix}$

On pose $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$; et on définit la fonction g de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\begin{matrix} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \mapsto & g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{matrix}$$

1. Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. En déduire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.
3. Déterminer les fonctions de classe \mathcal{C}^1 telles que :

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = xy(x^2 + y^2)$$

Exercice 12.10 Soit f une application de classe \mathcal{C}^2 telle que : $\begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) \end{matrix}$

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ par $u(x, y, z) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.
Déterminer les fonctions f telles que : $\Delta u + u = 0$.

Exercice 12.11 *Etude de l'équation de la chaleur*

Considérons le problème de la diffusion de la chaleur dans une barre homogène, de coefficients de conduction λ , de masse volumique ρ , de coefficient calorifique C_p , de section S et de longueur L , sans production d'énergie interne. En supposant que les deux extrémités sont maintenues à une température constante T_0 , l'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$\rho C_p S \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \text{ pour } x \in [0, L]$$

à laquelle on associe les conditions aux limites $T(0, t) = T(L, t) = T_0$ et une condition initiale $T(x, 0) = T_i(x)$.

En effectuant le changement de variable $u = T - T_0$, on obtient le problème avec *des conditions aux limites de type Dirichlet* :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ pour } x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \text{ pour } t > 0 \\ u(x, 0) = C(x) \text{ pour } x \in [0, L] \end{cases} \quad (1)$$

dans cette équation $\kappa = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ est la diffusivité thermique du matériau, $u(x, t)$ la température relative et $C(x)$ la répartition de température relative initiale : $C(x) = T_i(x) - T_0$.

1. *Méthode de séparation des variables.*

Dans cette question, on considère le problème sans condition initiale fixée :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{pour } x \in]0, L[\\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Pour résoudre ce problème, on cherche une solution à variables séparées, c'est-à-dire sous la forme :

$$u(x, t) = f(t)g(x)$$

(a) Démontrer que u est solution de (2) si et seulement si

$$\frac{1}{\kappa} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} \quad (3)$$

(b) En déduire l'existence d'une constante réelle β telle que

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \beta\kappa \quad \text{et} \quad \frac{g''(x)}{g(x)} = \beta \quad (4)$$

(c) Résoudre les équations différentielles (4) en fonction du signe de la constante β .

(d) En utilisant les conditions aux limites, montrer que les solutions de (2) peuvent s'écrire :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-\kappa \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (5)$$

2. *Solution vérifiant la condition initiale.*

Dans cette question, on considère la condition initiale $C(x) = \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right)$.

Déterminer alors la solution du problème (1).

13.1 Expériences et événements aléatoires

Définition 13.1 Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection entre \mathbb{N} et E . Autrement dit, E est dénombrable s'il existe une famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$

Remarque. On doit cette définition au mathématicien allemand Georg CANTOR. Le cardinal de \mathbb{N} et donc le cardinal de n'importe quel ensemble dénombrable est noté \aleph_0 .

Les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} sont dénombrables; mais les ensembles \mathbb{R} ou $[0, 1]$ ne le sont pas.

Définition 13.2 Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude les résultats. L'étude d'une expérience aléatoire débute par la description de tous les résultats possibles, appelés **éventualités** ou **issues**. L'ensemble de ces résultats possibles est appelé **univers**. On le note généralement Ω

Définition 13.3 Un **événement élémentaire** est un sous-ensemble de l'univers Ω composé d'un seul élément, c'est un singleton composé d'une des issues possibles de l'expérience aléatoire.

Un événement est un sous-ensemble (ou une partie) de l'univers Ω , il est donc la réunion de plusieurs événements élémentaires. Si A est un événement, on dit que les issues contenues dans A sont **favorables** à A , ou **réalisent** A .

L'événement Ω est appelé **événement certain**; \emptyset est l'**événement impossible**

Lien avec les opérations ensemblistes :

L'identification entre les événements et les parties de Ω permet d'utiliser les opérations élémentaires ensemblistes pour traduire certains événements; ainsi

- ◇ l'événement $(A \text{ ou } B)$, appelé **disjonction de A et B** , est modélisé par la réunion $A \cup B$;
- ◇ l'événement $(A \text{ et } B)$, appelé **conjonction de A et B** , est modélisé par l'intersection $A \cap B$;
- ◇ l'événement \bar{A} , appelé **contraire de A** , est modélisé par complémentaire de A noté $\complement_{\Omega} A$;
- ◇ le fait que la réalisation de A entraîne celle de B , noté $A \Rightarrow B$, est modélisé par $A \subset B$.

13.2 Événements incompatibles, système complet d'événements

Définition 13.4 Deux événements A et B de $(\mathcal{P}(\Omega))^2$ sont dit **incompatibles** lorsqu'il est impossible qu'ils soient réalisés simultanément, autrement dit, lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Définition 13.5 Soit I un ensemble dénombrable. Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'événements forme un **système complet d'événements** si les A_i sont deux à deux incompatibles et recouvrent Ω , autrement dit si

$$\begin{cases} \textcircled{1} & \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega \\ \textcircled{2} & A_i \cap A_j = \emptyset, \forall (i, j) \in I^2, \text{ avec } i \neq j \end{cases}$$

Exemple 13.1

13.3 Espace probabilisé dénombrable

Définition 13.6 Soit Ω un univers dénombrable, non vide. On appelle **probabilité** sur Ω toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \textcircled{1} & P(\Omega) = 1 \\ \textcircled{2} & P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) \quad \text{pour toute suite } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'événements deux à deux incompatibles} \end{cases}$$

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un **espace probabilisé dénombrable**, et pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle **probabilité de A** le nombre $P(A) \in [0, 1]$.

Un événement B est dit **négligeable** pour la probabilité P si $P(B) = 0$.

Remarques. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dénombrable.

- ◇ $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$;
- ◇ $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- ◇ $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2, P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$;
- ◇ $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(\Omega))^2$ tels que $A \subset B$, on a $P(A) \leq P(B)$.

Exemple 13.2

13.4 Conditionnement

Définition 13.7 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dénombrable et B un événement non négligeable pour P . Pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on note $P(A|B)$ ou $P_B(A)$ la **probabilité conditionnelle de A sachant B** , et on la définit par

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dénombrable et B un événement non négligeable pour P . l'application

$$P_B : \begin{array}{ll} \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ A & \mapsto P_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω .

Corollaire. Probabilité composée

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dénombrable. Pour tous événements A et B tels que $P(B) > 0$, on a

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(B) \times P_B(A)$$

Exemple 13.3

Corollaire. Formule de Bayes

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dénombrable.

Pour tous événements A et B tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, on a

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}$$

Exemple 13.4**Proposition. Probabilité composée généralisée**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dénombrable et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$, alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Exemple 13.5**Théorème. Formule des probabilités totales**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dénombrable et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \times P(B|A_n)$$

Exemple 13.6

Remarque. La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles

tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

Théorème. Formule de Bayes généralisée

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dénombrable et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors pour tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ non négligeable et tout $i \in \mathbb{N}$ on a

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \times P(B|A_i)}{\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) \times P(B|A_n)}$$

13.5 Indépendance en probabilité

Définition 13.8 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Deux événements A et B sont **indépendants** pour la probabilité P lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Autrement dit, A et B , tel que $P(B) > 0$, sont indépendants si

$$P(A|B) = P(A)$$

Exemple 13.7

Remarque.  Il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

Deux événements sont indépendants si la réalisation de l'un n'a pas d'incidence sur la réalisation de l'autre; alors que deux événements sont incompatibles si la réalisation de l'un rend la réalisation de l'autre impossible.

Définition 13.9 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Une famille $(A_1, \dots, A_n) \in (\mathcal{P}(\Omega))^n$ est une famille d'événements **mutuellement indépendants** si

$$\text{pour tous } i_1, \dots, i_k \text{ de } \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \times \dots \times P(A_{i_k})$$

Proposition

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'événements mutuellement indépendants; alors toute sous famille $(A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

Remarque.  L'indépendance des événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geq 3$.

Exemple 13.8

13.6 Travaux dirigés

Exercice 13.1 Lancer infini d'une pièce

On lance une pièce une infinité de fois. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note : A_i l'événement "le i -ème lancer donne Pile".

1. Décrire par une phrase chacun des événements suivants :

$$E_1 = \bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i ; E_2 = \left(\bigcap_{i=1}^4 \overline{A_i} \right) \cap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} A_i \right) ; E_3 = \bigcup_{i=5}^{+\infty} A_i$$

2. Décrire à l'aide des A_i l'événement : "on obtient au moins une fois Pile après le n -ème lancer".
3. Ecrire à l'aide des A_i les événements : B_n : "on n'obtient plus que des Pile à partir du n -ème lancer"; B : "on n'obtient plus que des Pile à partir d'un certain lancer".

Exercice 13.2 Anniversaires

Une classe comporte 29 étudiants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux aient leur anniversaire le même jour? *Ignorer les années bissextiles*

A partir de quel effectif cette probabilité dépasse-t-elle 0,9? *On pourra utiliser un programme*

Exercice 13.3

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur, puis on répète l'opération.

1. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges?
2. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges?

On donne la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Exercice 13.4

Soit $z \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient initialement x boules blanches et y boules rouges. On effectue des tirages successifs d'une boule de l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, z boules de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

1. (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage?
 (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage?
 (c) Si la deuxième boule est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche?
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n(x, y)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche après n tirages. (On admettra que c'est aussi la probabilité conditionnelle d'obtenir une boule blanche n tirages plus tard lorsque, à l'issue d'un tirage, l'urne contenait x boules blanches et y boules rouges.)
 (a) En utilisant un système complet d'événements associé au premier tirage, montrer que :

$$u_{n+1}(x, y) = \frac{x}{x+y} u_n(x+z, y) + \frac{y}{x+y} u_n(x, y+z)$$

- (b) En déduire, par récurrence, que : $\forall n \geq 1, u_n(x, y) = \frac{x}{x+y}$.

Exercice 13.5

Cet article est tiré d'un article de Benjamin Dessus et Bernard Laponche, paru le 3 juin 2011 dans le quotidien Libération et intitulé "Accident nucléaire : une certitude statistique".

Au vu des données historiques, la probabilité d'un accident majeur par an pour un réacteur nucléaire est estimé à 3×10^{-4} , obtenue en considérant les 4 accidents majeurs (1 à Tchernobyl, 3 à Fukushima) survenue sur 450 réacteurs et en 31 ans.

1. Il y a 58 réacteurs en France (respectivement 143 en Europe). En supposant l'indépendance entre ceux-ci, en déduire la probabilité d'au moins un accident majeur dans les 30 ans à venir en France (resp. en Europe).
2. Donner un équivalent de $1 - (1 - p)^{nt}$ lorsque p tend vers 0 et nt est fixé.
3. En déduire comment les auteurs en arrivent à une phrase telle que : "Sur la base du constat des accidents majeurs survenus ces trente dernières années, la probabilité d'occurrence d'un accident majeur sur ces parcs serait donc de 50% pour le France et de plus de 100% pour l'Union Européenne."

Exercice 13.6 D'après CCP

On considère un groupe de deux ampoules que l'on observe aux instants $0, 1, 2, 3, \dots$

Ces deux ampoules sont supposées indépendantes l'une de l'autre. A l'instant initial, on suppose que les deux ampoules sont allumées. Ces ampoules restent allumées jusqu'au moment où elles grillent. Elles peuvent donc être soit dans l'état allumé, soit dans l'état grillé.

La possibilité qu'une ampoule soit éteinte n'est pas considérée ici.

A chaque instant, chaque ampoule déjà grillée reste grillée et chaque ampoule allumée a la probabilité $\frac{1}{2}$ de rester allumée et $\frac{1}{2}$ de griller.

On note, pour tout n entier naturel, X_n la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules allumées à l'instant n . On remarquera que X_n peut prendre les valeurs 0, 1 et 2, c'est à dire que $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le vecteur colonne U_n dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la loi de X_0 et vérifier que $E(X_0) = 2$.
Déterminer la variance de X_0 .
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{4}, \text{ et } P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}.$$

3. Déterminer pour tout entier naturel n et sans justification les probabilités conditionnelles :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 0), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 0), \\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1), P_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0)$$

4. Soit $n \geq 0$. A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer $P(X_{n+1} = 1)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

Montrer alors que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$.

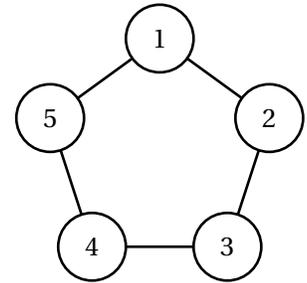
5. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

6. Démontrer que la matrice A est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale Δ et une matrice inversible P telles que $A = P\Delta P^{-1}$.
7. Donner la relation entre les matrices A^n, Δ^n, P et P^{-1} . En déduire les neuf coefficients de la matrice A^n .
8. Déterminer alors la loi de X_n .
9. Exprimer l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ en fonction de n .

Exercice 13.7 *D'après Centrale-Supelec*

Deux personnes sont perdues dans un labyrinthe composé de cinq pièces disposées comme indiqué sur le dessin de la figure 1. Chaque pièce est reliée aux deux pièces voisines par un couloir. Les couloirs sont représentés par les segments du dessin.

A l'instant $n = 0$, les deux personnes se situent dans deux pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2). Elles partent alors à la recherche l'une de l'autre selon les règles suivantes :



- ◇ à partir d'une pièce, chacune peut aller dans l'une ou l'autre des deux pièces voisines, les deux possibilités étant de probabilité $1/2$;
- ◇ les déplacements des deux personnes se font simultanément;
- ◇ les choix des déplacements sont indépendants les uns des autres;
- ◇ on suppose que les deux personnes ne peuvent ni se retrouver ni se voir dans les couloirs qui relient entre elles les différentes pièces;
- ◇ les deux personnes se déplacent jusqu'à se retrouver dans une même pièce; une fois qu'elles se sont retrouvées, elles restent ensemble lors de leurs déplacements futurs.

Pour tout entier naturel n on note :

- ◇ A_n l'événement "les deux personnes sont dans la même pièce après n déplacements" et $a_n = P(A_n)$;
- ◇ B_n l'événement "les deux personnes sont dans des pièces voisines (par exemple les pièces 1 et 2 ou 1 et 5) après n déplacements" et $b_n = P(B_n)$;
- ◇ C_n l'événement "les deux personnes sont dans des pièces non voisines (par exemple les pièces 1 et 3 ou 1 et 4) après n déplacements" et $c_n = P(C_n)$.

1. Donner les valeurs de a_0, b_0 et c_0 .
2. Soit n un entier naturel. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{A_n}(A_{n+1})$ de A_{n+1} sachant A_n . Calculer de même les probabilités conditionnelles $P_{B_n}(A_{n+1})$ et $P_{C_n}(A_{n+1})$.
3. En déduire l'égalité $P(A_{n+1}) = P(A_n) + \frac{1}{4}P(C_n)$.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}c_n$, $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$.
5. On note $u_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice A telle que la relation $u_{n+1} = Au_n$ soit vérifiée $\forall n \in \mathbb{N}$.
6. On se propose de déterminer les expressions de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(a) Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n$$

(b) En déduire l'expression de b_n , puis celles de c_n et de a_n en fonction de n .

(c) Les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont-elles convergentes? Si oui, préciser leurs limites et en donner une interprétation.

7. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires pour que les deux personnes se retrouvent pour la première fois.

(a) Quelles sont les valeurs prises par X ?

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(X = n)$ en fonction de A_n et C_{n-1} .

(c) Donner la loi de X .

Justifier que pour $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Calculer l'espérance de X . Comment peut-on l'interpréter dans le cadre du problème du labyrinthe?

14.1 Compléments sur les variables aléatoires réelles finies

Dans tout le paragraphe $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ désigne un espace probabilisé, où Ω est un univers fini.

14.1.1 Variable aléatoire sur un univers fini

Définition 14.1 On appelle **variable aléatoire réelle** sur Ω toute application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

L'ensemble des valeurs possibles pour X est noté $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Soit $1 \leq i \leq n$; l'événement $(X = x_i)$ désigne l'événement $X^{-1}(\{x_i\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x_i\}$.

Théorème et définition

L'application $P_X : \begin{array}{ll} X(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ x_i & \mapsto P(X = x_i) \end{array}$ est une probabilité sur $X(\Omega)$ appelée **loi de probabilité de X** .

Remarque. Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire finie X revient à déterminer un n -uplet de couples $(x_i, p_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que $x_i \in X(\Omega)$ et $p_i = P(X = x_i), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Théorème

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire réelle de loi de probabilité P_X .

Les événements $(X = x_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment un système complet d'événements; en particulier $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Exemple 14.1

Définition 14.2 Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire réelle et f une application : $X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. L'application composée $Y : \begin{array}{ll} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto f(X(\omega)) \end{array}$ est une variable aléatoire notée $Y = f(X)$ et appelée **image de X par f** .

En particulier, X^2 et $aX + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sont des variables aléatoires.

Définition 14.3 Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

On appelle **espérance mathématique** (ou **espérance de X**) et on note $E(X)$, le nombre

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

On appelle **variance** de X et on note $V(X)$, le nombre $V(X) = E(X - E(X))^2$.
On appelle **écart type** de X et on note $\sigma(X)$, le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Théorème de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Alors

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Propriétés

Soient X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et a et b deux réels. Alors

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \text{et} \quad V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Définition 14.4 Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On dit que X est **centrée** lorsque $E(X) = 0$.
On dit que X est **réduite** lorsque $V(X) = 1$

Exemple 14.2**Théorème**

Soit X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires finies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Alors

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n)$$

14.1.2 Lois finies usuelles

Définition 14.5 Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On dit que X suit une **loi certaine** sur $X(\Omega)$ lorsque X est constante, autrement dit, si :

$$\exists a \in \mathbb{R}, X(\Omega) = \{a\}$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi certaine. Alors

$$E(X) = a \quad \text{et} \quad V(X) = 0$$

Exemple 14.3

Définition 14.6 Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On dit que X suit une **loi uniforme** (ou **loi équiprobable**) sur $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$, si :

$$\forall i \in [1, n], P(x_i) = \frac{1}{n}$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme. Alors

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Preuve 14.1**Exemple 14.4**

Définition 14.7 Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [0, 1]$ sur $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si :

$$P(X = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X = 0) = q = 1 - p$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p . Alors

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p) = pq$$

Preuve 14.2

Définition 14.8 Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$ sur $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, si :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Alors

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1 - p) = npq$$

Preuve 14.3

Exemple 14.5

14.1.3 Couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles finies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$.

Théorème et définition

L'application

$$P_{X,Y} : \begin{array}{ll} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ (x_i, y_j) & \mapsto P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \end{array}$$

est une probabilité sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ appelée **loi conjointe de X et de Y** ou **loi du couple (X, Y)** .

Remarque. Déterminer la loi du couple (X, Y) revient à déterminer une famille $((x_i, y_j), p_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ telle que $(x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et $p_{ij} = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$, $\forall (i, j) \in I \times J$.

Théorème

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi conjointe $P_{X,Y}$. Les événements $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$ forment un système complet d'événements; en particulier

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} = 1.$$

Définition 14.9 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Les lois de X et de Y sont appelées **lois marginales du couple** (X, Y) .

Théorème

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi conjointe $((x_i, y_j), p_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$. Alors

$$\forall i \in I, P(X = x_i) = P\left(\bigcup_{j \in J} (X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{j \in J} p_{ij}$$

$$\forall j \in J, P(Y = y_j) = P\left(\bigcup_{i \in I} (X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = \sum_{i \in I} p_{ij}$$

Exemple 14.6

Remarque. La connaissance de la loi conjointe du couple (X, Y) permet donc de déterminer les lois marginales; mais la réciproque est fautive. Les lois marginales ne permettent pas, en général, de déterminer la loi conjointe.

Définition 14.10 Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, (X, Y) un couple de variables aléatoires et $i \in I$ tel que $P(X = x_i) > 0$. Pour tout $j \in J$, la probabilité conditionnelle de $(Y = y_j)$ sachant $(X = x_i)$ est donnée par

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(X = x_i)}$$

On appelle alors **loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_i)$** , notée $Y_{X=x_i}$ l'application

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ y_j &\rightarrow P(Y = y_j | X = x_i) \end{aligned}$$

Définition 14.11 Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, (X, Y) un couple de variables aléatoires. Les variables X et Y sont **indépendantes** si, $\forall (i, j) \in I \times J$, on a

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j)$$

Théorème

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes. Alors

$$\forall (A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega), P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

Théorème

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes et f et g deux applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. Alors les variables aléatoires images $f(X)$ et $f(Y)$ sont également indépendantes.

Définition 14.12 Soient X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires définies sur Ω .

On dit que ces variables sont **mutuellement indépendantes** si $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

Théorème

Soient X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires définies sur Ω , mutuellement indépendantes, alors quel que soit $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Théorème

Soient X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires définies sur Ω , mutuellement indépendantes, alors quel que soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}$, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Théorème

Soient X_1, X_2, \dots, X_n , n variables aléatoires définies sur Ω , mutuellement indépendantes, de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Alors la somme $S = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Preuve 14.4

Définition 14.13 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles finies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de loi conjointe $((x_i, y_j), p_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$.

L'espérance du produit (X, Y) est

$$E(XY) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i y_j p_{ij}$$

La covariance du couple (X, Y) est

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X)) \times (Y - E(Y)))$$

Théorème

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles finies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Alors

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y)$$

Preuve 14.5**Théorème**

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles finies et **indépendantes**. Alors

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad \text{Cov}(X, Y) = 0 \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Remarque.  Les réciproques sont fausses en général.

14.2 Variables aléatoires discrètes

Dans tout le paragraphe $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ désigne un espace probabilisé dénombrable.

14.2.1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes

Définition 14.14 Une variable aléatoire discrète est une application X définie sur Ω et à valeur dans \mathbb{R} .

L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = E = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, où E est un ensemble dénombrable.

La loi de probabilité de X est l'application $P_X : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ déterminée par la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = P_X(x_n) = P(X = x_n)$.

Remarques.

- ◊ On a nécessairement $p_n \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$.
- ◊ La probabilité d'un événement $A \in \mathcal{P}(E)$ est alors $P(A) = \sum_{x \in A} P(X = x)$. Cette somme est dénombrable et convergente puisque majorée par $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$.

Exemple 14.7

Définition 14.15 Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω , de loi de probabilité P_X . La fonction de répartition de X est l'application F_X définie par

$$F_X(x) = P_X([-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

Remarque. Connaissant la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, il est possible de retrouver la loi de probabilité par la relation :

$$P(X = x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1})$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω . La fonction de répartition F_X est une fonction positive et croissante.

Théorème

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω et f une application réelle définie sur un intervalle I contenant $X(\Omega)$. Alors $f \circ X = f(X)$ est une variable aléatoire discrète sur Ω , appelée image de X par f .

Définition 14.16 Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que X est d'**espérance finie** si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. Si tel est le cas, on appelle **espérance** de X le réel

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$$

On dit que la variable X est **centrée** si $E(X) = 0$.

Exemple 14.8

Remarques.

- ◊ Une variable aléatoire bornée est d'espérance finie.
- ◊ Si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$, alors l'absolue convergence est équivalente à la convergence.
- ◊ L'absolue convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ implique que la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre d'énumération.

Proposition. Linéarité

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes d'espérances finies sur Ω et λ un réel. Alors

$$E(\lambda X + Y) = \lambda E(X) + E(Y)$$

Remarque. En appliquant la propriété précédente à un réel a et à Y , une variable aléatoire constante égale à b , l'égalité devient $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, E(aX + b) = aE(X) + b$.

En particulier, si X est d'espérance finie, alors $X - E(X)$ est une variable aléatoire discrète centrée.

Théorème du transfert

Soient X une variable aléatoire discrète d'espérance finie sur Ω et f une fonction à valeurs réelles définie sur l'image $X(\Omega) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X . $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si la série $\sum P(X = x_n) f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) f(x_n)$$

Proposition.

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω . Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie alors X est elle-même d'espérance finie.

Définition 14.17 Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω . Si X^2 est d'espérance finie, on appelle **variance** de X le réel

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

L'écart type de X est le réel défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

On dit que la variable X est **centrée et réduite** lorsque $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.

Proposition.

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω telle que X^2 soit d'espérance finie. Alors

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Remarque. Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω telle que X^2 soit d'espérance finie et telle que $V(X) \neq 0$; alors la variable $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une variable aléatoire centrée et réduite.

Théorème. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω telle que X^2 soit d'espérance finie. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

14.2.2 Lois discrètes usuelles

Définition 14.18 Soit $p \in]0, 1[$. On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit une **loi géométrique de paramètre p** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

Exemple 14.9

Remarque. La loi géométrique peut être interprétée comme le rang du premier succès dans une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p . Alors X et X^2 sont d'espérance finie et

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Preuve 14.6

Définition 14.19 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit une **loi de Poisson de paramètre λ** et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Théorème

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Alors X et X^2 sont d'espérance finie et

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda$$

Preuve 14.7

Théorème

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p_n) et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Preuve 14.8

Remarque. Dans la pratique, lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, le calcul de $P(X = k)$ devient délicat dès que n est très élevé. On cherche alors une approximation en supposant que X suit une loi de Poisson plutôt qu'une loi binomiale. On sera dans cette situation lorsque n est grand, p est petit et $np = \lambda$ est borné.

Exemple 14.10

14.3 Travaux dirigés

Exercice 14.1

On lance n fois de suite une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de "pile" obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

Exercice 14.2

On lance n fois un dé à six faces. On note X le nombre de 6 obtenu.

1. Montrer que X suit une loi binomiale à déterminer.
2. Déterminer le nombre minimum de lancers à effectuer pour que la fréquence d'apparition du 6 soit comprise entre $\frac{1}{6} - 0,01$ et $\frac{1}{6} + 0,01$ avec un risque d'erreur de 5%. (On pourra utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev.)

Exercice 14.3 Problème de chevalier de Méré

A-t-on plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins un six en lançant 4 dés ?

1. On lance un dé 4 fois à la suite. Modéliser le problème par une loi binomiale à déterminer.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un six.
3. On veut vérifier que la modélisation choisie correspond à la réalité. On simule ainsi n fois de suite l'expérience qui consiste à lancer 4 dés et on calcule la fréquence d'apparition d'au moins un six lors de ces n lancers. Combien faut-il simuler de lancers pour que la fréquence obtenue soit supérieure à $\frac{1}{2}$?
 - (a) Montrer que la fréquence vaut $\frac{Y}{n}$, où Y est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4\right)$.
 - (b) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev appliquée à une loi binomiale, déterminer n pour que la probabilité que " $\frac{Y}{n}$ est inférieur à $\frac{1}{2}$ " soit inférieur à 10%.

Exercice 14.4

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N .

1. On prélève successivement et avec remise n boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu. Déterminer la loi de X .
2. Même question lorsque les tirages ont lieu simultanément.

Exercice 14.5

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$. On souhaite déterminer la loi de $X + Y$.
 - (a) Soit E un ensemble à $n + m$ éléments. Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ de cardinaux respectifs n et m , tels que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$. En considérant les parties de E à k éléments montrer que :

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

- (b) Déterminer alors la loi de $X + Y$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ . Quelle est la loi suivie par $X + Y$?

Exercice 14.6

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre p . Quelle est la loi suivie par $X + Y$?
2. Dorénavant, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et q .
 - (a) Déterminer $P(X > n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
 - (b) En déduire la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 14.7 "Science" fiction ?

Nous sommes en 2100, de nouveaux gisements d'uranium ont été découverts. La production d'électricité sur Terre est devenue majoritairement nucléaire; ainsi on compte 3000 réacteurs dans le monde. On rappelle que la probabilité qu'un accident majeur arrive sur un réacteur en une année a été évaluée au début du siècle dernier à $p = 3 \times 10^{-4}$.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre d'accidents majeurs pouvant survenir sur une année.

1. Montrer que X suit une loi binomiale de paramètres à préciser.
2. Est-il légitime d'approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson ?
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait trois accidents majeurs en une année.
4. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins trois accidents majeurs en une année.

Exercice 14.8 Fonctions de transfert

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p . Calculer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Calculer $E\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 14.9

On lance cinq dés. Après ce premier lancer, ceux des dés qui ont donné un "As" sont mis de côté et les autres sont relancés. On procède ainsi jusqu'à l'obtention des cinq "As". On note T la variable aléatoire déterminant le nombre de lancers nécessaires.

1. Calculer $P(T \leq n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On pourra introduire cinq variables aléatoires suivant une loi usuelle à déterminer.
2. En déduire que T admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 14.10 Loi conjointe, lois marginales

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètres n et $p \in]0, 1[$.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .
2. Montrer que la loi marginale de Y est une loi de Poisson de paramètre λp .
3. Calculer la covariance de X et de Y .

Exercice 14.11 Barrage autoroutier

Un péage autoroutier comporte deux barrières. Le nombre de voitures arrivant à ce péage par jour suit une loi de Poisson de paramètre λ et chaque voiture choisit arbitrairement et indépendamment des autres de franchir l'une ou l'autre des deux barrières. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires déterminant le nombre de voitures franchissant chacune des deux barrières dans une journée.

1. Calculer $P(X_1 = k | X_1 + X_2 = n)$. En déduire la loi de X_1 .
2. En calculant la variance de $X_1 + X_2$, déterminer la covariance de X_1 et X_2 .
3. En comparant les événements $(X_1 = k) \cap (X_2 = \ell)$ et $(X_1 = k) \cap (X_1 + X_2 = k + \ell)$, montrer que les variables X_1 et X_2 sont en fait indépendantes.

Exercice 14.12 *D'après Banque PT 2016*

Un individu joue avec une pièce non nécessairement symétrique. On note p la probabilité d'obtenir pile et on suppose seulement $p \in]0, 1[$.

Dans un premier temps, il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois pile. On note N le nombre de lancers nécessaires.

Dans un deuxième temps, il lance N fois cette même pièce et on note X le nombre de piles obtenus au cours de cette seconde série de lancers.

1. Préciser la loi de N , et la loi conditionnelle de X sachant $N = n$.
2. Déterminer la loi du couple (N, X) .
3. On considère la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par : $\forall x \in] -1, 1[: f(x) = \frac{1}{1-x}$.
Donner l'expression de la dérivée $k^{\text{ième}}$ de f pour tout $k \geq 0$.
En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1/(1-x)^{k+1}$ au voisinage de 0 pour k entier positif.
4. En déduire que la loi de X est donnée par

$$\forall k \geq 1, \mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \text{ et } \mathbb{P}(X = 0) = \frac{(1-p)}{(2-p)}.$$

5. Soit $\lambda \in]0, 1[$, U une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λ et V une variable aléatoire géométrique de paramètre λ indépendante de U . On note $Y = UV$.
 - (a) Sans calculer sa loi, calculer l'espérance de Y .
 - (b) Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ (on pourra traiter séparément le cas $k = 0$).
 - (c) Calculer la variance de Y .
6. En déduire que X a même loi qu'un produit de deux variables aléatoires indépendantes, l'une étant une variable de Bernoulli et l'autre une variable géométrique de même paramètre.

Exercice 14.13 *D'après Banque PT 2017*

1. Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p .
 - (a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X > n)$.
 - (b) Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p . On note T le rang du 1er succès obtenu : $T = \inf\{k \geq 1, X_k = 1\}$. Montrer que T a même loi que X .
2. On appelle *fonction génératrice* de X la série entière

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n$$

On admet que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p .

- (a) Calculer la fonction génératrice de X puis de $X + Y$.
 - (b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(X + Y = n) = p^2 (n-1) (1-p)^{n-2}$.
 - (c) Déterminer, pour $n \geq 2$, la loi de X sachant $X + Y = n$.
3. On considère toujours X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p . On pose $T = \max(X, Y)$ et $Z = \min(X, Y)$. On pose $q = 1 - p$.
 - (a) Exprimer $X + Y$ et $|X - Y|$ en fonction de Z et T .
 - (b) Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = \frac{p}{1+q}$.
 - (c) Montrer que Z suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^2$. On pourra caractériser la loi de Z par sa fonction de répartition.
 - (d) Déterminer la loi de T .