PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 8

CHAPITRE 6 : ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

1. Produit scalaire et norme.

Définition du produit scalaire : soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, un produit scalaire est une application : $E \times E \to \mathbb{R}$, bilinéaire, symétrique, positive et définie-positive.

Notations : $\langle x, y\rangle$, $(x|y)$, $x \cdot y$

Un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle un espace préhilbertien réel ; de plus, si E est de dimension finie, on dit que E est un espace euclidien.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.

La norme associée à un produit scalaire est définie par $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$; distance associée.

Propriétés : règle du parallélogramme, identités de polarisation, théorème d'Al Kashi, théorème de Pythagore.

2. Orthogonalité.

Deux vecteurs sont orthogonaux si $\langle u, v\rangle = 0$; sous-espaces orthogonaux ; orthogonal d'un sous-espace vectoriel F, notation $F^{\perp}$.

Famille orthogonale, famille orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Tout espace vectoriel de dimension finie ou tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien possède une base orthonormale.

Détermination des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale ; expression du produit scalaire et de la norme.

3. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie ; expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.

Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui minimise $\|x - y\|$ avec $y \in F$. Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.

DÉMONSTRATIONS À CONNAÎTRE :

- ⋆ Inégalité de Cauchy-Schwarz ; $|\langle u, v\rangle| \leqslant \sqrt{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle}$ (et cas d'égalité éventuellement).
- ⋆ Un vecteur est orthogonal à un sous-espace F de dimension finie si et seulement si il est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F.
- ⋆ Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.