

PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 9

Prérequis : Les notions définies dans le chapitre 6 : Espaces préhilbertiens réels.

CHAPITRE 7 : ISOMÉTRIES D'UN ESPACE EUCLIDIEN**1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien.**

Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme :

$$\forall u \in E, \|f(u)\| = \|u\|$$

Un endomorphisme d'un espace euclidien est orthogonal s'il conserve le produit scalaire :

$$\forall (u, v) \in E^2, \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Une isométrie vectorielle est un endomorphisme orthogonal. Un endomorphisme orthogonal est un automorphisme. Caractérisation d'une isométrie vectorielle par l'image d'une base orthonormale.

Symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace, réflexion.

Groupe orthogonal, notation $O(E)$. *La définition axiomatique des groupes est hors programme.*

Si un sous-espace est stable par une isométrie vectorielle, alors son orthogonal est stable par cette isométrie.

2. Matrices orthogonales.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si $M^T M = I_n$.

Groupe orthogonal d'ordre n . Notation $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$.

Caractérisation d'une matrice orthogonale à l'aide des colonnes ou des lignes.

Si $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale de E , une base $\mathcal{B}$ est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Si $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E , alors u est une isométrie vectorielle de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ est orthogonale.

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle. Isométrie vectorielle positive ou directe, isométrie vectorielle négative ou indirecte. Groupe spécial orthogonal. Notation $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$ et $SO(E)$.

Application à l'orientation d'un espace euclidien et à la notion de base orthonormale directe.

3. Classification en dimension 2 et 3.

Soit M une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que M soit de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Soit M une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que M soit semblable à une matrice de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad SR(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Détermination des caractéristiques géométriques des ces isométries.

4. Matrices symétriques réelles.

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Théorème spectral : pour toute matrice symétrique réelle A il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $D = P^{-1}AP = P^T AP$.

Les démonstrations sont hors programme. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme.

DÉMONSTRATIONS À CONNAÎTRE :

- ★ Un endomorphisme f est une isométrie vectorielle si et seulement si il est orthogonal.
- ★ Un endomorphisme orthogonal est un automorphisme.
- ★ Un endomorphisme f est une isométrie vectorielle si et seulement si l'image d'une base orthonormale est une base orthonormale.