PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 11

CHAPITRE 9 : SÉRIES ENTIÈRES

1. Convergence d'une série entière.

Une série entière de la variable z est une série de la forme $S(z) = \sum a_n z^n$.

Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence comme borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Conséquence du lemme d'Abel : si le rayon de convergence est un réel R strictement positif, alors pour $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument, et pour $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.

Toute étude systématique de la convergence sur le cercle de convergence est exclue.

La règle de d'Alembert relative aux séries entières est hors programme, mais les étudiants peuvent utiliser la règle de d'Alembert relative aux séries numériques à termes positifs et la conséquence du lemme d'Abel pour déterminer le rayon de convergence.

2. Somme d'une série entière d'une variable réelle.

Définition de la fonction somme,

$$f\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Domaine de définition. La fonction somme est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

La fonction somme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme :

$$\forall x \in]-R, R[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Intégration terme à terme sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence :

$$\forall x \in]-R, R[,\ \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Démonstrations hors programme.

3. Fonctions développables en séries entières.

Une fonction f est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, telle que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,\ \forall |x| < R$.

Une fonction développable en série entière est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0. Lien avec la série de Taylor.

Développements en série entière usuels :

$$\frac{1}{1-x} \quad ; \quad \ln(1+x) \quad ; \quad \mathrm{e}^x \quad ; \quad (1+x)^\alpha \quad ; \quad \cos(x) \quad ; \quad \sin(x)$$

Les étudiants doivent savoir utiliser l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour déterminer un développement en série entière.

4. Exponentielle complexe.

Soit $z = x + iy$, par définition, $\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x\big(\cos(y) + i\sin(y)\big)$ et on a : $\mathrm{e}^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

DÉMONSTRATIONS À CONNAÎTRE :

- ⋆ Lemme d'Abel : Etant donné un réel $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- ⋆ Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les rayons de convergence R_a et R_b des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifient $R_a \geqslant R_b$.
- ⋆ Si $|a_n| \sim |b_n|$ alors les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont égaux.