PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 1

CHAPITRE 1 : DÉTERMINANTS

1. Déterminant d'une matrice.

Théorème et définition : le déterminant d'une matrice est l'unique application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, notée det telle que :

① det est une forme $n-$linéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des colonnes ;
② det est une forme alternée, c'est-à-dire que l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ;
③ le déterminant de la matrice identité est égal à 1.

2. Propriétés du déterminant.

Multilinéarité. Déterminant des matrices diagonales ou triangulaires. Déterminant du produit, de la transposée d'une matrice, de l'inverse d'une matrice inversible. Caractérisation des matrices inversibles.

Développement suivant une ligne ou une colonne.

3. Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme.

Définition et propriétés du déterminant d'une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Caractérisation des bases.

Interprétation géométrique du déterminant de vecteurs dans le cas de deux ou de trois vecteurs.

Définition du déterminant d'un endomorphisme.

Caractérisation des automorphismes.

CHAPITRE 2 : COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE.

1. Applications linéaires.

Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme.

Noyau et image d'une application linéaire. Rang d'une application linéaire.

Matrice d'une application linéaire dans une base.

Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives. Théorème du rang.

2. Familles de vecteurs.

Famille libre, génératrice, base. Image d'une famille libre par un application linéaire injective. Toute famille de polynômes non nuls à degrés échelonnés est libre.

DÉMONSTRATIONS À CONNAÎTRE :

- ⋆ Démontrer que le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. En déduire que si une colonne de la matrice est combinaison linéaire des autres, alors le déterminant est nul.
- ⋆ Démontrer que : A est inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
- ⋆ Démontrer que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille libre de E et si $\big(u,(u_i)_{i\in I}\big)$ est une famille liée, alors u est combinaison linéaire de $(u_i)_{i\in I}$