Programme de colle semaine n° 12

Chapitre 10 : Séries Fourier

1. Compléments sur les fonctions définies par morceaux.

Une fonction définie sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable comme fonction continue (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$) sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Une fonction $T-$périodique est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) si elle est continue (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$) sur une période.

Espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, $T-$périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Intégrale sur une période d'une fonction $T-$périodique et continue par morceaux.

2. Cœfficients de Fourier.

Cœfficients de Fourier trigonométriques d'une fonction f : $a_0(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$, et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$:

$$a_k(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad b_k(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)\,\mathrm{d}t$$

avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Cas des fonctions $2\pi-$périodiques, paires, impaires.

Dans le cas des fonctions vérifiant $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$, tous les cœfficients d'indices pairs sont nuls.

Sommes partielles de Fourier d'une fonction f, définies pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\big) \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

3. Structure hilbertienne.

L'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles, $T-$périodiques et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un espace préhilbertien.

La famille $\mathscr{F}_n = \left\{x \mapsto 1,\ x \mapsto \sqrt{2}\cos(k\omega x),\ x \mapsto \sqrt{2}\sin(k\omega x),\ k \in [\![1, n]\!]\right\}$ est une famille orthonormée de cet espace préhilbertien.

La somme partielle de Fourier $S_n(f)$ s'interprète alors comme la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}_n$.

4. Théorèmes de convergence.

Théorème de Parseval : si f est une fonction $T-$périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

Théorème de Dirichlet : si f est une fonction $T-$périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier converge en tout point et :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\big(f(t+h) + f(t-h)\big)$$

Cas où f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Les démonstrations sont hors programme.

Les étudiants doivent savoir appliquer ces résultats pour calculer la somme de certaines séries numériques.