PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 13

CHAPITRE 11 : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

0. Revoir les équations différentielles linéaire d'ordre 2 à cœfficients constants

Théorème

On considère l'équation différentielle homogène : $y"(t) + ay'(t) + by(t) = 0$.
On appelle équation caractéristique associée à l'équation homogène l'équation :

$$r^2 + ar + b = 0 \text{ et on note } \Delta \text{ son discriminant}$$

- Si $\Delta > 0$: les racines simples de l'équation caractéristique sont r_1 et r_2 et y est définie sur I par :
$$y(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
- Si $\Delta = 0$: la racine double de l'équation caractéristique est r_0 et y est définie sur I par :
$$y(t) = \lambda e^{r_0 t} + \mu t e^{r_0 t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
- Si $\Delta < 0$: les racines simples de l'équation caractéristique sont $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ et y est définie par :
$$y(t) = e^{\alpha t}\big(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)\big), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

1. Équations différentielles linéaire d'ordre 1

Théorème de Cauchy

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soient $t \mapsto a(t)$ et $t \mapsto b(t)$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Soit t_0 un élément de I et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une **unique** solution $t \mapsto y(t)$.

Solutions de l'équation homogène. Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Structure des solutions de l'équation avec second membre. Principe de superposition. Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante dans les cas les plus délicats. Savoir reconnaître les cas plus simples, lorsque les cœfficients sont constants par exemple.

2. Equations différentielles scalaires d'ordre 2

Théorème de Cauchy

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soient $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$ et $t \mapsto c(t)$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Soit t_0 un élément de I et α, β deux réels. Le problème :

$$\begin{cases} y" + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

admet une **unique** solution $t \mapsto y(t)$.

Démonstration hors programme.

Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $y" + a(t)y' + b(t)y = 0$ sur un intervalle où a et b sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes.

Equation avec second membre : $y" + a(t)y' + b(t)y = c(t)$; principe de superposition.

3. Méthodes de recherche de solutions particulières.

Méthode de variation de la constante ou méthode de Lagrange : lorsqu'une solution h de l'équation homogène est connue, on recherche une solution particulière y définie par $y(t) = z(t)h(t)$.

La méthode de variation des deux constantes est hors programme

Recherche d'une solution particulière développable en série entière.