PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 14

CHAPITRE 11 : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Équations différentielles linéaire d'ordre 1.

Théorème de Cauchy

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soient $t \mapsto a(t)$ et $t \mapsto b(t)$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Soit t_0 un élément de I et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une **unique** solution $t \mapsto y(t)$.

Solutions de l'équation homogène. Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Structure des solutions de l'équation avec second membre. Principe de superposition. Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante dans les cas les plus délicats. Savoir reconnaître les cas plus simples, lorsque les cœfficients sont constants par exemple.

2. Equations différentielles scalaires d'ordre 2.

Théorème de Cauchy

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soient $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$ et $t \mapsto c(t)$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Soit t_0 un élément de I et α, β deux réels. Le problème :

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

admet une **unique** solution $t \mapsto y(t)$.

Démonstration hors programme.

Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sur un intervalle où a et b sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes.

Equation avec second membre : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$; principe de superposition.

3. Méthodes de recherche de solutions particulières.

Méthode de variation de la constante ou méthode de Lagrange : lorsqu'une solution h de l'équation homogène est connue, on recherche une solution particulière y définie par $y(t) = z(t)h(t)$.

La méthode de variation des deux constantes est hors programme

Recherche d'une solution particulière développable en série entière.

4. Systèmes différentiels linéaires à cœfficients constants.

Ecriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice réelle ou complexe de taille $n \times n$ à cœfficients constants.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Structure de l'ensemble des solutions.

Démonstration hors programme.

Pratique de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable ou trigonalisable.

Comportement asymptotique des solutions en fonction du signe de la partie réelle des valeurs propres de A dans la cas où A est diagonalisable.

5. Equations différentielles d'ordre n à cœfficients constants

Equivalence entre une équation linéaire scalaire d'ordre n et un système de n équations d'ordre 1.

Cas particulier des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à cœfficients constants.