Programme de colle semaine n° 16

Chapitre 12 : Fonctions de plusieurs variables

1. Topologie de $\mathbb{R}^n$, pour $n=2$ ou $n=3$.

Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.
Boules. Partie bornée de $\mathbb{R}^n$. Partie ouverte, partie fermée.
Point intérieur, point extérieur, point adhérent. Frontière (ou bord) d'une partie de $\mathbb{R}^n$.
Les caractérisations séquentielles sont hors programme.

2. Limite et continuité.

Limite en un point adhérent, continuité en un point, continuité sur une partie. Opérations.
L'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du programme.
Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes.

3. Dérivées partielles, applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur une partie ouverte.

Dérivées partielles d'ordre 1. Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$ ou $\mathrm{D}_i\, f(a)$.
La notion de différentielle en un point est hors programme.
Gradient. Notation ∇f. Point critique. Applications de classe $\mathscr{C}^1$. Opérations.
Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

4. Extremums locaux d'une fonction de deux variables

Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique. Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée.

5. Dérivation et composition.

Dérivée de $t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$. Dérivées partielles de $(x,y) \mapsto g\big(u(x,y), v(x,y)\big)$.
Cas particulier des coordonnées polaires.

6. Dérivées d'ordre 2.

Dérivées partielles d'ordre 2. Laplacien. Applications de classe $\mathscr{C}^2$. Opérations. Théorème de Schwarz.

7. Equations aux dérivées partielles.

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = h(x,y) \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = g(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = h(x,y) \end{array} \right.$$

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires.
A titre d'exemple, nous avons étudié l'équation de propagation et l'équation de la chaleur.

8. Applications géométriques.

Courbe implicite du plan définie par une équation $f(x,y)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Cas particulier des courbes d'équation $y=g(x)$.
Point régulier. Tangente en un point régulier définie comme la droite orthogonale au gradient et passant pas le point.
Démonstration hors programme.
Surface implicite définie par une équation $f(x,y,z)=0$ avec f de classe $\mathscr{C}^1$. Cas particulier des surfaces d'équation $z=g(x,y)$.
Point régulier. Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passsant par le point.
Position relative locale entre une surface d'équation $z=g(x,y)$ et son plan tangent.