

PROGRAMME DE COLLE SEMAINE 18

CHAPITRE 6 : ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS**1. Produit scalaire et norme.**

Définition du produit scalaire : soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, un produit scalaire est une application : $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, bilinéaire, symétrique, positive et définie-positive.

Notations : $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$, $x \cdot y$

Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle un espace préhilbertien réel; de plus, si E est de dimension finie, on dit que E est un espace euclidien.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.

La norme associée à un produit scalaire est définie par $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$; distance associée.

Propriétés : règle du parallélogramme, identités de polarisation, théorème d'Al Kashi, théorème de Pythagore.

2. Orthogonalité.

Deux vecteurs sont orthogonaux si $\langle u, v \rangle = 0$; sous-espaces orthogonaux; orthogonal d'un sous-espace vectoriel F , notation $F^\perp$.

Famille orthogonale, famille orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Tout espace vectoriel de dimension finie ou tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien possède une base orthonormale.

Détermination des coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale; expression du produit scalaire et de la norme.

3. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie; expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.

Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui minimise $\|x - y\|$ avec $y \in F$. Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.

CHAPITRE 7 : ISOMÉTRIES D'UN ESPACE EUCLIDIEN**1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien.**

Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme :

$$\forall u \in E, \|f(u)\| = \|u\|$$

Un endomorphisme d'un espace euclidien est orthogonal s'il conserve le produit scalaire :

$$\forall (u, v) \in E^2, \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

Une isométrie vectorielle est un endomorphisme orthogonal. Un endomorphisme orthogonal est un automorphisme. Caractérisation d'une isométrie vectorielle par l'image d'une base orthonormale.

Symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace, réflexion.

Groupe orthogonal, notation $O(E)$. La définition axiomatique des groupes est hors programme.

Si un sous-espace est stable par une isométrie vectorielle, alors son orthogonal est stable par cette isométrie.

2. Matrices orthogonales.

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si $M^T M = I_n$.

Groupe orthogonal d'ordre n . Notation $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$.

Caractérisation d'une matrice orthogonale à l'aide des colonnes ou des lignes.

Si $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale de E , une base $\mathcal{B}$ est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est orthogonale.

Si $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E , alors u est une isométrie vectorielle de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ est orthogonale.

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle. Isométrie vectorielle positive ou directe, isométrie vectorielle négative ou indirecte. Groupe spécial orthogonal. Notation $SO_n(\mathbb{R})$, $SO(n)$ et $SO(E)$.

Application à l'orientation d'un espace euclidien et à la notion de base orthonormale directe.

3. Classification en dimension 2 et 3.

Soit M une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que M soit de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Soit M une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que M soit semblable à une matrice de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad SR(\theta) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Détermination des caractéristiques géométriques des ces isométries.

4. Matrices symétriques réelles.

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Théorème spectral : pour toute matrice symétrique réelle A il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $D = P^{-1}AP = P^T AP$.

Les démonstrations sont hors programme. La notion d'endomorphisme symétrique est hors programme.

CHAPITRE 11 : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Équations différentielles linéaire d'ordre 1.

Théorème de Cauchy

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soient $t \mapsto a(t)$ et $t \mapsto b(t)$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Soit t_0 un élément de I et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une **unique** solution $t \mapsto y(t)$.

Solutions de l'équation homogène. Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Structure des solutions de l'équation avec second membre. Principe de superposition. Recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante dans les cas les plus délicats. Savoir reconnaître les cas plus simples, lorsque les coefficients sont constants par exemple.

2. Equations différentielles scalaires d'ordre 2.

Théorème de Cauchy

Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point. Soient $t \mapsto a(t)$, $t \mapsto b(t)$ et $t \mapsto c(t)$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Soit t_0 un élément de I et α, β deux réels. Le problème :

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

admet une **unique** solution $t \mapsto y(t)$.

Démonstration hors programme.

Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sur un intervalle où a et b sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes.

Equation avec second membre : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$; principe de superposition.

3. Méthodes de recherche de solutions particulières.

Méthode de variation de la constante ou méthode de Lagrange : lorsqu'une solution h de l'équation homogène est connue, on recherche une solution particulière y définie par $y(t) = z(t)h(t)$.

La méthode de variation des deux constantes est hors programme

Recherche d'une solution particulière développable en série entière.

4. Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Ecriture sous la forme $X' = AX$ où A est une matrice réelle ou complexe de taille $n \times n$ à coefficients constants.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Structure de l'ensemble des solutions.

Démonstration hors programme.

Pratique de la résolution dans le cas où la matrice A est diagonalisable ou trigonalisable.

Comportement asymptotique des solutions en fonction du signe de la partie réelle des valeurs propres de A dans le cas où A est diagonalisable.

5. Equations différentielles d'ordre n à coefficients constants

Equivalence entre une équation linéaire scalaire d'ordre n et un système de n équations d'ordre 1.

Cas particulier des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.