

PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 19

CHAPITRE 14 : VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES

1. Variables aléatoires sur un univers fini.

Définition d'une variable aléatoire sur un univers fini. Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Transformée d'une variable aléatoire.

Espérance. Théorème de transfert. Linéarité de l'espérance.

Variance. Ecart-type. Formule de Kœnig-Huygens.

Lois usuelles : Loi certaine. Loi uniforme. Loi de Bernoulli. Loi binomiale.

2. Couple de variables aléatoires.

Loi conjointe ou loi du couple : la loi conjointe de X et de Y est la loi de (X, Y) :

$$\begin{aligned} X(\Omega) \times Y(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ (x_i, y_j) &\mapsto P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \end{aligned}$$

Lois marginales d'un couple de variables aléatoires. Les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y .

Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

Couple de variables aléatoires indépendantes : pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

Si X et Y sont indépendantes, pour tout $(A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P((X, Y) \in A \times B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

Démonstration hors programme.

Si X et Y sont indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Démonstration hors programme.

Variables aléatoires mutuellement indépendantes : pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Démonstration hors programme.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

3. Covariance.

Espérance d'un produit : soit (X, Y) un couple de variables aléatoires, alors

$$E(XY) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_i y_j P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

Covariance d'un couple de variables aléatoires : $\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Relation : $V(X + Y) = V(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y)$.

Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad ; \quad \text{Cov}(X, Y) = 0 \quad ; \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Les réciproques sont fausses en général.



4. Variables aléatoires discrètes.

Une variable aléatoire réelle X est une application définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$.

On se limitera aux variables aléatoires définies sur un univers dénombrable.

Loi de probabilité P_X . L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans Ω .

Fonction de répartition : $F_X(x) = P(X \leq x)$. Croissance.

La connaissance des propriétés des fonctions de répartition n'est pas exigible. Les étudiants doivent savoir déterminer la loi de probabilité à partir de la fonction de répartition.

Image d'une variable aléatoire par une application. Si f est une application à valeurs réelles, on admet que $f(X)$ est une variable aléatoire et on se limite aux cas simples du type X^2 et X^3 .

La variable aléatoire réelle X est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle espérance de X , notée $E(X)$, le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.

Linéarité de l'espérance. Théorème de transfert.

Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie. Lorsque X^2 est d'espérance finie, on appelle variance de X , notée $V(X)$, le réel $E(X^2) - (E(X))^2$. Ecart type d'une variable aléatoire. $V(aX + b) = a^2 V(X)$ pour a et b deux réels donnés. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

L'inégalité de Markov n'est pas au programme.

5. Lois usuelles.

Pour $p \in]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$

La loi géométrique peut être interprétée comme le rang du premier succès dans une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, loi de Poisson de paramètre λ : la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p_n) et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

La démonstration a été vue, mais est hors programme

DÉMONSTRATIONS À CONNAÎTRE :

- ★ Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.
- ★ Si X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- ★ Si X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(p)$, alors $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.