

PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 20

CHAPITRE 5 : INTÉGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE

Rappels sur l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Théorème fondamental du calcul intégral : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I , et soit $a \in I$.

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Conséquences :

① Si F est une primitive quelconque de f sur I alors $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$.

② Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors $\int_a^b f'(t) dt = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$.

1. Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Définition d'une intégrale convergente : pour $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, +\infty[$; on suppose que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq g(t)$.

Si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge; si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

2. Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Adaptation de la définition d'une intégrale convergente pour une fonction continue sur un intervalle de la forme $]a, b]$ ou $[a, b[$.

Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$ existe et est finie (autrement dit si on peut prolonger f par continuité en a), alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Intégrales de références :

$$\int_0^1 t^{-\alpha} dt ; \int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt ; \int_0^1 \ln t dt ; \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$$

Relation de Chasles. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Théorème de changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction φ strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ avec $a = \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(u)$ et $b = \lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(u)$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

Intégration par parties : Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ avec $b > a$ ou $b = +\infty$.

Si $\lim_{t \rightarrow b} u(t)v(t)$ existe et est finie, alors les intégrales $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ et $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ sont de même nature et, si elles convergent, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

3. Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est **intégrable** sur I si son intégrale sur I est absolument convergente.

Soit f une fonction continue et intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. On a : $|\int_I f(t) dt| \leq \int_I |f(t)| dt$.

Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Si f est intégrable sur I , alors $\int_I f(t) dt$ converge.

La réciproque est fautive en général; par exemple l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge, mais la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$. Mais l'étude de la semi-convergence n'est pas au programme.

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$.

Si $f \sim_{t \rightarrow +\infty} g$, alors l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$ est équivalente à l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$.

Si $|f| \leq |g|$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique à l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

Si $f(t) = o(g(t))$ $_{t \rightarrow +\infty}$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique à l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

Si f est une fonction continue et intégrable sur I et telle que $\int_I |f(t)| dt = 0$, alors f est identiquement nulle sur I .