

PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 21

CHAPITRE 3 : RÉDUCTION D'ENDOMORPHISME

1. Eléments propres et polynôme caractéristique.

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Un scalaire λ est une **valeur propre** de φ s'il existe un vecteur non nul u de E tel que $\varphi(u) = \lambda u$.

Un vecteur non nul u de E est un **vecteur propre** de φ s'il existe un scalaire λ tel que $\varphi(u) = \lambda u$.

On appelle **sous-espace propre** de φ associé à la valeur propre λ l'ensemble E_λ des vecteurs u de E tels que $\varphi(u) = \lambda u$. On a alors : $E_\lambda = \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - \varphi)$.

L'ensemble des valeurs propres de φ est appelé **spectre** de φ et est noté $\text{Sp}(\varphi)$.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice ; $\chi_\varphi(x) = \det(x \text{Id}_E - \varphi)$. Les valeurs propres de φ sont les racines de $\chi_\varphi(x)$.

Ordre de multiplicité des valeurs propres.

Lien entre polynôme annulateur et spectre : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Π un polynôme annulateur de A . Alors toute valeur propre λ de A est racine de Π

2. Endomorphismes et matrices diagonalisables.

Un endomorphisme φ est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de vecteurs propres. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des sous-espaces propres est égale à E . Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si sa matrice canoniquement associée A est semblable à une matrice diagonale.

Un endomorphisme est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{son polynôme caractéristique est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et} \\ \text{pour chaque valeur propre, } \dim(E_\lambda) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \end{array} \right.$$

Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simple est diagonalisable.

Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

3. Endomorphismes et matrices trigonalisables.

Un endomorphisme φ est **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est triangulaire supérieure.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est trigonalisable.

Lorsque le polynôme caractéristique de φ est scindé, expression de la trace de φ et du déterminant de φ à l'aide des valeurs propres.

4. Applications de la réduction.

Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Etude des suites numériques vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Traduction sous la forme $X_{n+1} = AX_n$. Equation caractéristique. Base des solutions.

Systèmes couplés de suites récurrentes.

Systèmes différentiels d'ordre 1.