

## PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 22

## CHAPITRE 12 : FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

**1. Topologie de  $\mathbb{R}^n$ , pour  $n = 2$  ou  $n = 3$ .**

Norme et distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ .

Boules. Partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ . Partie ouverte, partie fermée.

Point intérieur, point extérieur, point adhérent. Frontière (ou bord) d'une partie de  $\mathbb{R}^n$ .

*Les caractérisations séquentielles sont hors programme.*

**2. Limite et continuité.**

Limite en un point adhérent, continuité en un point, continuité sur une partie. Opérations.

*L'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du programme.*

Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée est bornée et atteint ses bornes.

**3. Dérivées partielles, applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur une partie ouverte.**

Dérivées partielles d'ordre 1. Notations  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ,  $\partial_i f(a)$  ou  $D_i f(a)$ .

*La notion de différentielle en un point est hors programme.*

Gradient. Notation  $\nabla f$ . Point critique. Applications de classe  $\mathcal{C}^1$ . Opérations.

Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**4. Extremums locaux d'une fonction de deux variables**

Si une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  admet un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique. Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie fermée bornée.

**5. Dérivation et composition.**

Dérivée de  $t \mapsto f(x(t), y(t))$ . Dérivées partielles de  $(x, y) \mapsto g(u(x, y), v(x, y))$ .

Cas particulier des coordonnées polaires.

**6. Dérivées d'ordre 2.**

Dérivées partielles d'ordre 2. Laplacien. Applications de classe  $\mathcal{C}^2$ . Opérations. Théorème de Schwarz.

**7. Equations aux dérivées partielles.**

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = h(x, y) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = h(x, y) \end{cases}$$

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, de la forme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

*Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires.*

*A titre d'exemple, nous avons étudié l'équation de propagation et l'équation de la chaleur.*

**8. Applications géométriques.**

Courbe implicite du plan définie par une équation  $f(x, y) = 0$  avec  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Cas particulier des courbes d'équation  $y = g(x)$ .

Point régulier. Tangente en un point régulier définie comme la droite orthogonale au gradient et passant par le point.

*Démonstration hors programme.*

Surface implicite définie par une équation  $f(x, y, z) = 0$  avec  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Cas particulier des surfaces d'équation  $z = g(x, y)$ .

Point régulier. Plan tangent à une surface en un point régulier défini comme le plan orthogonal au gradient et passant par le point.

Position relative locale entre une surface d'équation  $z = g(x, y)$  et son plan tangent.