

PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 2

CHAPITRE 2 : COMPLÉMENTS D'ALGÈBRE LINÉAIRE.**1. Applications linéaires.**

Définition d'une application linéaire, d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme.

Noyau et image d'une application linéaire. Rang d'une application linéaire.

Matrice d'une application linéaire dans une base.

Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives. Théorème du rang.

2. Familles de vecteurs.

Famille libre, génératrice, base. Image d'une famille libre par une application linéaire injective. Toute famille de polynômes non nuls à degrés échelonnés est libre.

3. Sous-espaces vectoriels.

Somme directe de sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels supplémentaires. Hyperplan.

Sous-espaces stables.

4. Applications linéaires particulières

Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires. Matrices dans une base adaptée. Caractérisation par les relations $p \circ p = p$ et $s \circ s = \text{id}_E$. Détermination des éléments caractéristiques d'un projecteur, d'une symétrie.

5. Matrices.

Trace d'une matrice.

Transposée d'une matrice. Matrices symétriques. Matrices antisymétriques.

DÉMONSTRATIONS À CONNAÎTRE :

- ★ L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.
- ★ Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- ★ Déterminer une base du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.