PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 17

CHAPITRE 13 : PROBABILITÉS SUR UN UNIVERS DÉNOMBRABLE

1. Espaces probabilisés dénombrables.

Un ensemble est dénombrable s'il peut être décrit en extension par : $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Dénombrabilité de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$.

Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.

Expérience aléatoire, événements. Suite infinie d'événements, union et intersection. Système complet d'événements.

On appelle probabilité sur Ω toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles : $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

2. Indépendance et conditionnement.

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

On la note aussi $P(A|B)$. L'application P_B est une probabilité.

Formule des probabilités composées :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times \cdots \times P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge, et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$$

Formule de Bayes : si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors,

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Indépendance de deux événements : deux événements A et B sont indépendants si

$$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$$

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A|B) = P(A)$.

Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements. L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.