PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 6

CHAPITRE 5 : INTÉGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE

Rappels sur l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Théorème fondamental du calcul intégral : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I, et soit $a \in I$.
La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Conséquences :
① Si F est une primitive quelconque de f sur I alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$.
② Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I alors $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)\big]_a^b = f(b) - f(a)$.

1. Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Définition d'une intégrale convergente : pour $f : [a, +\infty[\to \mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, +\infty[$; on suppose que $\forall t \in [a, +\infty[$, $f(t) \leqslant g(t)$.
Si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge ; si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

2. Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Adaptation de la définition d'une intégrale convergente pour une fonction continue sur un intervalle de la forme $]a, b]$ ou $[a, b[$.
Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{t \to a^+} f(t)$ existe et est finie (autrement dit si on peut prolonger f par continuité en a), alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Intégrales de références :

$$\int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

Relation de Chasles. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.
Théorème de changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction φ strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ avec $a = \lim\limits_{t \to \alpha} \varphi(u)$ et $b = \lim\limits_{t \to \beta} \varphi(u)$ sont de même nature et égales en cas de convergence.
Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
Intégration par parties : Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b[$ avec $b > a$ ou $b = +\infty$.
Si $\lim\limits_{t \to b} u(t)v(t)$ existe et est finie, alors les intégrales $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b u(t)v'(t)$ sont de même nature et, si elles convergent, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

DÉMONSTRATIONS À CONNAÎTRE :

- ⋆ $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut -1.
- ⋆ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $\alpha > 0$, et, dans ce cas vaut $\dfrac{1}{\alpha}$.
- ⋆ $\displaystyle\int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $\alpha < 1$, et, dans ce cas, vaut $\dfrac{1}{1-\alpha}$.
- ⋆ $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$ et, dans ce cas, vaut $\dfrac{1}{\alpha - 1}$.