PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 7

CHAPITRE 5 : INTÉGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE

Rappels sur l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Théorème fondamental du calcul intégral : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I, et soit $a \in I$.
La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
Conséquences :
① Si F est une primitive quelconque de f sur I alors $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$.
② Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I alors $\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)\big]_a^b = f(b) - f(a)$.

1. Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$

Définition d'une intégrale convergente : pour $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,+\infty[$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.
Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a,+\infty[$; on suppose que $\forall t \in [a,+\infty[$, $f(t) \leqslant g(t)$.
Si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge ; si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

2. Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Adaptation de la définition d'une intégrale convergente pour une fonction continue sur un intervalle de la forme $]a,b]$ ou $[a,b[$.
Soit f une fonction continue sur $]a,b]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{t\to a^+} f(t)$ existe et est finie (autrement dit si on peut prolonger f par continuité en a), alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Intégrales de références :

$$\int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_1^{+\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

Relation de Chasles. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.
Théorème de changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction φ strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha,\beta[$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ avec $a = \lim\limits_{t\to\alpha}\varphi(u)$ et $b = \lim\limits_{t\to\beta}\varphi(u)$ sont de même nature et égales en cas de convergence.
Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.
Intégration par parties : Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$ avec $b > a$ ou $b = +\infty$.
Si $\lim\limits_{t\to b} u(t)v(t)$ existe et est finie, alors les intégrales $\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b u(t)v'(t)$ sont de même nature et, si elles convergent, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b \big|f(t)\big|dt$ est convergente.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que f est **intégrable** sur I si son intégrale sur I est absolument convergente.
Soit f une fonction continue et intégrable sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. On a : $\big|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\big| \leqslant \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
Soit f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Si f est intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
La réciproque est fausse en général ; par exemple l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge, mais la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$. Mais l'étude de la semi-convergence n'est pas au programme.
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$.
Si $f \underset{t\to+\infty}{\sim} g$, alors l'intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$ est équivalente à l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$.
Si $\big|f\big| \leqslant \big|g\big|$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique à l'intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$.
Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique à l'intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$.
Si f une fonction continue et intégrable sur I et telle que $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle sur I.