

PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 3

CHAPITRE 3 : RÉDUCTION D'ENDOMORPHISME

1. Eléments propres et polynôme caractéristique.

Soit φ un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Un scalaire λ est une **valeur propre** de φ s'il existe un vecteur non nul u de E tel que $\varphi(u) = \lambda u$.

Un vecteur non nul u de E est un **vecteur propre** de φ s'il existe un scalaire λ tel que $\varphi(u) = \lambda u$.

On appelle **sous-espace propre** de φ associé à la valeur propre λ l'ensemble E_λ des vecteurs u de E tels que $\varphi(u) = \lambda u$. On a alors : $E_\lambda = \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - \varphi)$.

L'ensemble des valeurs propres de φ est appelé **spectre** de φ et est noté $\text{Sp}(\varphi)$.

Lien entre les valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme et les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice de l'endomorphisme dans une base.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice ; $\chi_\varphi(x) = \det(x \text{Id}_E - \varphi)$. Les valeurs propres de φ sont les racines de $\chi_\varphi(x)$.

Ordre de multiplicité des valeurs propres.

Lien entre polynôme annulateur et spectre : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Π un polynôme annulateur de A . Alors toute valeur propre λ de A est racine de Π

2. Endomorphismes et matrices diagonalisables.

Un endomorphisme φ est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Une matrice A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de vecteurs propres. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des sous-espaces propres est égale à E . Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si sa matrice canoniquement associée A est semblable à une matrice diagonale.

Un endomorphisme est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{son polynôme caractéristique est scindé sur } \mathbb{K} \\ \text{pour chaque valeur propre, } \dim(E_\lambda) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \end{cases}$$

Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simple est diagonalisable.

Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthogonale de vecteurs propres.

DÉMONSTRATIONS À CONNAÎTRE :

- ★ Une famille composée de p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est une famille libre.
- ★ λ est valeur propre de φ si et seulement $\chi_\varphi(\lambda) = 0$, où χ_φ est le polynôme caractéristique de φ .
- ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et Π un polynôme annulateur de A . Alors toute valeur propre λ de A est racine de Π