

PROGRAMME DE COLLE SEMAINE n° 6

CHAPITRE 5 : INTÉGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE

Rappels sur l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

Théorème fondamental du calcul intégral : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I , et soit $a \in I$.

La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Conséquences :

① Si F est une primitive quelconque de f sur I alors $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$.

② Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I alors $\int_a^b f'(t) dt = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$.

1. Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Définition d'une intégrale convergente : pour $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a, +\infty[$; on suppose que $\forall t \in [a, +\infty[, f(t) \leq g(t)$.

Si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge; si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

2. Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

Adaptation de la définition d'une intégrale convergente pour une fonction continue sur un intervalle de la forme $]a, b]$ ou $[a, b[$.

Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$ existe et est finie (autrement dit si on peut prolonger f par continuité en a), alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Intégrales de références :

$$\int_0^1 t^{-\alpha} dt ; \int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt ; \int_0^1 \ln t dt ; \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$$

Relation de Chasles. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Théorème de changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction φ strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]\alpha, \beta[$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ avec $a = \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)$ et $b = \lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t)$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

Intégration par parties : Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ avec $b > a$ ou $b = +\infty$.

Si $\lim_{t \rightarrow b} u(t)v(t)$ existe et est finie, alors les intégrales $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ et $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ sont de même nature et, si elles convergent, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

DÉMONSTRATIONS À CONNAÎTRE :

★ $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et vaut -1 .

★ $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si, et seulement si $\alpha > 0$, et, dans ce cas vaut $\frac{1}{\alpha}$.

★ $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$ converge si, et seulement si $\alpha < 1$, et, dans ce cas, vaut $\frac{1}{1-\alpha}$.

★ $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ converge si, et seulement si $\alpha > 1$ et, dans ce cas, vaut $\frac{1}{\alpha-1}$.