

DS 2 : électronique

Durée : 4h

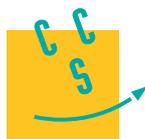
Indications

- Le sujet est divisé en 3 parties **indépendantes**.
 - Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
 - Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
 - Indiquer clairement le numéro de la question (exemple question 5 de la partie A noter "A5", question 21 de la partie B noter "B21", etc.), aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.
-

Partie A

1. Définir les conditions de Gauss.
2. Donner la quantité de matière $n(t)$ d'une espèce chimique à un instant t à partir de sa quantité de matière initiale n_0 et de l'avancement de la réaction qu'elle subit $\xi(t)$.
3. Donner l'expression de la quantité de mouvement.
4. Donner l'expression du pH d'une solution d'acide faible ou d'une base faible.
5. Donner l'expression de la force de Laplace exercée sur un élément mobile $d\ell$ d'un circuit.

Partie B



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Physique-chimie 2

TSI

2019

4 heures

Calculatrice autorisée

Accordeur, TGV et effet Hall

Ce sujet comporte trois parties indépendantes :

- Accordeur de guitare ;
- Dimensionnement du chauffage d'une voiture de TGV ;
- Transferts de charges par effet Hall.

Il est accompagné d'un document réponse utilisé dans la partie I.

I Accordeur de guitare

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau 1.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

Tableau 1 Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

- On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Ce principe général est schématisé sur la figure 1.

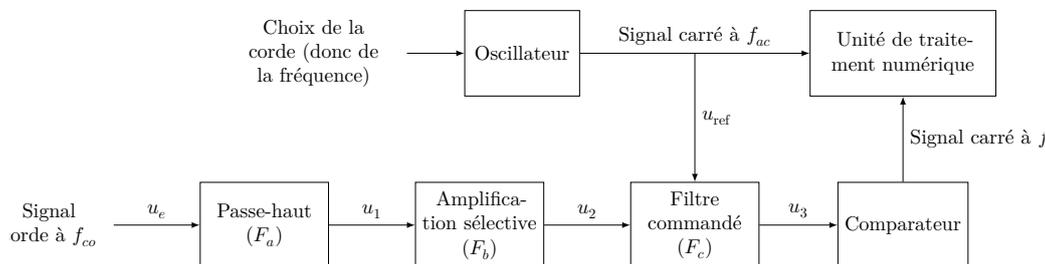


Figure 1 Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde.

I.A – Le signal

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

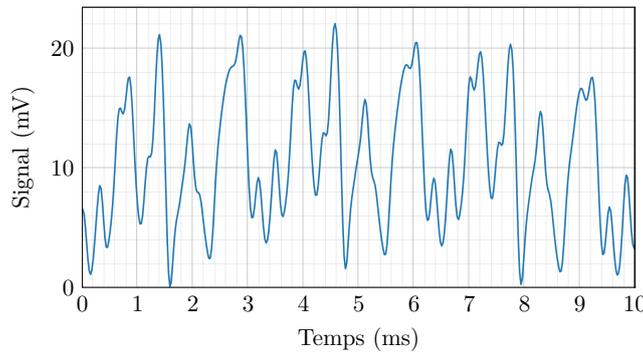


Figure 2 Signal de la guitare

- Q 1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
- Q 2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
- Q 3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
- Q 4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

I.B – Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure 3 (filtre (F_a)).

- Q 5. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.
- Q 6. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
- Q 7. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
- Q 8. On a choisi $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100 \text{ nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

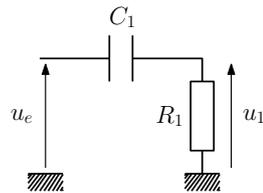


Figure 3 Filtre (F_a)

I.C – Deuxième filtre

Dans cette sous-partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

I.C.1) Préambule

Soit le filtre de la figure 4(a).

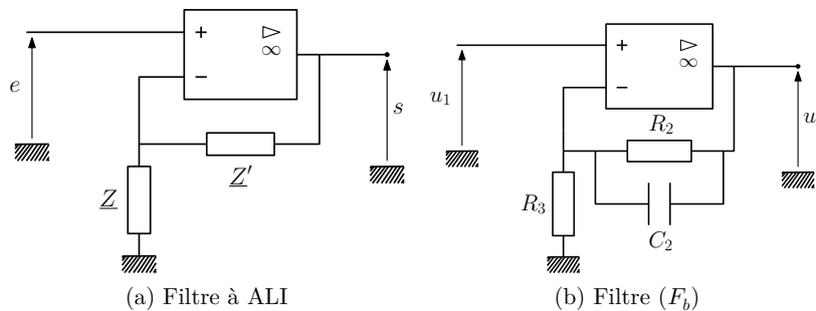


Figure 4 Deux filtres

- Q 9. Exprimer sa fonction de transfert \underline{H} en fonction de \underline{Z} et \underline{Z}' .
- Q 10. Que devient \underline{H} si \underline{Z} et \underline{Z}' sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z}' = R'$) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

I.C.2) Amplification (légèrement) sélective

En sortie du filtre de la figure 3 le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure 4(b) (filtre (F_b)).

- Q 11.** Quelle est l'impédance Z_{cq} de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?
- Q 12.** Dédurre de la question 9 l'expression de la fonction de transfert \underline{H}_2 de ce filtre en fonction de R_2 , R_3 et C_2 .
- Q 13.** Mettre \underline{H}_2 sous la forme

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$$

et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

- Q 14.** Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence ? en haute fréquence ?
- Q 15.** Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$ et $C_2 = 470 \text{ pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

I.D – Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigüe que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} . Ce type de commande (à capacité commutée) sera précisé dans la sous-partie I.F.

I.D.1) Diagramme de Bode

La figure 5 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

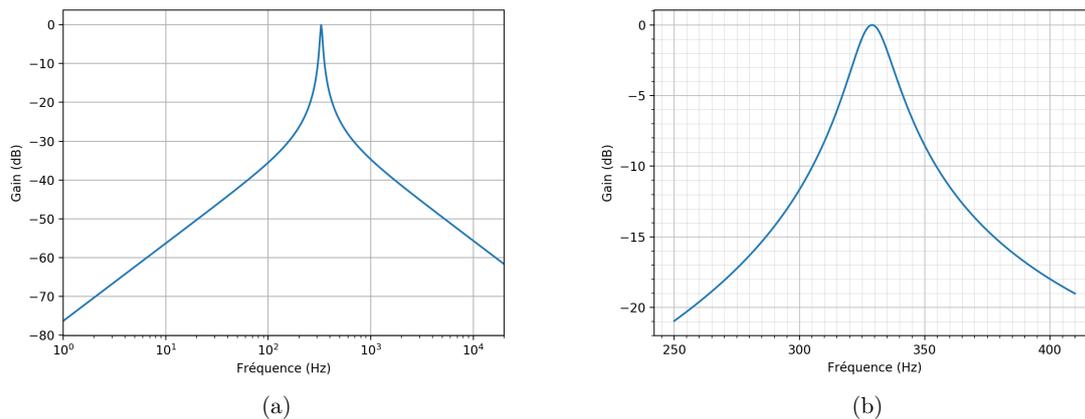


Figure 5 Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

- Q 16.** Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?
- Q 17.** Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.
- Q 18.** Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315 \text{ Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

I.D.2) Analyse spectrale

La figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 2.

- Q 19.** Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.
- Q 20.** En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure 7 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).
- Q 21.** Même question, pour la sortie du filtre (F_b).
- Q 22.** Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

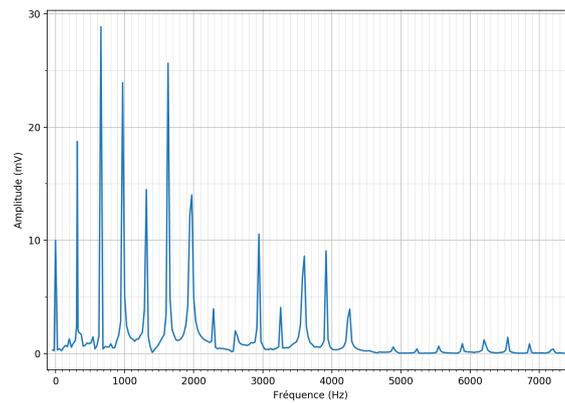
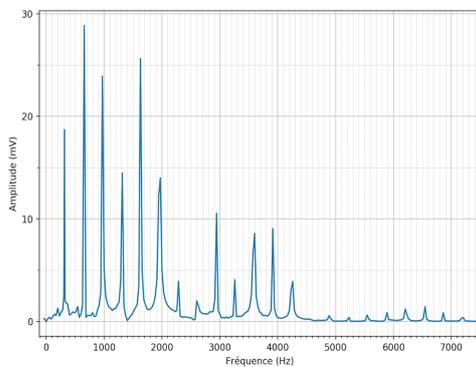
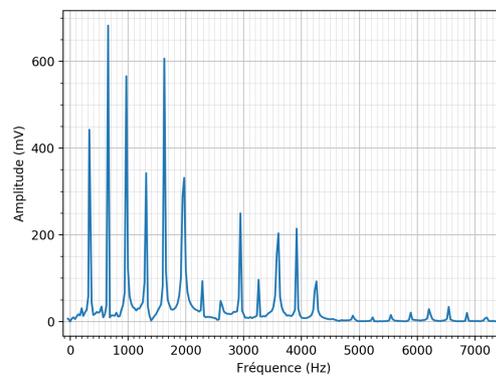


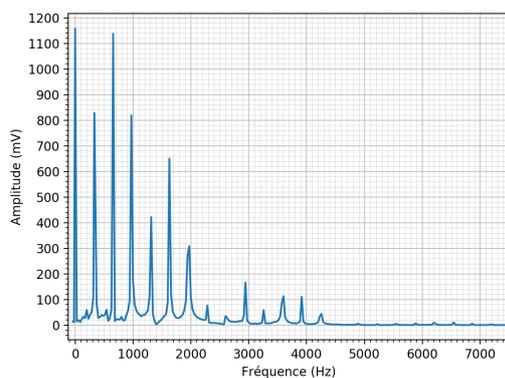
Figure 6 Spectre du signal d'entrée



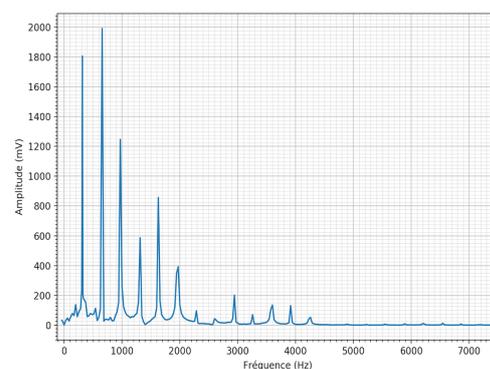
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 7 Spectres

I.E – Mise en forme

À la sortie de l'étage précédent, le signal est donc proche d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} et d'amplitude dépendant de la force avec laquelle on a gratté la corde, mais de l'ordre du volt. Pour effectuer un traitement numérique qui permettra de comparer f_{co} à la fréquence théorique f_{ac} on souhaite fabriquer à partir du signal précédent un signal créneau de fréquence f_{co} . Pour cela, on utilise un comparateur à hystérésis, représenté figure 8.

- B1 On constate que le signal oscille d'une valeur proche de 10 mV. **La valeur moyenne est donc de 10 mV**, c'est également l'amplitude de la composante continue du signal.
- B2 On voit qu'une forme caractéristique du signal se répète deux fois entre 0,8 ms et 7,2 ms, la période de ce signal est donc

A.N.

$$T = \frac{7,2 \times 10^{-3} \text{ s} - 0,8 \times 10^{-3} \text{ s}}{2} = 3,2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

la fréquence est donc

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,2 \times 10^{-3} \text{ s}} = 3,1 \times 10^2 \text{ Hz.}$$

- B3 D'après le tableau, il s'agirait de **la corde Mi aiguë**.
- B4 Le signal, supposé périodique, ne correspond pas à un signal sinusoïdal. Or, on sait que tout signal périodique peut se mettre sous la forme d'un développement de Fourier, soit d'une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences, d'amplitudes et de phases différentes. Donc ce signal a bien des harmoniques. Les fréquences de ces harmoniques sont multiples de la fréquence du fondamental. Ce signal présente de nombreuses discontinuités, l'amplitude des harmoniques de rang élevé est donc importante.
- B5 En effectuant un pont diviseur de tension pour obtenir la tension complexe \underline{u}_1 du résistor de résistance R_1 il vient que

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_e \frac{\underline{Z}_{R_1}}{\underline{Z}_{R_1} + \underline{Z}_{C_1}} = \underline{u}_e \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \underline{u}_e \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}.$$

La fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ est donc

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_e} = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}.$$

- B6 Il s'agit d'un **filtre passe-haut** de fonction de transfert canonique

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

On peut identifier la pulsation caractéristique $\omega_1 \equiv \omega_0$ en égalisant les dénominateurs des deux expressions de la fonction de transfert

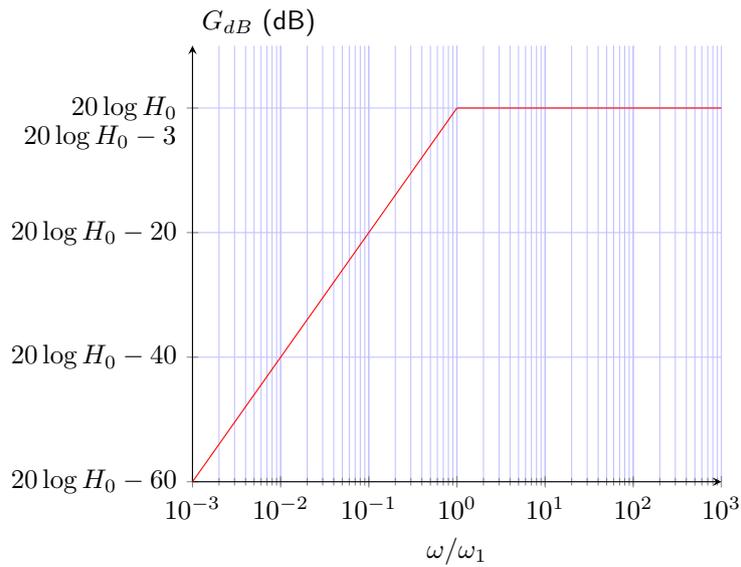
$$1 + jR_1C_1\omega = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$$

soit

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}.$$

Il s'agit de la pulsation en dessous de laquelle le gain en décibel du filtre diminue selon une droite asymptote de -20 dB lorsque les pulsations diminuent de une décade, soit la pulsation de coupure, la pulsation à partir de laquelle les basses fréquences sont coupées.

- B7 Le diagramme de Bode asymptotique relatif au gain est donné ci-dessous.



B8 La fréquence de coupure f_1 est définie telle que

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \times R_1 C_1}$$

soit

A.N.

$$f_1 = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^3 \Omega \times 100 \times 10^{-9} \text{ nF}} = 15,9 \text{ Hz.}$$

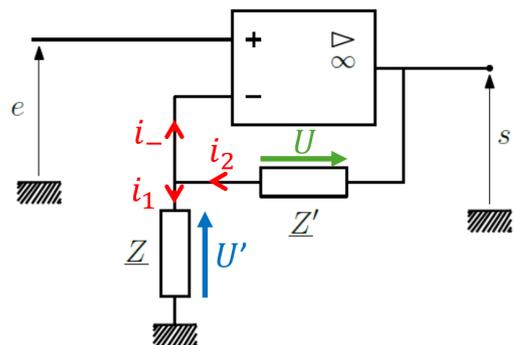
D'après l'allure du signal, ce filtre **permet de supprimer la composante continu** à $f = 0 \text{ Hz}$, seule composante ayant une fréquence inférieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut. Le signal a alors une valeur moyenne nulle.

B9 On étudie le filtre à ALI de la figure 4(a). D'après l'énoncé l'ALI fonctionne en régime linéaire.

On lit directement le potentiel de la borne non inverseuse :

$$V_+ = e.$$

On obtient le potentiel de la borne inverseuse à partir de la loi des mailles en termes de potentiels :



$$i_2 = i_1 + i_- = i_1 \quad \text{car l'ALI est idéal donc } i_- = 0$$

$$\frac{U'}{Z} = \frac{U}{Z} \quad ; \quad \frac{s - V_-}{Z'} = \frac{V_- - V_M}{Z} \quad ; \quad V_- \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{Z'} \right) = \frac{s}{Z'}$$

$$\frac{V_-}{Z} \frac{Z' + Z}{Z'} = \frac{s}{Z'} \quad ; \quad V_- = s \frac{Z}{Z' + Z}$$

Comme l'ALI fonctionne en régime linéaire, il vient que

$$\varepsilon = V_+ - V_- = 0 \quad \text{soit} \quad e - s \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}' + \underline{Z}} = 0$$

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}' + \underline{Z}}{\underline{Z}}.$$

B10 Si $\underline{Z} = R$ et $\underline{Z}' = R'$ alors

$$\underline{H} = \frac{R' + R}{R}.$$

Le montage devient un **amplificateur non inverseur**.

B11 On étudie la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 sur le filtre de figure 4(b). La loi d'association des impédances complexes en parallèle est

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_{R_2}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C_2}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}$$

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}.$$

B12 On constate que le filtre de la figure 4(b) et celui de la question 4(a) sont identiques si on considère que $\underline{Z} \equiv R_3$ et $\underline{Z}' = \underline{Z}_{\text{eq}}$. Ainsi la fonction de transfert de ce filtre est, par analogie

$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{Z}' + \underline{Z}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}} + R_3}{R_3} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} + R_3}{R_3} = \frac{\frac{R_2}{R_3}}{1 + j\omega R_2 C_2} + 1$$

$$\underline{H}_2 = \frac{\frac{R_2}{R_3}}{1 + j\omega R_2 C_2} + 1.$$

B13 On peut mettre sous la forme demandée et identifier G_0 et ω_2

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{\frac{R_2}{R_3}}{1 + j\omega R_2 C_2} = 1 + \frac{G_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2} \quad \text{et} \quad G_0 = \frac{R_2}{R_3}.$$

B14 En limite de basses fréquences, soit $\omega \rightarrow 0$

$$\underline{H}_2 \simeq \frac{\frac{R_2}{R_3}}{1 + 0} + 1 = \frac{R_2}{R_3} + 1 \equiv G_0 + 1.$$

En limite de hautes fréquence, soit $\omega \rightarrow +\infty$

$$\underline{H}_2 \simeq \frac{\frac{R_2}{R_3}}{0 + j\omega R_2 C_2} + 1 = \frac{1}{j\omega R_3 C_2} + 1 \simeq 0 + 1 = 1.$$

B15 La fréquence f_2 est telle que

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_2 C_2}$$

$$\text{A.N.} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi \times 680 \times 10^3 \, \Omega \times 470 \times 10^{-12} \, \text{F}} = 498 \, \text{Hz}.$$

$$G_0 = \frac{R_2}{R_3}$$

$$\text{A.N. } G_0 = \frac{680 \times 10^3 \Omega}{6 \times 10^3 \Omega} = 113.$$

Ce filtre **amplifie fortement les fréquences inférieures** à 500 Hz d'un facteur $G_0 = 113$ et **n'affecte pas** (n'amplifie pas ni ne réduit) **les fréquences supérieures** à 500 Hz (dans ce cas $G_0 \approx 1$).

B16 On constate qu'il s'agit d'un **filtre passe-bande** : il filtre les basses et les hautes fréquences autour d'une certaine fréquence caractéristique.

Cette fréquence est la fréquence pour laquelle le gain et le gain en décibel est maximal. Elle correspond à une valeur de 330 Hz d'après le diagramme de Bode en amplitude fourni.

B17 On peut estimer que la bande passante à -3 dB correspond à la largeur en fréquence pour laquelle le gain en décibel est supérieur au gain maximal $G_{dB}(\omega_0) - 3$ dB, soit ici -3 dB.

Toujours d'après le diagramme fourni, cette bande passante notée Δf est

$$\Delta f \approx 340 \text{ Hz} - 320 \text{ Hz} = 20 \text{ Hz}.$$

B18 La composante fondamentale est la composante de fréquence f_{co} , donc, d'après le diagramme, le gain en décibel pour une fréquence $f_{co} = 315$ Hz est $G_{dB}(f_{co}) = -6$ dB, le gain $G(f_{co})$ est défini tel que

$$G_{dB}(f_{co}) = 20 \log(G(f_{co}))$$

donc

$$G(f_{co}) = 10^{G_{dB}(f_{co})/20}.$$

A.N.

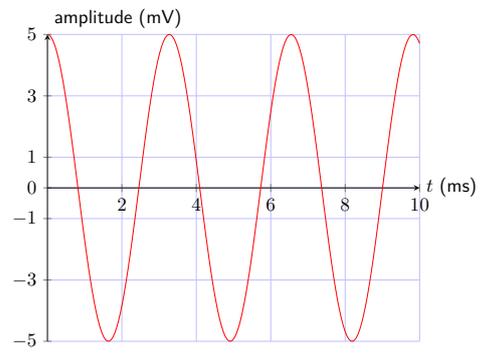
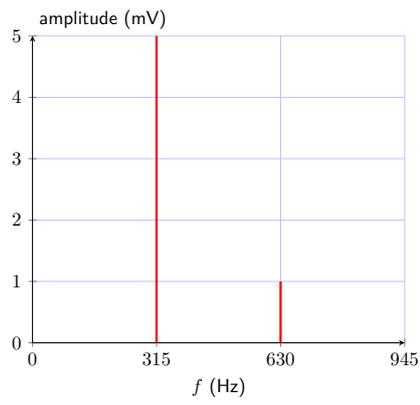
$$G(f_{co}) = 10^{-6/20} = \frac{1}{2}.$$

B19 On constate d'abord que la composante continue à 0 Hz a une amplitude de 10 mV, ce qui correspond bien à la valeur estimée au début. De plus, on observe que le fondamental, donc le pic de première fréquence après la fréquence nulle, correspond à une fréquence proche de 300 Hz, ce qui correspond également à la valeur estimée au début. Enfin, on constate que tous les harmoniques sont espacés de près de 300 Hz, donc de fréquences multiples de celle du fondamental.

B20 En sortant du premier filtre (F_a), seule la composante continue est supprimée, le spectre en sortie est donc identique au spectre d'entrée, exceptée la composante continue à 0 Hz, **il s'agit donc du spectre (a)**.

B21 On a démontré à la question 15 que le filtre (F_b) augmentait les fréquences inférieures à 500 Hz d'un facteur 100 et ne perturbait pas les fréquences supérieures. Le spectre en sortie de (F_b) doit donc être similaire au spectre en sortie de (F_a) (soit le spectre (a)) mais avec des amplitudes des fréquences des signaux à 300 Hz et 600 Hz plus grande d'un facteur 100. **Il s'agit donc du spectre (d)**.

B22 En sortant du filtre passe-bande (F_c), seule le fondamental à $f_{co} = 315$ Hz et l'harmonique de rang 2, donc de fréquence $2f_{co} = 630$ Hz, subsistent. D'après l'étude précédente, l'amplitude du fondamental est divisé par deux, et l'amplitude de l'harmonique de rang 2 est fortement amorti. Le fondamental, ayant une amplitude beaucoup plus importante que l'harmonique de rang 2, le signal en sortie du filtre (F_c) correspond quasiment au fondamental seul, soit un signal sinusoïdal de fréquence $f_{co} = 315$ Hz, donc de période 3 ms.



Partie C

PROBLÈME 3
Oscillateurs en électronique

Nous nous intéressons dans ce problème aux oscillateurs, systèmes électroniques au cœur de très nombreux objets qui nous entourent au quotidien : montre, voiture, radio, ordinateur, etc... Quelle que soit l'application, l'objectif d'un oscillateur est le même : générer un signal de période stable, de caractéristiques spectrales choisies, sans aucun signal d'entrée. Deux réalisations sont proposées dans ce problème : en première partie, un oscillateur quasi-sinusoïdal et en seconde partie un oscillateur à relaxation.

Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Partie I – Réalisation d'un oscillateur quasi-sinusoïdal

Il est parfois intéressant d'avoir des systèmes électroniques instables, notamment en électronique, pour pouvoir réaliser des oscillateurs. On rappelle que ce type de structure peut être réalisé en associant un amplificateur et un filtre comme présenté en **figure 4**.

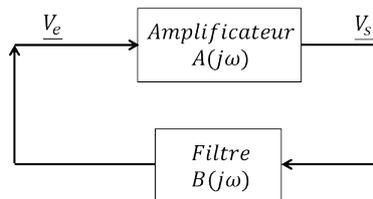


Figure 4 – Structure d'un oscillateur

Nous étudions dans cette partie l'oscillateur à filtre de Wien (**figure 5**).

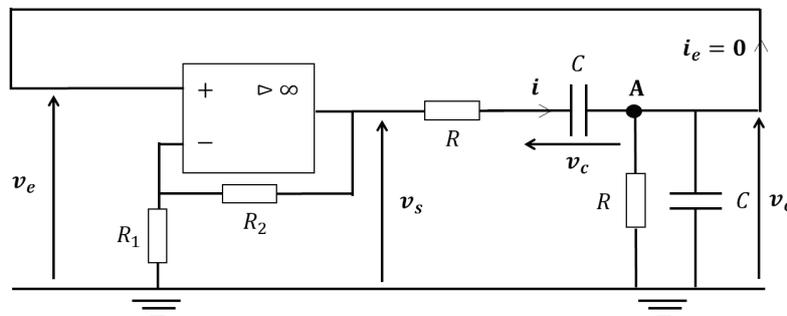


Figure 5 – Schéma électrique de l'oscillateur à filtre de Wien

I.1 – Généralités

Q50. Reproduire le schéma sur votre copie et identifier la partie amplificatrice ainsi que la partie filtre de cet oscillateur.

Q51. Justifier pourquoi le courant noté i_e sur le schéma peut être considéré comme nul dans la suite de l'étude.

I.2 – Étude du filtre de Wien

- Q52.** Quelle est la relation entre la dérivée de la tension v_c aux bornes du condensateur par rapport au temps et le courant i le traversant ? Cette équation sera nommée « **E1** » **sur votre copie**.
- Q53.** Par une loi des nœuds au point A, exprimer le courant i en fonction de la tension v_e et de sa dérivée par rapport au temps. Cette équation sera nommée « **E2** » **sur votre copie**.
- Q54.** Par une loi des mailles, exprimer la tension v_s en fonction de v_e , R , i et v_c . Cette équation sera numérotée « **E3** » **sur votre copie**.
- Q55.** En utilisant les équations **E1** et **E2**, montrer que l'on obtient l'expression suivante en précisant l'expression de la constante de temps τ :

$$\frac{dv_s}{dt} = \tau \frac{d^2 v_e}{dt^2} + 3 \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{\tau}. \quad (7)$$

I.3 – Amplificateur

- Q56.** En étudiant le fonctionnement de l'amplificateur linéaire intégré présent dans le schéma de la **figure 5 page 9**, en déduire la valeur de l'amplification $A = \frac{v_s}{v_e}$ en fonction des résistances R_1 et R_2 .

I.4 – Conditions d'oscillation

- Q57.** Montrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante vérifiée par la tension v_s en fonction de τ et de l'amplification A :

$$\tau^2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \tau(3 - A) \frac{dv_s}{dt} + v_s = 0. \quad (8)$$

- Q58.** Par analyse de cette équation, quelle condition doit-on satisfaire pour obtenir une oscillation harmonique ? Une analogie avec la mécanique peut guider votre raisonnement si nécessaire.
- Q59.** Quelle est alors la fréquence d'oscillation que l'on notera f_0 ?
- Q60.** D'où provient l'énergie nécessaire pour garantir l'oscillation ?

I.5 – Qualité du signal fourni

Nous nous intéressons à présent à la qualité du signal fourni par cet oscillateur. En **figures 6 et 7** sont présentées l'allure temporelle de la tension v_e ainsi que sa décomposition spectrale.

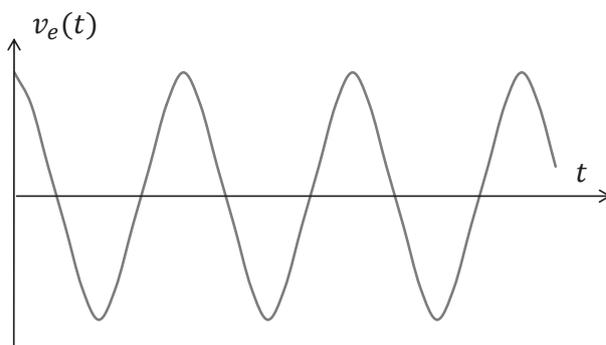


Figure 6 – Allure temporelle de la tension v_e

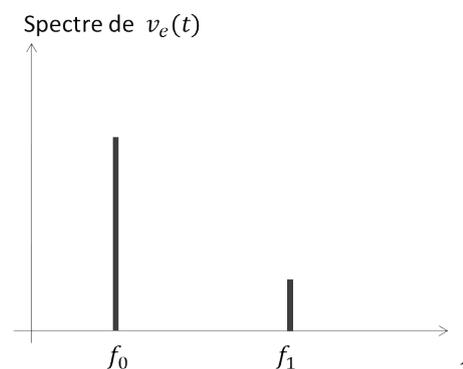


Figure 7 – Décomposition spectrale de la tension v_e

- Q61.** Peut-on considérer le signal fourni comme sinusoïdal ? Justifier.

Q62. On donne les fréquences $f_0 = 1 \text{ kHz}$ et $f_1 = 10 \text{ kHz}$. Comment pourrait-on améliorer la qualité de la tension v_e ? Une approche pratique est attendue en précisant les valeurs caractéristiques du dispositif mis en œuvre.

Partie II – Oscillateur à relaxation

Si l'on cherche à réaliser un signal d'horloge, il n'est pas nécessaire d'obtenir un signal sinusoïdal. On peut alors utiliser la structure de l'oscillateur à relaxation présentée en **figure 8**.

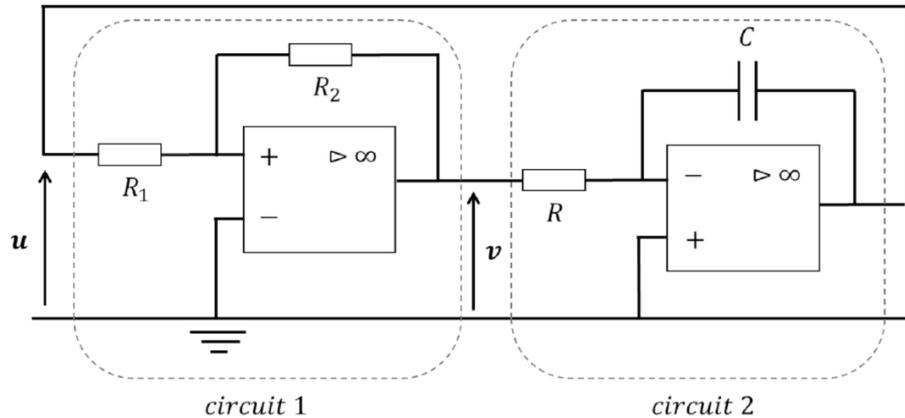


Figure 8 – Oscillateur à relaxation

On considère les amplificateurs linéaires intégrés idéaux (ALI idéaux) et on note $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$ leurs tensions de saturation. À $t = 0 \text{ s}$, on suppose que la tension v vaut $+V_{\text{sat}}$ et que la tension u est nulle.

Tout d'abord, nous nous intéressons au circuit 1.

Q63. Préciser, en le justifiant, le mode de fonctionnement de l'ALI idéal. Quelles sont les valeurs que peut prendre la sortie v ?
 Pour quelle valeur de la tension d'entrée u , notée u_{seuil1} , la tension de sortie v bascule-t-elle de $+V_{\text{sat}}$ à $-V_{\text{sat}}$?

On admet que la tension de sortie v bascule de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$ pour une valeur de tension u_{seuil2} telle que $u_{\text{seuil2}} = -u_{\text{seuil1}}$.

Q64. Tracer la tension v en fonction de la tension u en annotant soigneusement le tracé.

Le circuit 2 est un montage intégrateur inverseur. On admet la relation entrée-sortie suivante :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{v}{RC} \tag{9}$$

Q65. Si la tension v est constante et vaut $+V_{\text{sat}}$, quelle est l'allure du signal d'entrée u ?

Étudions à présent le montage complet. Les chronogrammes des tensions u et v sont donnés en **figure 9**.

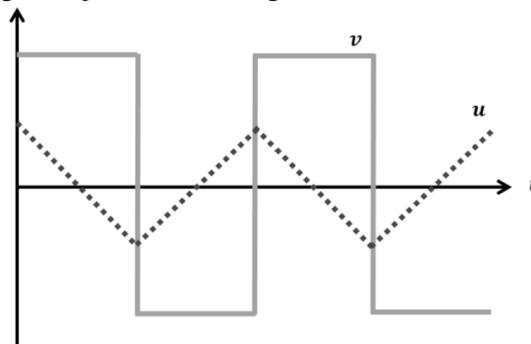


Figure 9 – Allures temporelles des signaux issus de l'oscillateur à relaxation

Q66. Exprimer la fréquence f de la tension u en fonction de R_1, R_2, R et C .

On souhaite obtenir un signal triangulaire d'amplitude $V_{max} = 2 \text{ V}$ et de fréquence $f = 1 \text{ kHz}$. On alimente les ALI en $\pm 15 \text{ V}$, ainsi $V_{sat} = 15 \text{ V}$. On impose d'utiliser les résistances R et R_2 telles que $R = R_2 = 1\,000 \, \Omega$.

Q67. Déterminer les valeurs de la résistance R_1 et du condensateur C pour répondre au cahier des charges.

Q68. Quelle caractéristique de l'ALI peut limiter la fréquence de fonctionnement d'un tel montage ?

FIN

- C50 La partie amplificatrice est à gauche avec l'ALI et la partir filtre est à droite avec les résistances R et les condensateurs de capacités C .
- C51 Ce courant correspond au courant de polarisation de la borne non inverseuse de l'ALI, il s'agit donc d'un courant d'intensité i_e nulle dans le cas du modèle de l'ALI idéal.
- C52 D'après la loi du condensateur appliquée au premier condensateur

$$i = C \frac{dv_c}{dt} \quad \text{E1.}$$

- C53 D'après la loi des noeuds en a

$$i = i_R + i_C + i_e$$

avec i_e et i_C les intensités des courants sortants de A pour aller dans la deuxième résistance et le deuxième condensateur respectivement. En utilisant la loi d'Ohm et la loi du condensateur sur ces deux dipôles, il vient que

$$i = \frac{v_e}{R} + C \frac{dv_e}{dt} \quad \text{E2}$$

i_e étant nul.

- C54 Comme l'intensité i_e est nulle on peut considérer la maille constitué de la première résistance, du premier condensateur et de la deuxième résistance (ou le deuxième condensateur). La tension aux bornes de cette maille est v_s , ainsi la loi des mailles donne

$$v_s - v_{R1} - v_c - v_e = 0 \quad ; \quad v_s - Ri - v_c - v_e = 0$$

$$v_s = v_e + Ri + v_c \quad \text{E3.}$$

- C55 On dérive la dernière équation pour obtenir quelque chose de similaire à l'expression demandée

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{dv_c}{dt}.$$

D'après E1 $\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i$ ainsi

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i.$$

Et on peut remplacer i par l'expression E2, soit

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dt} &= \frac{dv_e}{dt} + R \frac{d}{dt} \left(\frac{v_e}{R} + C \frac{dv_e}{dt} \right) + \frac{1}{C} \left(\frac{v_e}{R} + C \frac{dv_e}{dt} \right) \\ &= \frac{dv_e}{dt} + \frac{dv_e}{dt} + RC \frac{d^2v_e}{dt^2} + \frac{v_e}{RC} + \frac{dv_e}{dt}. \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{dv_s}{dt} = RC \frac{d^2v_e}{dt^2} + 3 \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{RC}.$$

On identifie directement la constante de temps du circuit $\tau = RC$.

C56 La sortie de l'ALI sur la figure 5 est reliée à l'entrée inverseuse, il y a donc rétroaction négative, on peut supposer qu'il fonctionne en régime linéaire, ainsi $\varepsilon = V_+ - V_-$. On peut lire directement la valeur de $V_+ = v_e$. Pour V_- , on utilise la loi des noeuds en terme de potentiels

$$i_1 + i_2 = i_-$$

en considérant les intensités des courants i_1 allant de la masse vers V_- et i_2 allant de la sortie vers V_- . Comme on considère un ALI idéal alors $i_- = 0$, donc

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = 0 \quad ; \quad \frac{V_M - V_-}{R_1} + \frac{v_s - V_-}{R_2} = 0 \quad ; \quad \frac{v_s}{R_2} = V_- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad ; \quad V_- \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{v_s}{R_2}$$

$$V_- = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

En régime linéaire il vient que

$$\varepsilon = V_+ - V_- = 0 \quad ; \quad v_e - v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0 \quad ; \quad v_s = v_e \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad ; \quad A = \frac{v_s}{v_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}.$$

Il s'agit de l'amplification d'un montage amplificateur non inverseur.

C57 On remplace v_e dans l'expression obtenue à la question 55 à partir de l'expression précédente : $v_e = \frac{1}{A} v_s$, ainsi

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{1}{A} \left(RC \frac{d^2 v_e}{dt^2} + 3 \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{RC} \right) \quad ; \quad A \frac{dv_s}{dt} = \tau \frac{d^2 v_s}{dt^2} + 3 \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{\tau}$$

$$0 = \tau \frac{d^2 v_s}{dt^2} + (3 - A) \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{\tau} \quad ; \quad 0 = \tau^2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \tau (3 - A) \frac{dv_s}{dt} + v_s.$$

C58 Pour obtenir une oscillation harmonique il faut que le coefficient devant la dérivée temporelle d'ordre 1 s'annule, on obtient alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, soit

$$A = 3.$$

C59 Dans ce cas la fréquence d'oscillation correspondra à la fréquence caractéristique du filtre de Wien soit

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

C60 L'énergie nécessaire pour garantir l'oscillation est fournie par **l'alimentation de l'ALI**.

C61 On voit que le signal $v_e(t)$ contient deux fréquences : f_0 et f_1 , donc **il ne s'agit pas d'un signal sinusoïdal** qui n'en contient qu'une.

C62 Afin de filtrer la fréquence f_1 et de ne garder que la fréquence f_0 on peut faire passer la tension v_e dans un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure f_c sera supérieure à $f_0 = 1$ kHz pour ne pas filtrer cette fréquence, mais inférieure à $f_1 = 10$ kHz pour justement bien filtrer cette fréquence, ainsi on peut prendre

$$f_c = 5 \text{ kHz}.$$

C63 Comme la sortie n'est pas reliée à la borne inverseuse de l'ALI du circuit 1 il n'y a pas de rétroaction négative, il fonctionne donc en régime saturé. La sortie v peut prendre les valeurs $\pm V_{sat}$.

On étudie le circuit 1, d'abord dans le cas où $v = +V_{sat}$ donc $\varepsilon > 0$. On étudie les potentiels des bornes inverseuse et non inverseuse. On voit directement que V_- est reliée à la masse donc $V_- = 0$. Pour V_+ on utilise

la loi des noeuds en terme de potentiels avec i_1 l'intensité du courant allant de u vers V_+ et i_2 le courant allant de v à V_+ , ainsi

$$i_1 + i_2 = i_+ \quad ; \quad \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = 0 \quad \text{car } i_+ = 0 \text{ pour l'ALI idéal}$$

$$\frac{u - V_+}{R_1} + \frac{v - V_+}{R_2} = 0 \quad ; \quad \frac{u}{R_1} + \frac{v}{R_2} = V_+ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$V_+ \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{u R_2 + v R_1}{R_1 R_2} \quad ; \quad V_+ = \frac{u R_2 + v R_1}{R_1 + R_2}.$$

Ainsi il vient que $\varepsilon = V_+ - V_- > 0$ car on est en saturation haute $v = V_{sat}$, ainsi

$$\frac{u R_2 + v R_1}{R_1 + R_2} - 0 > 0 \quad ; \quad \frac{u R_2 + V_{sat} R_1}{R_1 + R_2} - 0 > 0$$

$$u > -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}.$$

Le circuit 1 fonctionne en saturation haute si $u > -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$. La tension de sortie bascule de la saturation haute $+V_{sat}$ à la saturation basse $-V_{sat}$ pour $u = u_{seuil1} = -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

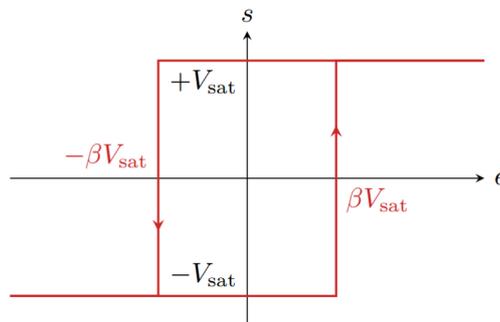
Bonus : pour la saturation basse $v = -V_{sat}$, l'étude est la même, mais dans ce cas $\varepsilon = V_+ - V_- < 0$, ainsi

$$\frac{u R_2 + v R_1}{R_1 + R_2} - 0 < 0 \quad ; \quad \frac{u R_2 - V_{sat} R_1}{R_1 + R_2} - 0 < 0$$

$$u < \frac{R_1}{R_2} V_{sat}.$$

La tension seuil de basculement de l'état bas à haut est bien $u_{seuil2} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat} = -u_{seuil1}$, ce qui n'était pas demandé de montrer.

C64 Le tracé est donné ci-dessous avec $\beta = \frac{R_1}{R_2}$, $e \equiv u$ et $s \equiv v$.



C65 D'après la relation 9, il vient que

$$\frac{du}{dt} = -\frac{v}{RC} \quad ; \quad du = -\frac{v}{RC} dt \quad ; \quad u(t) - u(t_0) = -\int_{t_0}^t \frac{v}{RC} dt$$

avec t_0 l'instant de début de saturation haute. Si $v = +V_{sat}$ alors

$$u(t) = u(t_0) - \frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_0).$$

Au début de la saturation haute $u(t_0) = u_{seuil1} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$, donc

$$u(t) = \frac{R_1}{R_2} V_{sat} - \frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_0).$$

Il s'agit d'une fonction affine en t de pente négative $-\frac{1}{RC} V_{sat}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

C66 On voit sur la figure que la période T de la tension u correspond à la durée de la saturation haute plus la durée de la saturation basse. Cherchons ces durées.

À partir de la dernière expression, on peut obtenir la durée $t_0 - t_1$, avec t_0 le début de la saturation haute et t_1 le début de la saturation basse. Lorsque'on arrive à la saturation basse on sait que $u(t_1) = u_{seuil2} = -\frac{R_1}{R_2}V_{sat}$, ainsi il vient que

$$u(t_1) = -\frac{R_1}{R_2}V_{sat} = \frac{R_1}{R_2}V_{sat} - \frac{1}{RC}V_{sat}(t_1 - t_0) \quad ; \quad 2\frac{R_1}{R_2}V_{sat} = \frac{1}{RC}V_{sat}(t_1 - t_0)$$

$$t_1 - t_0 = 2RC\frac{R_1}{R_2}.$$

À la saturation basse, $v = -V_{sat}$, donc la nouvelle loi temporelle de u est

$$u(t) = u(t_1) + \frac{1}{RC}V_{sat}(t - t_1).$$

La saturation basse finit à t_2 lorsque $u(t_2) = u_{seuil2} = \frac{R_1}{R_2}V_{sat}$, ainsi il vient que

$$u(t_2) = u(t_1) + \frac{1}{RC}V_{sat}(t_2 - t_1) \quad ; \quad \frac{R_1}{R_2}V_{sat} = -\frac{R_1}{R_2}V_{sat} + \frac{1}{RC}V_{sat}(t_2 - t_1)$$

$$2\frac{R_1}{R_2}V_{sat} = \frac{1}{RC}V_{sat}(t_2 - t_1) \quad ; \quad t_2 - t_1 = 2RC\frac{R_1}{R_2}.$$

La période de la tension u est donc $t_1 - t_0 + (t_2 - t_1) = 4RC\frac{R_1}{R_2}$, et donc la fréquence f est

$$f = \frac{R_2}{4R_1RC}.$$

C67 Afin d'obtenir une tension de u avec un maximum égal à $V_{max} = 2\text{ V}$ il faut que $u_{seuil1} = V_{max}$ soit

$$\frac{R_1}{R_2}V_{sat} = V_{max} \quad ; \quad R_1 = R_2\frac{V_{max}}{V_{sat}}.$$

A.N.

$$R_1 = 1000\ \Omega \times \frac{2\text{ V}}{15\text{ V}} = 133\ \Omega.$$

Afin d'obtenir une fréquence f de 1 kHz il faut

$$\frac{R_2}{4R_1RC} = f \quad ; \quad C = \frac{R_2}{4R_1Rf}.$$

A.N.

$$C = \frac{1000\ \Omega}{4 \times 133\ \Omega \times 1000\ \Omega \times 1000\ \text{Hz}} = 1,9\ \mu\text{F}.$$

C68 La vitesse de balayage ou *slew rate* de l'ALI peut limiter la fréquence de fonctionnement d'un tel montage : l'ALI ne peut pas faire varier la tension aussi rapidement que souhaité (de l'ordre de quelques $\text{V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$).