

# DS modélisation 1 - partie Physique

Durée : 4h

## Partie C

SESSION 2022



TSI3MO

### ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TSI

#### MODÉLISATION

Durée : 3 heures

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

#### RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois parties toutes indépendantes.

Le sujet comporte 12 pages.

## Stabilisateur d'images Slick

### Présentation générale

Un stabilisateur d'images est un support sur lequel on fixe une caméra.

Il permet d'obtenir une image parfaitement fluide des différents milieux filmés, tels que terrestre, aérien, sur l'eau et de techniques de films, plongée, contre plongée, travelling, suivi « au ras du sol », etc. (**figure 1**). Le résultat obtenu est une image très agréable à regarder ainsi qu'un suivi au plus près de l'action et des acteurs dans tous les déplacements.



Figure 1 - Photos prises à l'aide du stabilisateur Slick

Le Slick (**figure 2**) est un stabilisateur WeatherProof, il fonctionne sous la pluie ou sous la neige ; il est pratique pour le ski ou pour des activités exposées à de légères éclaboussures d'eau. Avec sa batterie au lithium-polymère de 900 mA·h, le Slick dispose d'une autonomie allant de 3 à 4 heures. Il est composé de matériaux durables : 30 % de fibres de verre et 70 % de nylon.



Figure 2 - Stabilisateur Slick

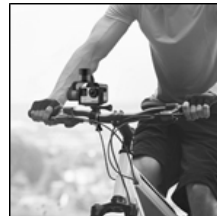


Figure 3 - Stabilisateur Slick fixé sur un guidon de vélo

Le modèle mécanique du Slick est composé de quatre classes d'équivalence (**figure 4**), chaque repère  $(O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$  est lié à la pièce  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  :

- un support **0** qui est par exemple en liaison encastrement avec le guidon du vélo (**figure 3**) ;
- un bras **1** en liaison pivot d'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$  avec **0** ;
- un bras **2** en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{x}_1)$  avec **1** ;
- un bras **3** sur lequel est fixée la caméra, **3** en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{y}_2)$  avec **2**.

Chacun de ces trois degrés de liberté est piloté à l'aide d'un moteur brushless.

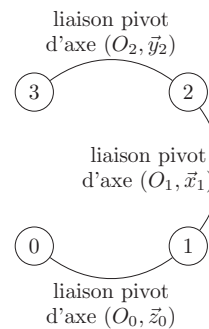
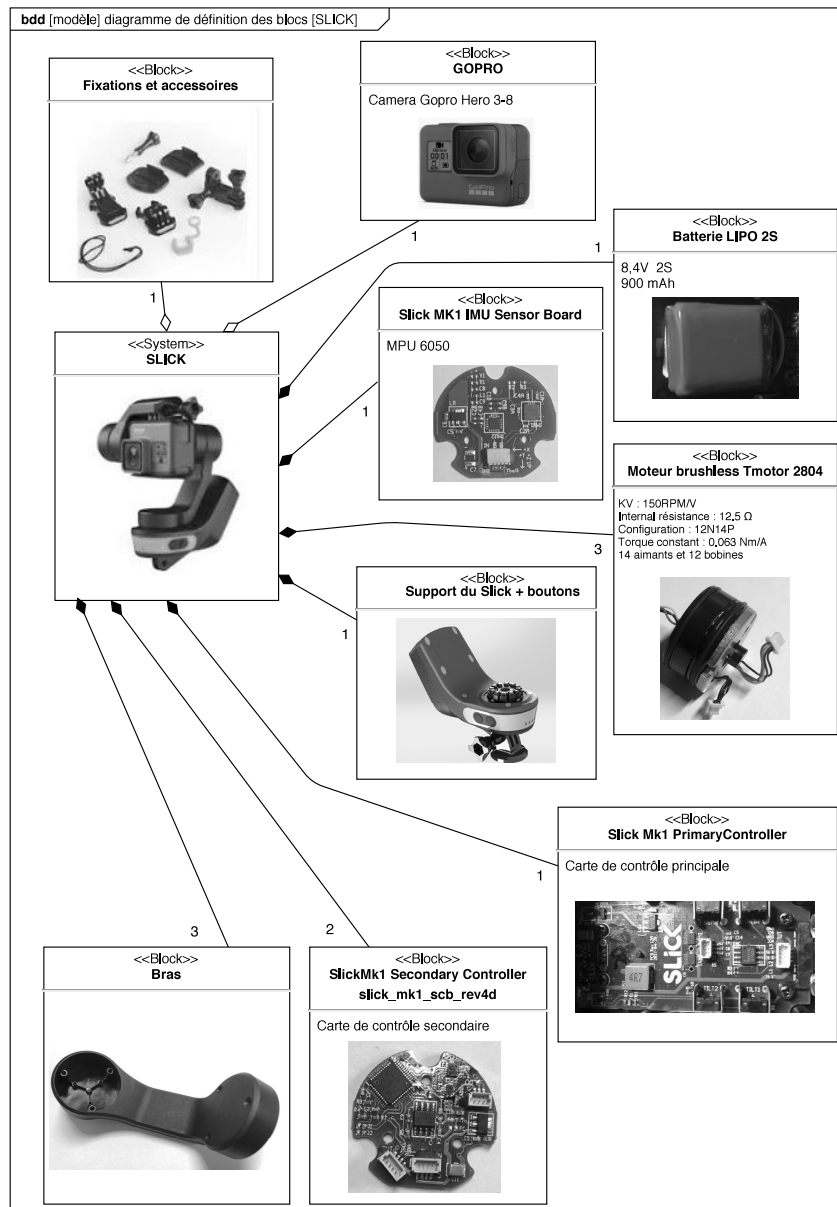


Figure 4 - Graphe des liaisons du Slick

La figure 5 présente les différents composants du Slick.



**Figure 5** - Diagramme de définition des blocs (bdd) du Slick

### Problématiques

1. Le capteur d'accélération de la centrale inertielle sera analysé pour comprendre son fonctionnement (**partie I**).
2. Une étude mathématique de deux méthodes pour appréhender l'orientation de la caméra sera abordée (**partie II**).
3. La **partie III** permettra de choisir un nouveau matériau pour le bras 1 qui réalise le meilleur compromis raideur-masse.

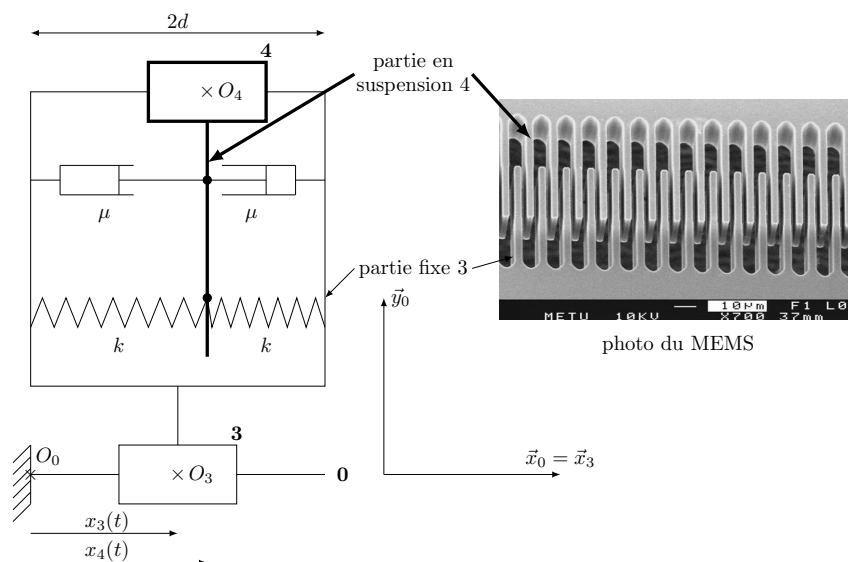
## Partie I - Étude du capteur d'accélération

**Objectif de la partie :** relier l'accélération de la caméra à la tension de sortie du capteur.

L'estimation de l'orientation (ou attitude) de la caméra est réalisée par la centrale inertielle MPU 6050 fixée sur le bras 3 lié à la caméra. La centrale inertielle acquiert, entre autre, des accélérations à l'aide d'un capteur MEMS (Micro-Electro-Mechanical-System) capacitif. Ce capteur est composé de deux éléments principaux (**figure 6**) :

- une partie fixe de même classe d'équivalence que la caméra ;
- une partie dite " en suspension " en liaison glissière par rapport à la partie fixe.

Ces deux éléments ont la forme de lamelles en vis-à-vis (**figure 6**).



**Figure 6** - Modélisation mécanique d'un capteur MEMS

### Hypothèses et notations du modèle mécanique (figure 6)

- le repère  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est lié au sol et associé à un référentiel galiléen ;

- le point  $O_3$  est lié au bras **3**, à la caméra et à la partie fixe du capteur ;
- le point  $O_4$  est lié à la partie " en suspension " du capteur, noté **4** ;
- on étudie seulement l'accélération suivant la direction  $\vec{x}_0$ , on supposera donc que la partie fixe du capteur (encastrée avec le bras **3** et la caméra) est en liaison glissière de direction  $\vec{x}_0$  avec le sol ;
- on suppose qu'entre **3** et **4**, il y a deux ressorts (de raideur  $k$  chacun) et deux amortisseurs (de coefficient visqueux  $\mu$  chacun) ;
- $\overrightarrow{O_0 O_3} \cdot \vec{x}_0 = x_3(t)$  ;
- $\overrightarrow{O_0 O_4} \cdot \vec{x}_0 = x_4(t)$  ;
- $x(t) = x_4(t) - x_3(t)$  ;
- l'accélération de la caméra par rapport au sol est notée  $a(t) = \frac{d^2 x_3(t)}{dt^2}$  ;
- $m_4$  est la masse de **4** ;
- $2d$  est la distance entre deux lamelles de la même pièce ;
- l'action de pesanteur est négligée.

**Q1.**

- a) Appliquer le théorème de la résultante dynamique à **4** en projection sur  $\vec{x}_0$  et montrer que :

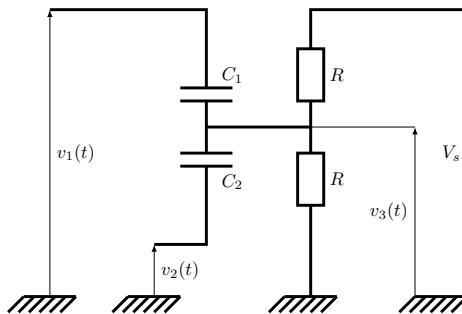
$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{2\mu}{m_4} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{2k}{m_4} x(t) = -a(t). \quad (1)$$

- b) Proposer, en justifiant votre réponse, une expression de la fréquence de variation de  $a(t)$  en dessous de laquelle on peut considérer que :

$$a(t) \approx -\frac{2k}{m_4} x(t). \quad (2)$$

#### Hypothèses et notations du modèle électrique (figure 7)

- on suppose que les lamelles en vis-à-vis définissent deux condensateurs de capacité  $C_1$  (à gauche sur la **figure 6**) et  $C_2$  (à droite sur la **figure 6**) dépendantes de  $x(t)$  ;
- deux résistors de résistance  $R$  sont utilisés pour le conditionnement ;
- l'alimentation du capteur impose :  $V_s = 5 \text{ V}$ ,  $v_1(t) = \frac{V_s}{2} + V_1 \sin(\omega t)$ ,  $v_2(t) = \frac{V_s}{2} - V_1 \sin(\omega t)$  avec  $V_1 = 2,5 \text{ V}$  ;
- on note  $v_3(t)$  la tension de sortie du capteur.



**Figure 7 - Modélisation électrique d'un capteur MEMS**

**Q2.**

- a) À partir de la loi des nœuds, donner la relation entre  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$ ,  $v_3(t)$ ,  $V_s$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $R$ .  
 b) En déduire l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dv_3(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_3(t) = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_1 \omega \cos(\omega t) + \frac{V_s}{2\tau}. \quad (3)$$

Donner l'expression de  $\tau$  en fonction de  $R$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

La solution de cette équation différentielle en régime permanent est :

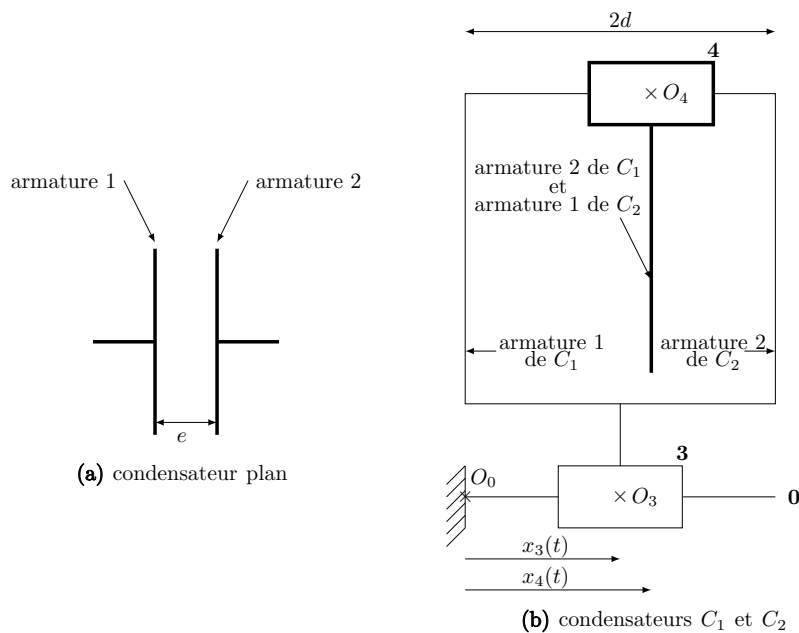
$$v_3(t) = \frac{V_s}{2} + \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_1 \sin(\omega t). \quad (4)$$

Nous considérerons les condensateurs comme plans (**figure 8**), on rappelle que :

$$C = \frac{\varepsilon S}{e}. \quad (5)$$

où :

- $C$  est la capacité du condensateur plan ;
- $\varepsilon$  est la permittivité diélectrique du milieu entre les armatures ;
- $S$  est la surface d'une armature ;
- $e$  est la distance entre les armatures.



**Figure 8** - Modélisation des condensateurs

**Q3.**

- a) Donner l'expression de  $C_1$ , puis de  $C_2$  en fonction de  $\varepsilon$ ,  $S$ ,  $x(t)$  et de  $d$ . En déduire l'expression de  $\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}$  en fonction de  $x(t)$  et  $d$ .  
 b) En déduire, en utilisant également les équations (2) et (4), l'expression de  $a(t)$  en fonction de  $v_3(t)$  et des données.

Q1 a) On considère la partie en suspension du capteur, notée 4, comme notre système.  
 On considère que le référentiel du laboratoire lié au sol, de repère  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , est galiléen.

Le bilan des forces selon l'axe  $(O_0, \vec{x}_0)$  est :

- la force de rappel du ressort de gauche  $\vec{F}_{rg} = -k(x_4(t) - x_3(t) + d - \ell_0) \vec{x}_0$ , avec  $\ell_0$  la longueur à vide du ressort et  $x_4(t) - x_3(t) + d$  l'élongation du ressort
- la force de rappel du ressort de gauche  $\vec{F}_{rd} = k(d - x_4(t) + x_3(t) - \ell_0) \vec{x}_0$ , avec  $\ell_0$  la longueur à vide du ressort et  $d - x_4(t) + x_3(t)$  l'élongation du ressort
- la force de frottement fluide de l'amortisseur de gauche  $\vec{F}_{fg} = -\mu(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) \vec{x}_0$  avec  $\dot{x}_4 - \dot{x}_3$  la vitesse du système par rapport à l'amortisseur
- la force de frottement fluide de l'amortisseur de gauche  $\vec{F}_{fd} = -\mu(\dot{x}_4 - \dot{x}_3) \vec{x}_0$  avec  $\dot{x}_4 - \dot{x}_3$  la vitesse du système par rapport à l'amortisseur.

Le théorème de la résultante dynamique est équivalent à la deuxième loi de Newton, ou principe fondamental de la dynamique, appliqué au système 4 donne

$$m_4 \ddot{x}_4(t) \vec{x}_0 = \sum_i \vec{F}_i$$

$$m_4 \ddot{x}_4(t) = -k(x_4(t) - x_3(t) + d - \ell_0) + k(d - x_4(t) + x_3(t) - \ell_0) - 2\mu(\dot{x}_4 - \dot{x}_3)$$

$$m_4 \ddot{x}_4(t) = -2k(x_4(t) - x_3(t)) - 2\mu(\dot{x}_4 - \dot{x}_3).$$

D'après l'énoncé  $x(t) = x_4(t) - x_3(t)$  donc

$$\ddot{x}_4(t) = \ddot{x}(t) + \ddot{x}_3(t).$$

Ainsi

$$m_4(\ddot{x}(t) + \ddot{x}_3(t)) = -2kx(t) - 2\mu\dot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{2\mu}{m_4}\dot{x} + \frac{2k}{m_4}x(t) = -\ddot{x}_3(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{2\mu}{m_4}\dot{x} + \frac{2k}{m_4}x(t) = -a(t)$$

avec  $a(t) = \ddot{x}_3(t)$  d'après l'énoncé.

Q1 b) On peut comparer l'expression précédente à l'équation canonique d'un oscillateur forcé, soit

$$\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = -a(t)$$

et identifier la pulsation propre du système

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m_4}}.$$

En complexe, si l'accélération de la caméra, soit le forçage de l'oscillateur, est  $\underline{a} = \underline{A}e^{j\omega t}$  alors en régime sinusoïdal forcé la réponse du système est  $\underline{x} = \underline{X}e^{j\omega t}$ , soit

$$-\omega^2 \underline{X} + j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{X} + \omega_0^2 \underline{X} = -\underline{A}$$

$$\underline{A} = \left( \omega^2 - j\omega \frac{\omega_0}{Q} - \omega_0^2 \right) \underline{X}.$$

L'approximation  $a(t) \simeq -\frac{2k}{m_4}x(t) = -\omega_0^2 x(t)$ , s'écrit en complexe

$$\underline{A} \simeq -\omega_0^2 \underline{X}.$$

Cette approximation revient donc à négliger les deux termes  $\omega^2$  et  $j\omega\frac{\omega_0}{Q}$  devant le terme  $-\omega_0^2$ , soit négliger la pulsation du forçage  $\omega$  devant la pulsation propre du système  $\omega_0$ , soit

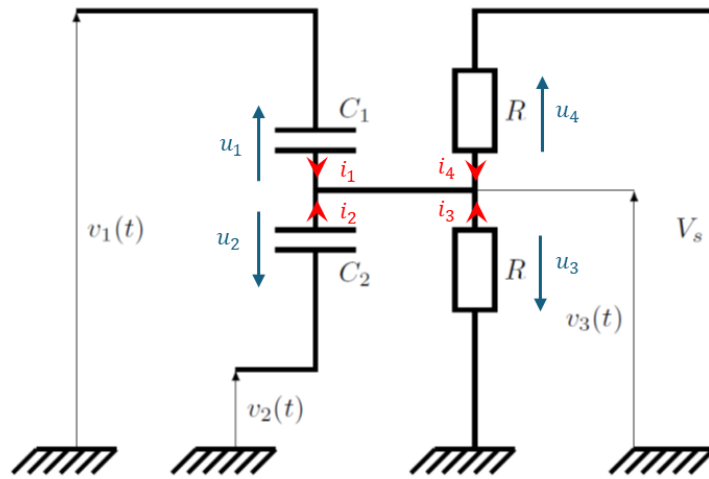
$$\begin{aligned}\omega &\ll \omega_0 \\ f &\ll \frac{\omega_0}{2\pi} \\ f &\ll \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m_4}}.\end{aligned}$$

On peut considérer comme fréquence seuil en dessous de laquelle l'approximation  $f_{\text{seuil}}$  telle que

$$f_{\text{seuil}} = \frac{1}{100} \times \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m_4}}.$$

La fréquence de l'accélération de la caméra doit être beaucoup plus lente que la fréquence propre du système.

Q2 a) On introduit les intensités des courants  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  et  $i_4$  tels que représentées sur le schéma joint.



D'après la loi des nœuds appliqué au nœud A

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0.$$

On exprime les intensité en termes de potentiels

$$\frac{u_1}{Z_1} + \frac{u_2}{Z_2} + \frac{u_3}{R} + \frac{u_4}{R} = 0$$

avec  $Z_1$  et  $Z_2$  les impédances complexes des condensateurs de capacités  $C_1$  et  $C_2$ . En exprimant ces dernières et en exprimant les tensions en termes de potentielles, il vient que

$$j\omega C_1 (v_1(t) - V_A) + j\omega C_2 (v_2(t) - V_A) + \frac{V_M - v_3}{R} + \frac{V_s - V_A}{R} = 0$$

avec  $V_A$  le potentiel au nœud A et  $V_M$  le potentiel de la masse. On remarque que  $v_3(t) = V_A - V_M$ , soit  $V_A = v_3$ , ainsi

$$j\omega C_1 (v_1(t) - v_3(t)) + j\omega C_2 (v_2(t) - v_3(t)) - \frac{v_3}{R} + \frac{V_s - v_3}{R} = 0$$

$$j\omega RC_1 (v_1(t) - v_3(t)) + j\omega RC_2 (v_2(t) - v_3(t)) + V_s - 2v_3 = 0.$$



Q2 b) À partir de l'expression précédente, on peut reconnaître les dérivées des tensions réels  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  et  $v_3(t)$

$$RC_1 \frac{dv_1}{dt} - RC_1 \frac{dv_3}{dt} + RC_2 \frac{dv_2}{dt} - RC_2 \frac{dv_3}{dt} + V_s - 2v_3 = 0.$$

On peut dériver les expressions de  $v_1(t) = \frac{V_s}{2} + V_1 \sin(\omega t)$  et  $v_2(t) = \frac{V_s}{2} - V_1 \sin(\omega t)$ , soit

$$RC_1 V_1 \omega \cos(\omega t) - RC_2 V_1 \omega \cos(\omega t) - R(C_1 + C_2) \frac{dv_3}{dt} + V_s - 2v_3 = 0$$

$$R(C_1 - C_2) V_1 \omega \cos(\omega t) - R(C_1 + C_2) \frac{dv_3}{dt} + V_s - 2v_3 = 0$$

$$\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_1 \omega \cos(\omega t) - \frac{dv_3}{dt} + \frac{V_s}{R(C_1 + C_2)} - \frac{2v_3}{R(C_1 + C_2)} = 0$$

$$\frac{dv_3}{dt} + \frac{2v_3}{R(C_1 + C_2)} = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_1 \omega \cos(\omega t) + \frac{V_s}{R(C_1 + C_2)}.$$

On peut alors identifier la constante de temps  $\tau$

$$\tau = \frac{R(C_1 + C_2)}{2}.$$

Q3 a) D'après l'expression fournie

$$C_1 = \frac{\varepsilon S}{e_1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\varepsilon S}{e_2}.$$

D'après le schéma la distance entre les armatures 1 et 2 de  $C_1$  correspond à l'allongement du ressort de gauche étudié plus tôt, soit

$$e_1 = d + x_4(t) - x_3(t) = d + x(t).$$

Ainsi

$$C_1 = \frac{\varepsilon S}{d + x(t)}.$$

D'après le schéma la distance entre les armatures 1 et 2 de  $C_2$  correspond à l'allongement du ressort de droite étudié plus tôt, soit

$$e_2 = d - x_4(t) + x_3(t) = d - x(t).$$

Ainsi

$$C_2 = \frac{\varepsilon S}{d - x(t)}.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} &= \frac{\frac{\varepsilon S}{d+x(t)} - \frac{\varepsilon S}{d-x(t)}}{\frac{\varepsilon S}{d+x(t)} + \frac{\varepsilon S}{d-x(t)}} \\ &= \frac{\frac{d-x(t)}{(d+x(t))(d-x(t))} - \frac{d+x(t)}{(d+x(t))(d-x(t))}}{\frac{d-x(t)}{(d+x(t))(d-x(t))} + \frac{d+x(t)}{(d+x(t))(d-x(t))}} \\ &= \frac{d-x(t) - d-x(t)}{d-x(t) + d+x(t)} \end{aligned}$$

$$\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = -\frac{x(t)}{d}.$$

Q3 b) D'après l'expression (4) et le résultat précédent, il vient que

$$v_3(t) = \frac{V_s}{2} + \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} V_1 \sin(\omega t)$$

$$v_3(t) = \frac{V_s}{2} - \frac{x(t)}{d} V_1 \sin(\omega t)$$

$$-x(t) = d \frac{v_3(t) - \frac{V_s}{2}}{V_1 \sin(\omega t)}.$$

D'après l'expression (2), soit  $a(t) \simeq -\frac{2k}{m_4} x(t)$ , il vient finalement que

$$a(t) \frac{m_4}{2k} \simeq d \frac{v_3(t) - \frac{V_s}{2}}{V_1 \sin(\omega t)}$$

$$a(t) \simeq \frac{2kd}{m_4} \frac{v_3(t) - \frac{V_s}{2}}{V_1 \sin(\omega t)}$$

$k$ ,  $d$ ,  $m_4$ ,  $V_s$  et  $V_1$  étant donnés.