Leçon 11 : électrostatique

E. Capitaine

TSI 2 - Lycée Charles Coëffin

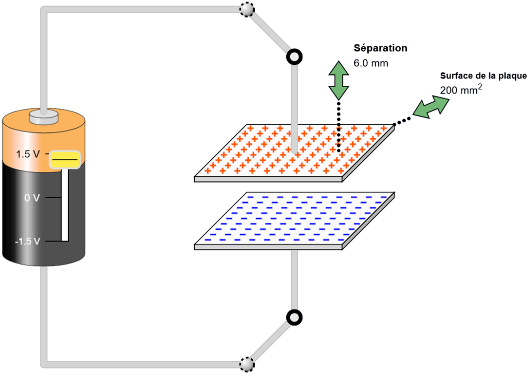
5 décembre 2025

Plan

Plan

Introduction
Cas introductif

Revenons sur un dipôle étudié l'année dernière : le condensateur.

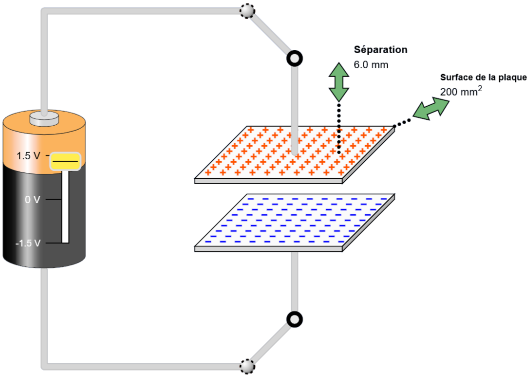


Source : phet.colorado.

Introduction

Cas introductif

Revenons sur un dipôle étudié l'année dernière : le condensateur.



Source : phet.colorado.

Comment l'accumulation de charges positives et négatives de part et d'autres des armatures du condensateur provoque l'apparition du tension à ses bornes ?

Plan

Charges électrique

Définition

On a vu l'année dernière que la charge électrique est une grandeur scalaire intrinsèque, extensive et conservative caractéristique de la matière. Elle peut être négative ou positive. Son unité est .

Charges électrique

Définition

On a vu l'année dernière que la charge électrique est une grandeur scalaire intrinsèque, extensive et conservative caractéristique de la matière. Elle peut être négative ou positive. Son unité est le coulomb noté C. ♥

Charges électrique

Définition

On a vu l'année dernière que la charge électrique est une grandeur scalaire intrinsèque, extensive et conservative caractéristique de la matière. Elle peut être négative ou positive. Son unité est le coulomb noté C. ♥

La charge est électrique est quantifiée et multiple de la charge élémentaire notée e et valant $1{,}6 \times 10^{-19}$ C. ♥

La loi de Coulomb donne l'expression de la force d'interaction électrostatique entre deux charge q_1 et q_2, positionnée respectivement distantes de d. Considérons ici que le système est la charge q_1, la force exercée par la charge q_2 sur cette dernière est

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^3}\overrightarrow{M_2 M_1}$$

avec ε_0 la permittivité du vide.

Si les charges sont de signes opposés, l'interaction est .
Si les charges sont de mêmes signes, l'interaction est .

La loi de Coulomb donne l'expression de la force d'interaction électrostatique entre deux charge q_1 et q_2, positionnée respectivement distantes de d. Considérons ici que le système est la charge q_1, la force exercée par la charge q_2 sur cette dernière est

$$\vec{F}_{2\to1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{M_1M_2^3}\overrightarrow{M_2M_1} \quad \heartsuit$$

avec ε_0 la permittivité du vide.

Si les charges sont de signes opposés, l'interaction est attractive.
Si les charges sont de mêmes signes, l'interaction est répulsive.

Charges électrique

Loi de Coulomb

La loi de Coulomb donne l'expression de la force d'interaction électrostatique entre deux charge q_1 et q_2, positionnée respectivement distantes de d. Considérons ici que le système est la charge q_1, la force exercée par la charge q_2 sur cette dernière est

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^3}\overrightarrow{M_2 M_1}$$

avec ε_0 la permittivité du vide.

D'après la troisième loi de Newton, ou principe des actions réciproques, nous permet d'écrire la force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2

$$\vec{F}_{1\to 2} =$$

La loi de Coulomb donne l'expression de la force d'interaction électrostatique entre deux charge q_1 et q_2, positionnée respectivement distantes de d. Considérons ici que le système est la charge q_1, la force exercée par la charge q_2 sur cette dernière est

$$\vec{F}_{2\to1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{M_1M_2^3}\overrightarrow{M_2M_1} \quad \heartsuit$$

avec ε_0 la permittivité du vide.

D'après la troisième loi de Newton, ou principe des actions réciproques, nous permet d'écrire la force exercée par la charge q_1 sur la charge q_2

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1} &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{M_1M_2^3}\overrightarrow{M_2M_1}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{M_1M_2^3}\overrightarrow{M_1M_2}.\end{aligned}$$

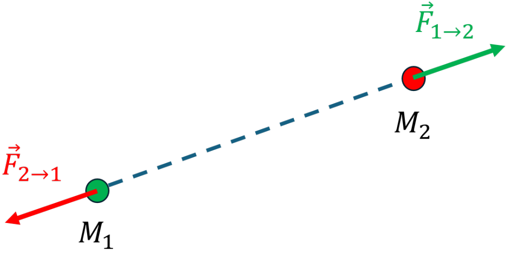
Charges électrique

Loi de Coulomb

Lorsque les signes des charges sont les mêmes, elles se repoussent

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^3}\overrightarrow{M_2 M_1}$$

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^3}\overrightarrow{M_1 M_2}.$$



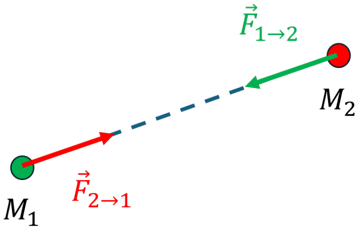
Charges électrique

Loi de Coulomb

Lorsque les signes des charges sont opposés, elles s'attirent

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{M_1M_2^3}\overrightarrow{M_2M_1}$$

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{M_1M_2^3}\overrightarrow{M_1M_2}.$$

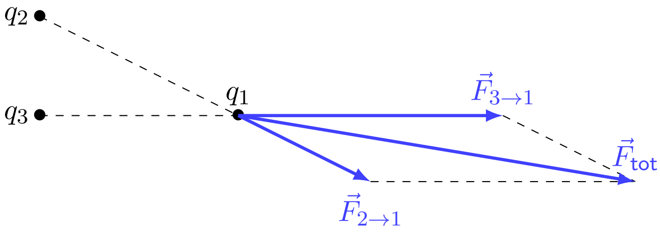


Charges électrique

Loi de Coulomb

Le **principe de superposition**, nous permet d'obtenir la force totale exercée par un ensemble de charges q_2 et q_3 sur une charge q_1. Après calcul de chacune des forces exercée individuellement par l'ensemble des charges, la force totale est égale à la la somme vectorielle des forces individuelles

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{2\to1} + \vec{F}_{3\to1}.$$



La loi de Coulomb peut s'exprimer d'une autre façon en décorrélant la part de la force dépendant de la charge sur laquelle elle est exercée, et la part de la force dépendant de l'extérieur

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{M_1 M_2^3}\overrightarrow{M_2 M_1}$$
$$\vec{F}_{2\to 1} = q_1\,\overrightarrow{E}.$$

La loi de Coulomb peut s'exprimer d'une autre façon en décorrélant la part de la force dépendant de la charge sur laquelle elle est exercée, et la part de la force dépendant de l'extérieur

$$\vec{F}_{2\to1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{M_1M_2^3}\overrightarrow{M_2M_1}$$
$$\vec{F}_{2\to1} = q_1\overrightarrow{E}.$$

La part de la force dépendant de l'extérieur correspond au **champ électrique** $\overrightarrow{E}$ dans lequel se trouve la charge q_1 et produit par la ou les autres charges qui l'entourent.

On peut ainsi exprimer la valeur du champ électrique en un point M_1 produit par une charge électrique q_2 positionnée en un point M_2 à partir de la loi de Coulomb

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{M_1M_2^3}\overrightarrow{M_2M_1}.$$

Si on considère le point M_2 comme l'origine du repère, alors on peut écrire que $\overrightarrow{M_2M_1} = r\vec{u}_r$ et $M_1M_2^3 = r^3$, ainsi

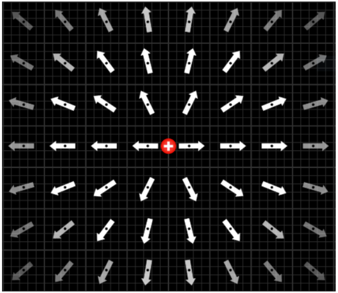
$$\vec{F}_{2\to 1}(M_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^3}r\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{E}(M_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r^3}r\vec{u}_r$$

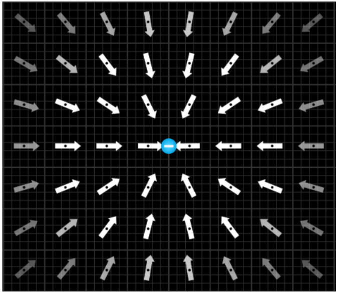
$$\vec{F}_{2\to 1}(M_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{E}(M_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r^2}\vec{u}_r.$$

Charges électrique

Loi de Coulomb

On constate qu'une charge positive produit un champ orienté depuis la charge, et une charge négative produit un champ orienté vers elle.

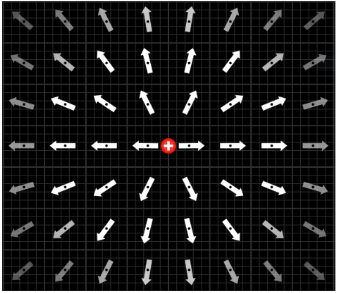


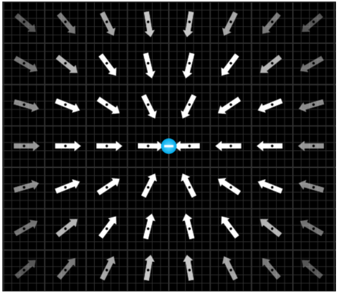


Charges électrique

Loi de Coulomb

On constate qu'une charge positive produit un champ orienté depuis la charge, et une charge négative produit un champ orienté vers elle.





Dans l'animation étudié, les charges qui produisent le champ sont immobiles, on parle alors de **champ électrostatique**.

Lorsqu'on étudie une charge dans un champ électrostatique, on néglige l'effet qu'a cette charge sur celles qui produisent le champ électrostatique.

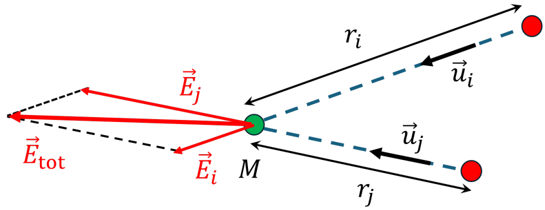
Charges électrique

Loi de Coulomb

Comme on l'a fait pour les forces, grâce au principe de superposition on peut obtenir le champ électrique au point M produit par plusieurs charges ponctuelles

$$\vec{E}_{\text{tot}}(M) = \sum_i \vec{E}_i(M) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

avec $r_i\vec{u}_i$ le vecteur reliant une des charges q_i produisant le champ $\vec{E}_i$ au point M où l'on mesure le champ.



Charges électrique

Distributions continues de charges

À l'échelle mésoscopique, les distributions de charges ne sont plus discrètes (discontinues) mais continues. On utilise alors **les densités de charge** pour calculer la quantité de charges contenue dans un volume, sur une surface ou le long d'un fil.

Charges électrique

Distributions continues de charges

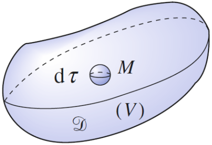
À l'échelle mésoscopique, les distributions de charges ne sont plus discrètes (discontinues) mais continues. On utilise alors **les densités de charge** pour calculer la quantité de charges contenue dans un volume, sur une surface ou le long d'un fil.

Si on découple un volume d'une distribution volumique en volumes élémentaires $\mathrm{d}\tau$ contenant une quantité de charge élémentaire $\mathrm{d}q$, alors **la densité volumique de charge** d'unité $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-3}$. est

$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\tau}$$

La charge totale Q portée par la distribution est obtenue à partir de la somme continue, ou intégrale sur tout le volume $\mathcal{V}$ de la distribution

$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}\tau.$$



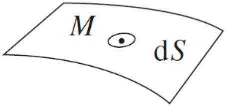
Charges électrique

Distributions continues de charges

On peut aussi découpler une surface en surfaces élémentaire $\mathrm{d}S$ portant chacune une quantité de charge élémentaire $\mathrm{d}q$, alors **la densité surfacique de charge** d'unité $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-2}$. est

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$

La charge totale Q portée par la distribution est obtenue à partir de la somme continue, ou intégrale sur toute la surface $\mathcal{S}$ de la distribution



$$Q =$$

Charges électrique

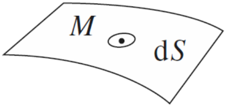
Distributions continues de charges

On peut aussi découpler une surface en surfaces élémentaire $\mathrm{d}S$ portant chacune une quantité de charge élémentaire $\mathrm{d}q$, alors **la densité surfacique de charge** d'unité $\mathsf{C}\cdot\mathsf{m}^{-2}$. est

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$$

La charge totale Q portée par la distribution est obtenue à partir de la somme continue, ou intégrale sur toute la surface $\mathcal{S}$ de la distribution

$$Q = \iint_{\mathcal{S}} \sigma \mathrm{d}S.$$



Charges électrique

Distributions continues de charges

On peut enfin découpler une longueur en longueur élémentaire $\mathrm{d}\ell$ portant chacune une quantité de charge élémentaire $\mathrm{d}q$, alors **la densité linéique de charge** d'unité $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. est

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\ell}$$

La charge totale Q portée par la distribution est obtenue à partir de la somme continue, ou intégrale sur toute la surface $\mathcal{L}$ de la distribution

$$Q =$$

Charges électrique

Distributions continues de charges

On peut enfin découpler une longueur en longueur élémentaire $\mathrm{d}\ell$ portant chacune une quantité de charge élémentaire $\mathrm{d}q$, alors **la densité linéique de charge** d'unité $\mathrm{C} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. est

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\ell}$$

La charge totale Q portée par la distribution est obtenue à partir de la somme continue, ou intégrale sur toute la surface $\mathcal{L}$ de la distribution

$$Q = \int_{\mathcal{L}} \lambda \mathrm{d}\ell.$$

On retiendra la relation entre les trois densités de charges et la quantité de charges élémentaires $\mathrm{d}q$

$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}\tau = \sigma \mathrm{d}S = \lambda \mathrm{d}\ell. \quad \heartsuit$$

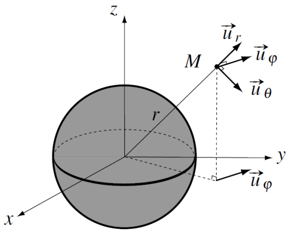
La distribution surfacique correspond au cas limite où l'on peut négliger l'épaisseur d'un volume.
La distribution linéique correspond au cas limite où l'on peut négliger la section d'un volume.

Certaines distributions continues de charges présentent certaines **symétries et invariances** qu'il faut connaître car elles permettent d'**obtenir rapidement des informations sur le champ électrique qu'elles produisent**.

Charges électrique

Symétries et invariances

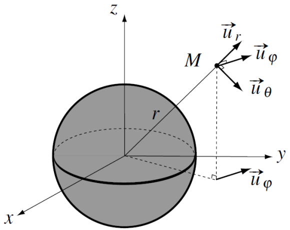
La première distribution à connaître est la **distribution sphérique** : on considère une sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



Charges électrique

Symétries et invariances

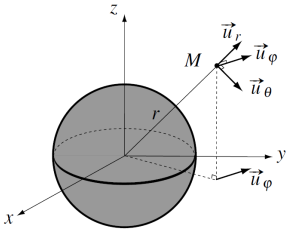
La première distribution à connaître est la **distribution sphérique** : on considère une sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



Étudions les plans de symétrie de la distribution passant par un point M quelconque. On constate

- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ peut couper la sphère en deux parties égales : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie

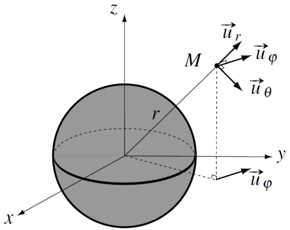
La première distribution à connaître est la **distribution sphérique** : on considère une sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



Étudions les plans de symétrie de la distribution passant par un point M quelconque. On constate

- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ peut couper la sphère en deux parties égales : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie
- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\varphi$ peut couper la sphère en deux parties égales : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ est plan de symétrie

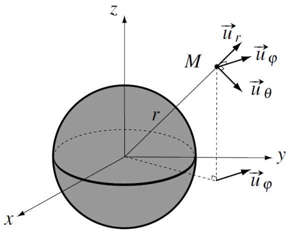
La première distribution à connaître est la **distribution sphérique** : on considère une sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



Étudions les plans de symétrie de la distribution passant par un point M quelconque. On constate

- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ peut couper la sphère en deux parties égales : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie
- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\varphi$ peut couper la sphère en deux parties égales : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ est plan de symétrie
- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ ne peut pas couper la sphère en deux parties égales : le plan $(M, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ n'est pas plan de symétrie.

La première distribution à connaître est la **distribution sphérique** : on considère une sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.

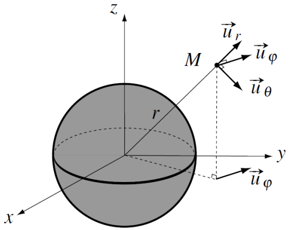


Études maintenant les invariances de la distributions. Pour ce faire on regarde les coordonnées du point d'observation M et **on translate la distribution selon un axe associé aux coordonnées linéaire x, y, z, et** r. Si la distribution ne change pas du point de vue du point M, alors il y a invariance. ♥

S'il s'agit d'une coordonnée angulaire, **on fait tourner la distribution selon les angles θ ou φ**. Si la distribution ne change pas du point de vue du point M, alors il y a invariance. ♥

Charges électrique

Symétries et invariances

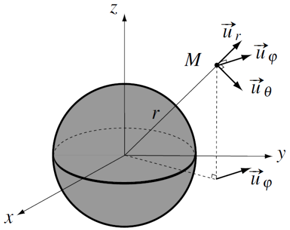


La première distribution à connaître est la **distribution sphérique** : on considère une sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.

On constate

- que si on fait tourner la sphère d'un angle θ quelconque, la situation ne change pas du point de vue de M : il y a invariance selon la coordonnée θ

La première distribution à connaître est la **distribution sphérique** : on considère une sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



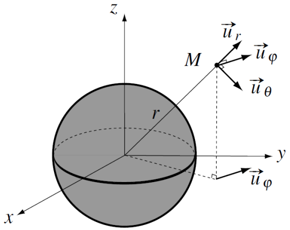
On constate

- que si on fait tourner la sphère d'un angle θ quelconque, la situation ne change pas du point de vue de M : il y a invariance selon la coordonnée θ
- que si on fait tourner la sphère d'un angle φ quelconque, la situation ne change pas du point de vue de M : il y a invariance selon la coordonnée φ

Charges électrique

Symétries et invariances

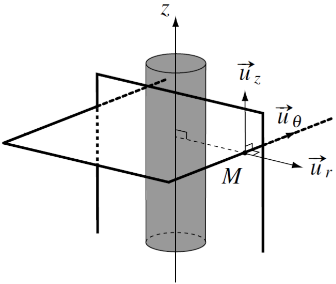
La première distribution à connaître est la **distribution sphérique** : on considère une sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



On constate

- que si on fait tourner la sphère d'un angle θ quelconque, la situation ne change pas du point de vue de M : il y a invariance selon la coordonnée θ
- que si on fait tourner la sphère d'un angle φ quelconque, la situation ne change pas du point de vue de M : il y a invariance selon la coordonnée φ
- que si on translate la sphère le long de l'axe associé à la coordonnée r, alors la situation change du point de vue de M : la sphère s'éloigne ou se rapproche, il n'y a pas invariance selon la coordonnée r.

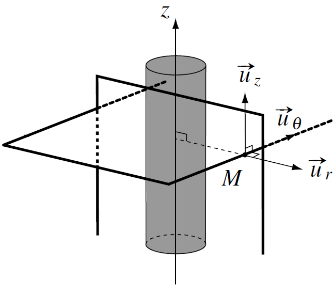
La deuxième distribution à connaître est celle d'un **cylindre infini** : on considère un cylindre uniformément chargé de densité volumique ρ.



Charges électrique

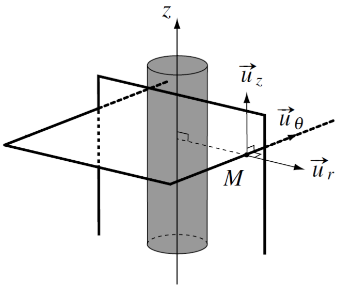
Symétries et invariances

La deuxième distribution à connaître est celle d'un **cylindre infini** : on considère un cylindre uniformément chargé de densité volumique ρ.



Étudions les plans de symétrie de la distribution passant par un point M quelconque. On constate

La deuxième distribution à connaître est celle d'un **cylindre infini** : on considère un cylindre uniformément chargé de densité volumique ρ.



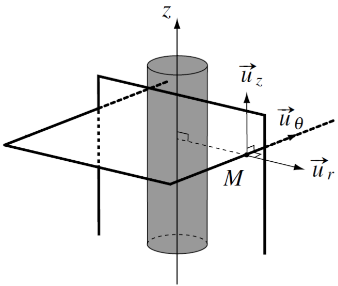
Étudions les plans de symétrie de la distribution passant par un point M quelconque. On constate

- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ peut couper le cylindre en deux parties égales : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie

Charges électrique

Symétries et invariances

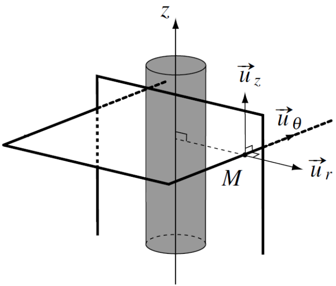
La deuxième distribution à connaître est celle d'un **cylindre infini** : on considère un cylindre uniformément chargé de densité volumique ρ.



Étudions les plans de symétrie de la distribution passant par un point M quelconque. On constate

- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ peut couper le cylindre en deux parties égales : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie
- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ peut couper le cylindre en deux parties égales car le cylindre est infini : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie

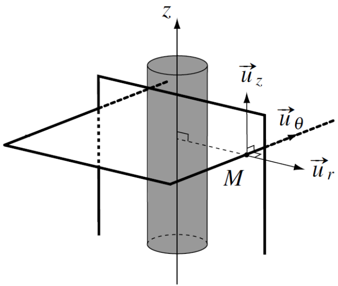
La deuxième distribution à connaître est celle d'un **cylindre infini** : on considère un cylindre uniformément chargé de densité volumique ρ.



Étudions les plans de symétrie de la distribution passant par un point M quelconque. On constate

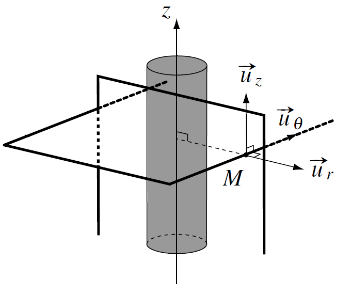
- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ peut couper le cylindre en deux parties égales : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie
- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ peut couper le cylindre en deux parties égales car le cylindre est infini : le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est plan de symétrie
- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ ne coupe pas le cylindre : le plan $(M, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ n'est pas plan de symétrie.

La deuxième distribution à connaître est celle d'un **cylindre infini** : on considère un cylindre uniformément chargé de densité volumique ρ.



Étudions les invariances par rapport au point M. On constate

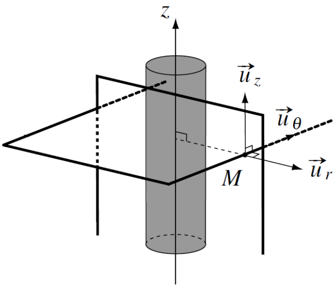
La deuxième distribution à connaître est celle d'un **cylindre infini** : on considère un cylindre uniformément chargé de densité volumique ρ.



Étudions les invariances par rapport au point M. On constate

- que si on fait tourner le cylindre d'un angle θ quelconque, la situation ne change pas du point de vue de M : il y a invariance selon la coordonnée θ

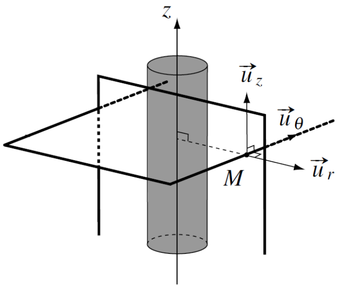
La deuxième distribution à connaître est celle d'un **cylindre infini** : on considère un cylindre uniformément chargé de densité volumique ρ.



Étudions les invariances par rapport au point M. On constate

- que si on fait tourner le cylindre d'un angle θ quelconque, la situation ne change pas du point de vue de M : il y a invariance selon la coordonnée θ
- que si on translate le cylindre le long de l'axe associé à la coordonnée z, la situation ne change pas du point de vue de M car le cylindre est infini : il y a invariance selon la coordonnée z

La deuxième distribution à connaître est celle d'un **cylindre infini** : on considère un cylindre uniformément chargé de densité volumique ρ.



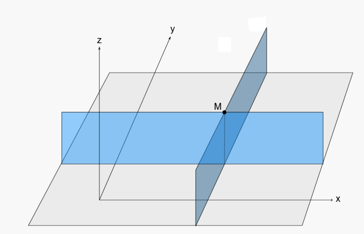
Étudions les invariances par rapport au point M. On constate

- que si on fait tourner le cylindre d'un angle θ quelconque, la situation ne change pas du point de vue de M : il y a invariance selon la coordonnée θ
- que si on translate le cylindre le long de l'axe associé à la coordonnée z, la situation ne change pas du point de vue de M car le cylindre est infini : il y a invariance selon la coordonnée z
- que si on translate la sphère le long de l'axe associé à la coordonnée r, alors la situation change du point de vue de M : le cylindre s'éloigne

Charges électrique

Symétries et invariances

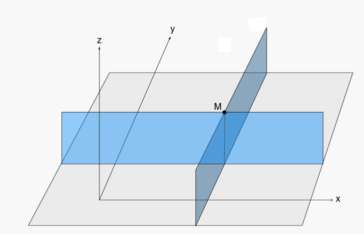
La troisième et dernière distribution à connaître est celle d'un **plan infini** : on considère un plan uniformément chargé de densité volumique λ.



Charges électrique

Symétries et invariances

La troisième et dernière distribution à connaître est celle d'un **plan infini** : on considère un plan uniformément chargé de densité volumique λ.

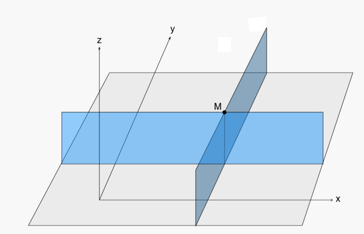


Étudions les plans de symétrie de la distribution passant par un point M quelconque. On constate

Charges électrique

Symétries et invariances

La troisième et dernière distribution à connaître est celle d'un **plan infini** : on considère un plan uniformément chargé de densité volumique λ.



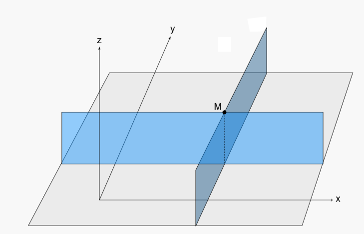
Étudions les plans de symétrie de la distribution passant par un point M quelconque. On constate

- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ ne coupe pas le plan : le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ n'est pas plan de symétrie

Charges électrique

Symétries et invariances

La troisième et dernière distribution à connaître est celle d'un **plan infini** : on considère un plan uniformément chargé de densité volumique λ.



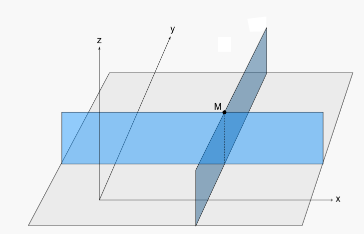
Étudions les plans de symétrie de la distribution passant par un point M quelconque. On constate

- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ ne coupe pas le plan : le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ n'est pas plan de symétrie
- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ peut couper le plan en deux parties égales car le plan est infini : le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie

Charges électrique

Symétries et invariances

La troisième et dernière distribution à connaître est celle d'un **plan infini** : on considère un plan uniformément chargé de densité volumique λ.



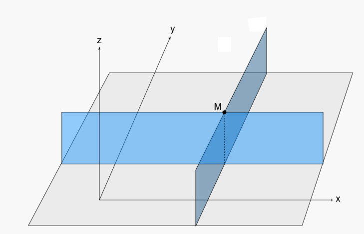
Étudions les plans de symétrie de la distribution passant par un point M quelconque. On constate

- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ ne coupe pas le plan : le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ n'est pas plan de symétrie
- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ peut couper le plan en deux parties égales car le plan est infini : le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie
- qu'un plan selon les vecteurs $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ peut couper le plan en deux parties égales car le plan est infini : le plan $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie.

Charges électrique

Symétries et invariances

La troisième et dernière distribution à connaître est celle d'un **plan infini** : on considère un plan uniformément chargé de densité volumique λ.

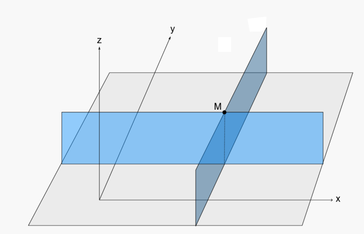


Étudions les invariances par rapport au point M. On constate

Charges électrique

Symétries et invariances

La troisième et dernière distribution à connaître est celle d'un **plan infini** : on considère un plan uniformément chargé de densité volumique λ.



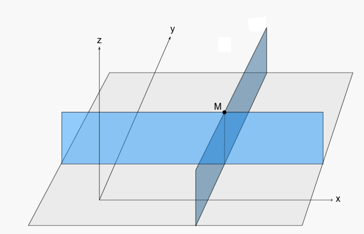
Étudions les invariances par rapport au point M. On constate

- que si on translate le plan le long de l'axe associé à la coordonnée x, la situation ne change pas du point de vue de M car le plan est infini : il y a invariance selon la coordonnée x

Charges électrique

Symétries et invariances

La troisième et dernière distribution à connaître est celle d'un **plan infini** : on considère un plan uniformément chargé de densité volumique λ.



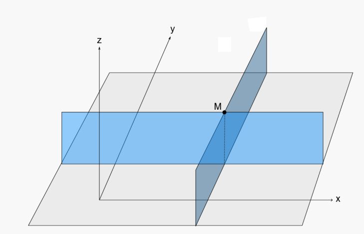
Étudions les invariances par rapport au point M. On constate

- que si on translate le plan le long de l'axe associé à la coordonnée x, la situation ne change pas du point de vue de M car le plan est infini : il y a invariance selon la coordonnée x
- que si on translate le plan le long de l'axe associé à la coordonnée y, la situation ne change pas du point de vue de M car le plan est infini : il y a invariance selon la coordonnée y

Charges électrique

Symétries et invariances

La troisième et dernière distribution à connaître est celle d'un **plan infini** : on considère un plan uniformément chargé de densité volumique λ.



Étudions les invariances par rapport au point M. On constate

- que si on translate le plan le long de l'axe associé à la coordonnée x, la situation ne change pas du point de vue de M car le plan est infini : il y a invariance selon la coordonnée x
- que si on translate le plan le long de l'axe associé à la coordonnée y, la situation ne change pas du point de vue de M car le plan est infini : il y a invariance selon la coordonnée y
- que si on translate la sphère le long de l'axe associé à la coordonnée z, alors la situation change du point de vue de M : le plan s'éloigne ou se rapproche, il n'y a pas invariance selon la coordonnée z.

Plan

À partir des **symétries et invariances des distributions de charges**, on peut déterminer **les orientations et les composantes du champ électrique**.

À partir des **symétries et invariances des distributions de charges**, on peut déterminer **les orientations et les composantes du champ électrique**.

Pour cela on utilise **le principe de Curie** : “les effets ont au moins les symétries des causes". ♥

À partir des **symétries et invariances des distributions de charges**, on peut déterminer **les orientations et les composantes du champ électrique**.

Pour cela on utilise **le principe de Curie** : “les effets ont au moins les symétries des causes". ♥

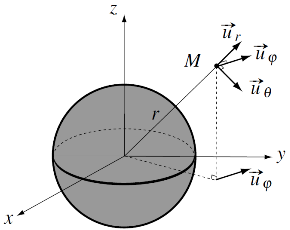
Les causes correspondent aux distributions de charges et les effets correspondent aux champs électriques qu'ils produisent.

Étudions les cas présentés précédemment.

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons la sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

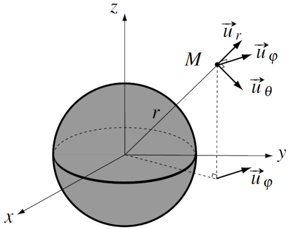
$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r + E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\theta + E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\varphi.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons la sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r + E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\theta + E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\varphi.$$

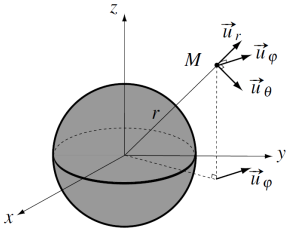
On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

On utilise **les symétries de charges pour obtenir l'orientation du champ** : le champ électrique est contenu dans les plans de symétries et perpendiculaire aux plans d'anti-symétries de la distribution de charges. ❤

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons la sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r + E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\theta + E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\varphi.$$

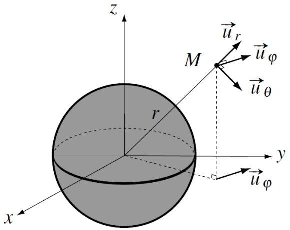
On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

On a vu que les plans de symétries de la sphère sont $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$, ainsi le champ est orienté selon

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons la sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r + E(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\theta + E(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\varphi.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

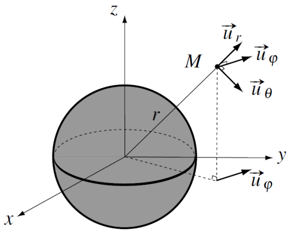
On a vu que les plans de symétries de la sphère sont $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ et $(M,\vec{u}_r,\vec{u}_\varphi)$, ainsi le champ est orienté selon le vecteur unitaire $\vec{u}_r$, ainsi

$$\vec{E}(M) = E(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r.$$

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons la sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r + E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\theta + E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\varphi.$$

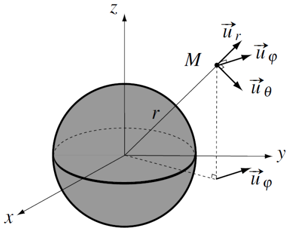
On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

On utilise maintenant **les invariances de la distribution de charges pour obtenir les composantes dont ne dépend pas le champ**. ♥

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons la sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r + E(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\theta + E(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\varphi.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

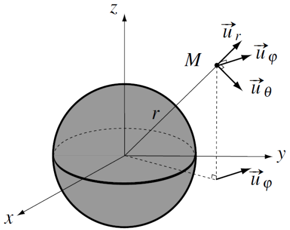
On a vu que la distribution était invariantes par rotation selon les angles θ et φ, ainsi le champ ne dépend pas de ses coordonnées

$$\vec{E}(M) =$$

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons la sphère uniformément chargé de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r + E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\theta + E(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\varphi.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

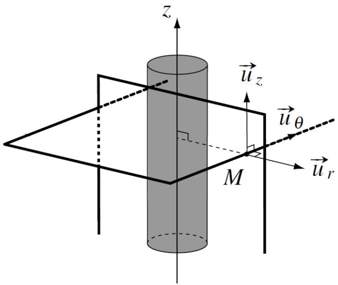
On a vu que la distribution était invariantes par rotation selon les angles θ et φ, ainsi le champ ne dépend pas de ses coordonnées

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r.$$

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le cylindre infini de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

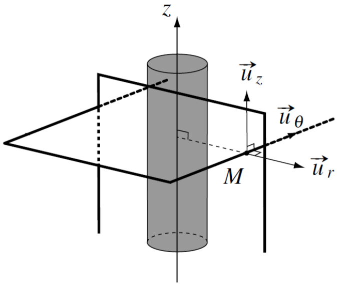
$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\vec{u}_r + E(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + E(r, \theta, z)\vec{u}_z.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le cylindre infini de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\vec{u}_r + E(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + E(r, \theta, z)\vec{u}_z.$$

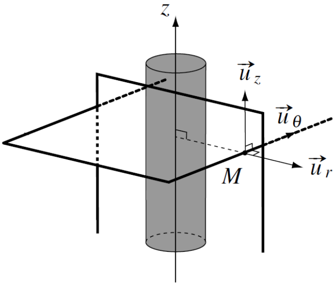
On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

On utilise **les symétries de charges pour obtenir l'orientation du champ** : le champ électrique est contenu dans les plans de symétries et perpendiculaire aux plans d'anti-symétries de la distribution de charges.

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le cylindre infini de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\vec{u}_r + E(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + E(r, \theta, z)\vec{u}_z.$$

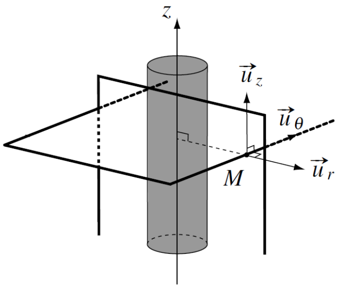
On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

On a vu que les plans de symétries du cylindre sont $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$, ainsi le champ est orienté selon

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le cylindre infini de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\vec{u}_r + E(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + E(r, \theta, z)\vec{u}_z.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

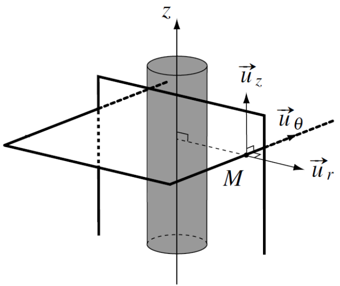
On a vu que les plans de symétries du cylindre sont $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$, ainsi le champ est orienté selon le vecteur unitaire $\vec{u}_r$, ainsi

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\vec{u}_r.$$

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le cylindre infini de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\vec{u}_r + E(r,\theta,z)\vec{u}_\theta + E(r,\theta,z)\vec{u}_z.$$

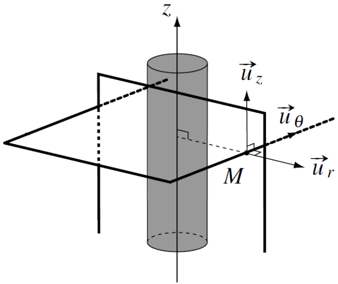
On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

On utilise maintenant **les invariances de la distribution de charges pour obtenir les composantes dont ne dépend pas le champ**. ♥

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le cylindre infini de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\vec{u}_r + E(r,\theta,z)\vec{u}_\theta + E(r,\theta,z)\vec{u}_z.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

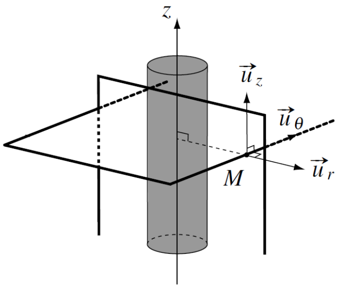
On a vu que la distribution était invariantes par rotation selon l'angle θ et par translation selon z, ainsi le champ ne dépend pas de ses coordonnées

$$\vec{E}(M) =$$

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le cylindre infini de densité volumique ρ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\vec{u}_r + E(r,\theta,z)\vec{u}_\theta + E(r,\theta,z)\vec{u}_z.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

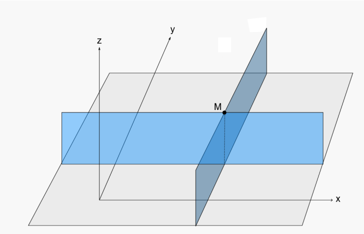
On a vu que la distribution était invariantes par rotation selon l'angle θ et par translation selon z, ainsi le champ ne dépend pas de ses coordonnées

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_r.$$

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le plan infini de densité surfacique σ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

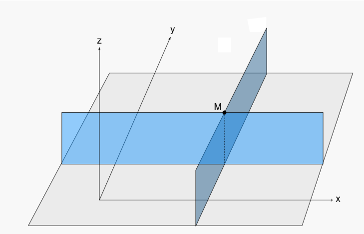
$$\vec{E}(M) = E(x,y,z)\vec{u}_x + E(x,y,z)\vec{u}_y + E(x,y,z)\vec{u}_z.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le plan infini de densité surfacique σ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(x,y,z)\vec{u}_x + E(x,y,z)\vec{u}_y + E(x,y,z)\vec{u}_z.$$

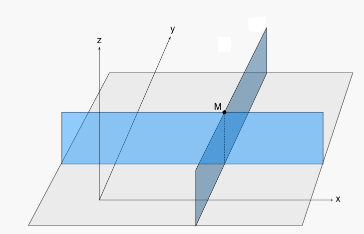
On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

On utilise **les symétries de charges pour obtenir l'orientation du champ** : le champ électrique est contenu dans les plans de symétries et perpendiculaire aux plans d'anti-symétries de la distribution de charges. ♥

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le plan infini de densité surfacique σ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(x,y,z)\vec{u}_x + E(x,y,z)\vec{u}_y + E(x,y,z)\vec{u}_z.$$

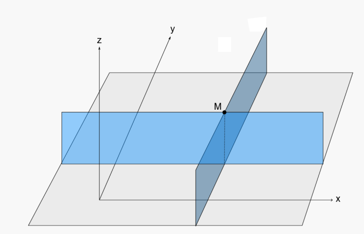
On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

On a vu que les plans de symétries du plan sont $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, ainsi le champ est orienté selon

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le plan infini de densité surfacique σ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(x,y,z)\vec{u}_x + E(x,y,z)\vec{u}_y + E(x,y,z)\vec{u}_z.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

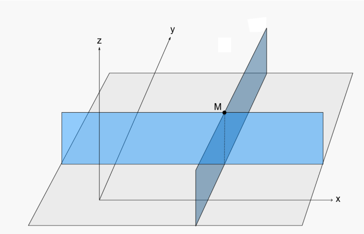
On a vu que les plans de symétries du plan sont $(M,\vec{u}_x,\vec{u}_z)$ et $(M,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$, ainsi le champ est orienté selon le vecteur unitaire $\vec{u}_z$, ainsi

$$\vec{E}(M) = E(x,y,z)\vec{u}_z.$$

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le plan infini de densité surfacique σ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(x, y, z)\vec{u}_x + E(x, y, z)\vec{u}_y + E(x, y, z)\vec{u}_z.$$

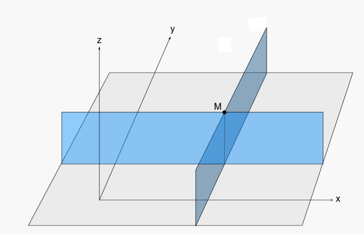
On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

On utilise maintenant **les invariances de la distribution de charges pour obtenir les composantes dont ne dépend pas le champ**. ♥

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le plan infini de densité surfacique σ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(x,y,z)\vec{u}_x + E(x,y,z)\vec{u}_y + E(x,y,z)\vec{u}_z.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

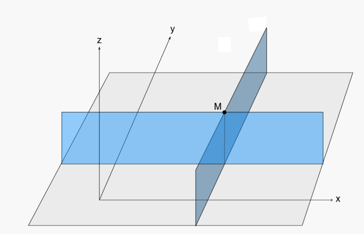
On a vu que la distribution était invariantes par translations selon x et y, ainsi le champ ne dépend pas de ses coordonnées

$$\vec{E}(M) =$$

Champ électrique

Composantes et orientations du champ électrique

Considérons le plan infini de densité surfacique σ.



A priori, on ne sait rien du champ électrique au point M, on le note

$$\vec{E}(M) = E(x, y, z)\vec{u}_x + E(x, y, z)\vec{u}_y + E(x, y, z)\vec{u}_z.$$

On peut simplifier cette expression à partir des symétries et des invariances de la distribution de charges.

On a vu que la distribution était invariantes par translations selon x et y, ainsi le champ ne dépend pas de ses coordonnées

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z.$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

Afin d'employer le théorème au cœur de cette leçon, il nous revenir sur une notion que l'on a déjà rencontrée l'année dernière : **le flux d'un champ**, ici celui du champ électrique au travers du surface $\mathcal{S}$ que l'on notera $\Phi(\vec{E})_{\mathcal{S}}$

$$\Phi(\vec{E})_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S$$

avec $\vec{n}$ correspond à un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface considérée.

Champ électrique

Flux du champ électrique

Afin d'employer le théorème au cœur de cette leçon, il nous revenir sur une notion que l'on a déjà rencontrée l'année dernière : **le flux d'un champ**, ici celui du champ électrique au travers du surface $\mathcal{S}$ que l'on notera $\Phi(\vec{E})_{\mathcal{S}}$

$$\Phi(\vec{E})_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S$$

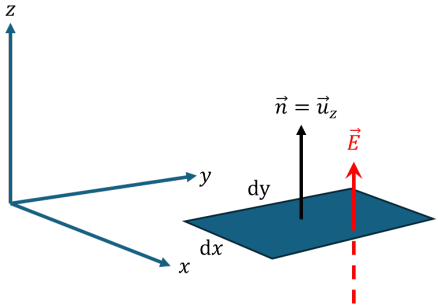
avec $\vec{n}$ correspond à un vecteur unitaire perpendiculaire à la surface considérée.

En fonction de la géométrie de la surface choisie, **il faut sélectionner la bonne expression** de $\vec{n}\mathrm{d}S$.

Champ électrique

Flux du champ électrique

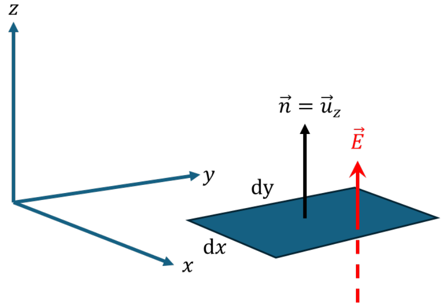
Commençons par la géométrie et le système de coordonnées le plus simple : un plan dans le système de coordonnées cartésiennes.



Champ électrique

Flux du champ électrique

Commençons par la géométrie et le système de coordonnées le plus simple : un plan dans le système de coordonnées cartésiennes.



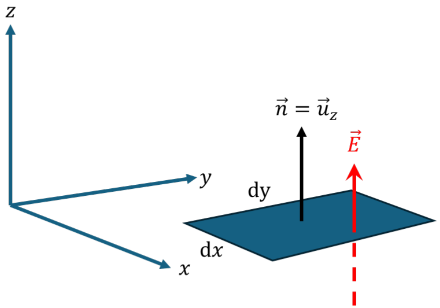
Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ alors l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S =$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

Commençons par la géométrie et le système de coordonnées le plus simple : un plan dans le système de coordonnées cartésiennes.



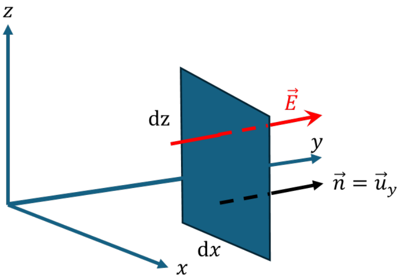
Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ alors l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S = \vec{u}_z \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

Commençons par la géométrie et le système de coordonnées le plus simple : un plan dans le système de coordonnées cartésiennes.



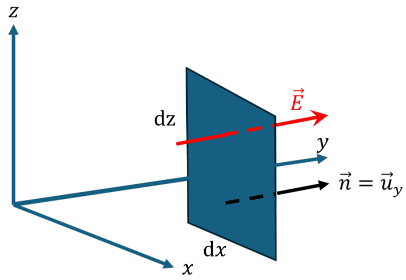
Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ alors l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S =$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

Commençons par la géométrie et le système de coordonnées le plus simple : un plan dans le système de coordonnées cartésiennes.



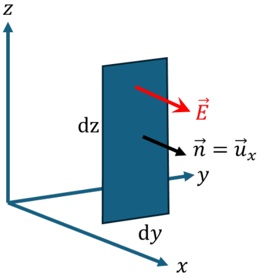
Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$ alors l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S = \vec{u}_y \mathrm{d}x\mathrm{d}z.$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

Commençons par la géométrie et le système de coordonnées le plus simple : un plan dans le système de coordonnées cartésiennes.



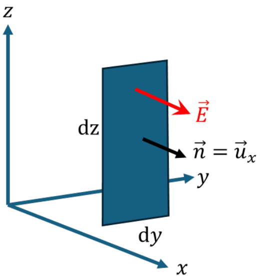
Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ alors l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S =$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

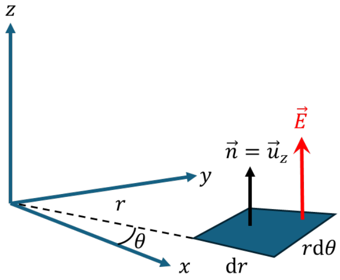
Commençons par la géométrie et le système de coordonnées le plus simple : un plan dans le système de coordonnées cartésiennes.



Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ alors l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S = \vec{u}_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

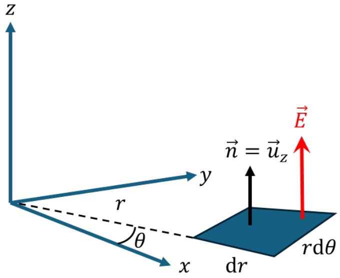
Poursuivons par les surfaces dans le système de coordonnées cylindriques.



Champ électrique

Flux du champ électrique

Poursuivons par les surfaces dans le système de coordonnées cylindriques.



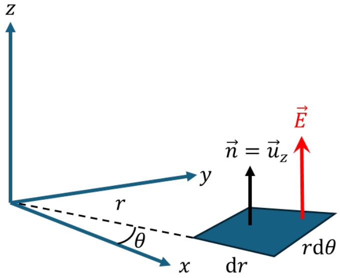
Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ alors l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S =$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

Poursuivons par les surfaces dans le système de coordonnées cylindriques.



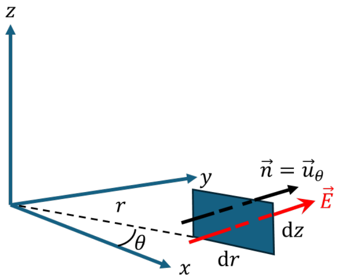
Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ alors l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S = \vec{u}_z r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta.$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

Poursuivons par les surfaces dans le système de coordonnées cylindriques.



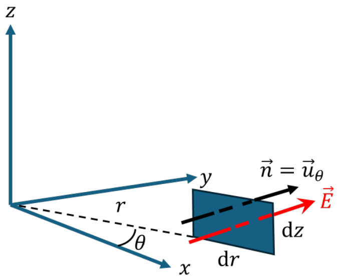
Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ alors l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S =$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

Poursuivons par les surfaces dans le système de coordonnées cylindriques.



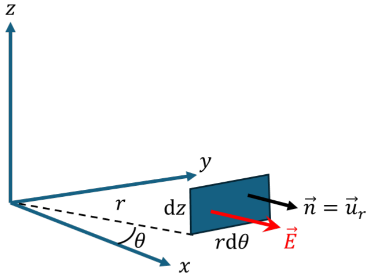
Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ alors l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S = \vec{u}_\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}z.$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

Poursuivons par les surfaces dans le système de coordonnées cylindriques.



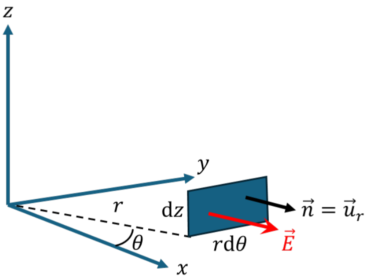
Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ alors l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S =$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

Poursuivons par les surfaces dans le système de coordonnées cylindriques.



Si la surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_z$ alors l'élément d'intégration est

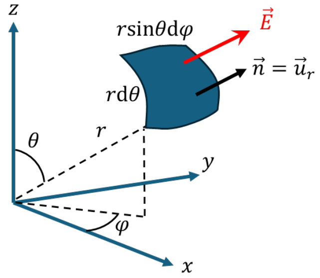
$$\vec{n}\mathrm{d}S = \vec{u}_r r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z.$$

Poursuivons par un seul type de surface dans le système de coordonnées sphériques.

Champ électrique

Flux du champ électrique

Poursuivons par un seul type de surface dans le système de coordonnées sphériques.



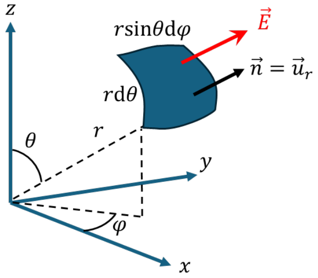
La surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ donc l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S =$$

Champ électrique

Flux du champ électrique

Poursuivons par un seul type de surface dans le système de coordonnées sphériques.



La surface s'étend selon les vecteurs $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\varphi$ donc l'élément d'intégration est

$$\vec{n}\mathrm{d}S = \vec{u}_r r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi.$$

Le théorème que l'on utilise pour obtenir l'expression du champ électrostatique dû à une distribution de charge est **le théorème de Gauss** :

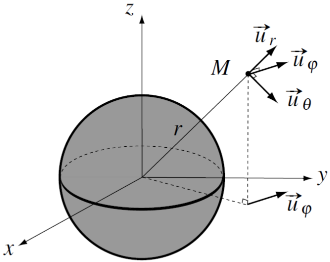
le flux sortant du champ électrostatique au travers une surface fermée $\mathcal{S}$ est égale à la charge électrique totale contenue à l'intérieur de cette surface Q_{int} divisée par la constante ε_0 ♥

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}. \quad ♥$$

Champ électrique

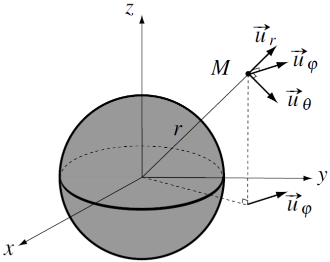
Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.



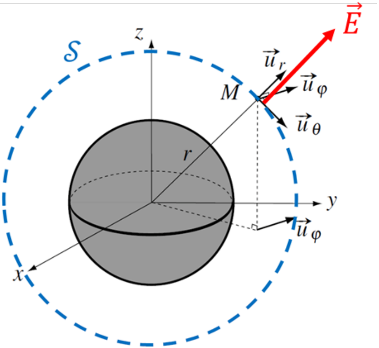
Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.



Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.



Première étape : une surface de Gauss extérieure, donc une sphère de rayon $r > R$.

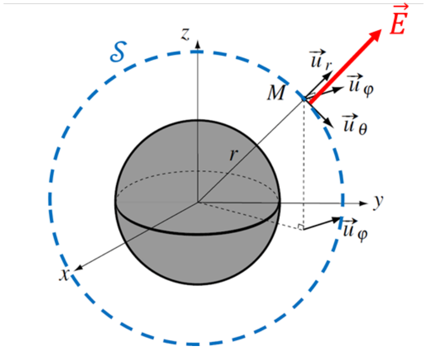
On a montré, d'après les symétries et les invariances de la distribution de charges sphériques que le champ $\vec{E}(M)$ est tel que

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r.$$

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.



Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.

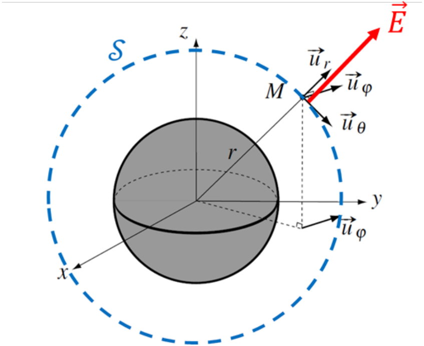
D'après le théorème de Gauss

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.



Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.

D'après le théorème de Gauss

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

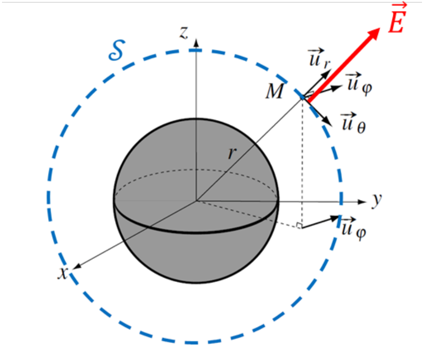
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} E(r) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.



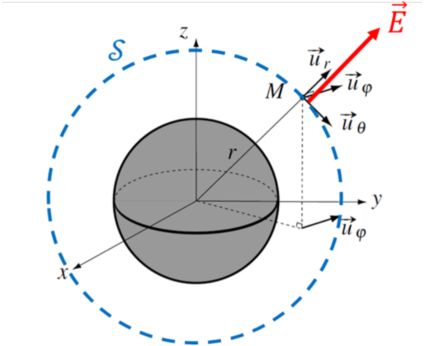
$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.



$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

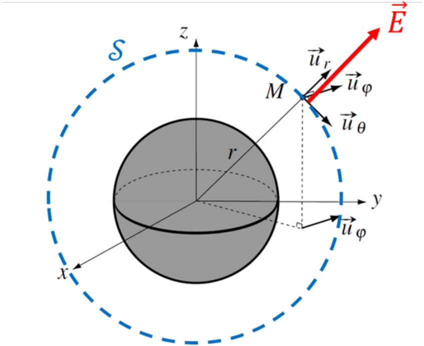
$$E(r)r^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.



$$E(r)r^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

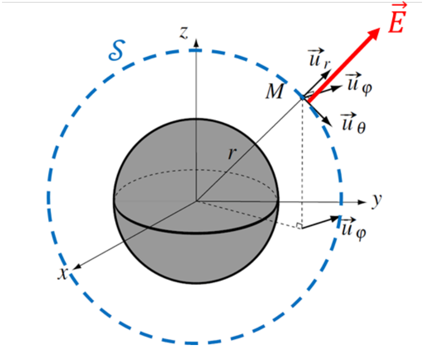
On reconnaît l'expression de **la surface d'une sphère** $\mathcal{S} = 4\pi r^2$.

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.



$$E(r)r^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

On reconnaît l'expression de **la surface d'une sphère** $\mathcal{S} = 4\pi r^2$.

Champ électrique

Théorème de Gauss

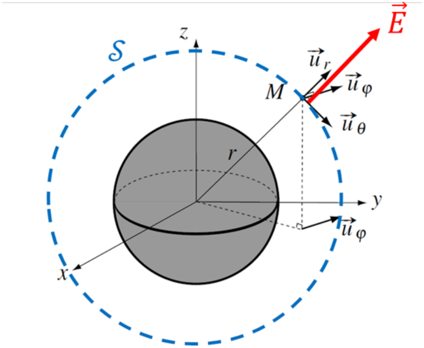
Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.

Finalement

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(M)$$

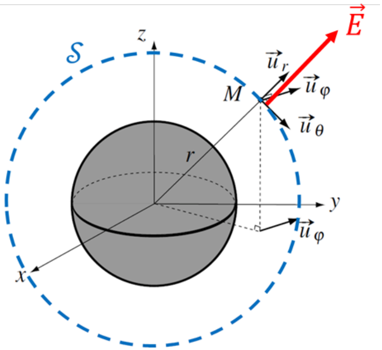


Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.



Finalement

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

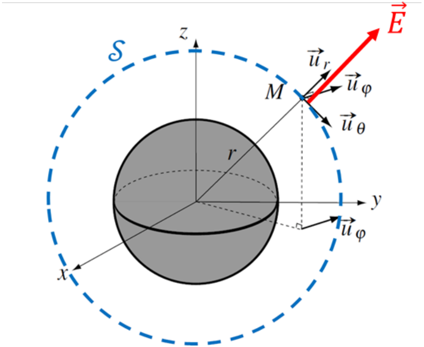
$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\vec{u}_r.$$

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.



On constate que le champ électrostatique extérieur à une sphère chargée est identique à celui d'une charge ponctuelle de même charge Q. ♥

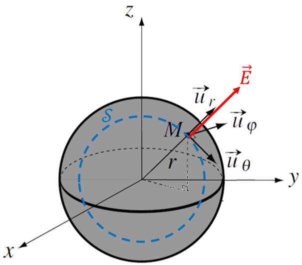
$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\vec{u}_r.$$

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.



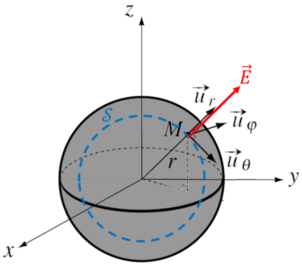
Deuxième étape : on choisit une surface de Gauss intérieur, donc une sphère de rayon $r < R$ pour exprimer **le champ électrostatique intérieur à la distribution**.

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.



La solution est similaire, mais dans ce cas la charge dans la surface n'est plus Q mais Q_{int}

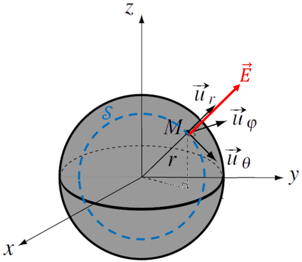
$$\vec{E}(M) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \vec{u}_r.$$

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.



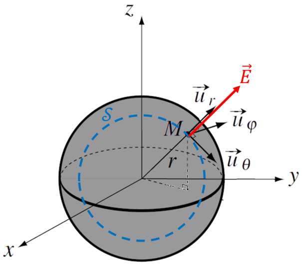
On peut obtenir l'expression de Q_{int} à partir de la densité volumique ρ uniforme de la sphère et du volume de la sphère de Gauss $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q_{\text{int}}}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.



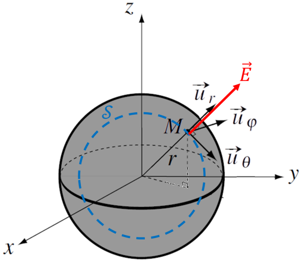
Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.
Ainsi

$$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q_{\text{int}}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad \text{donc} \quad Q_{\text{int}} = Q\frac{r^3}{R^3}.$$

Champ électrique

Théorème de Gauss

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour une sphère chargée avec une charge Q et de rayon R.



Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour une sphère chargée, on choisit une surface de Gauss aussi sphérique**.
Donc

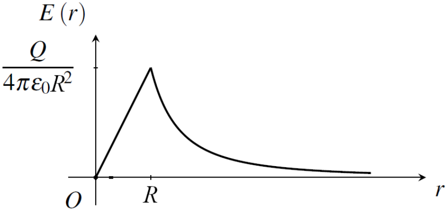
$$\vec{E}(M) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}\vec{u}_r = \frac{Qr^3}{4\pi r^2 R^3 \varepsilon_0}\vec{u}_r = \frac{Qr}{4\pi R^3 \varepsilon_0}\vec{u}_r.$$

Les surfaces de Gauss externe et interne à la distribution de charges sphérique nous permet d'obtenir l'expression du champ électrique émis par la distribution

$$\vec{E}(M) = \frac{Qr}{4\pi R^3 \varepsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{si } r < R$$

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \vec{u}_r \quad \text{si } r > R.$$

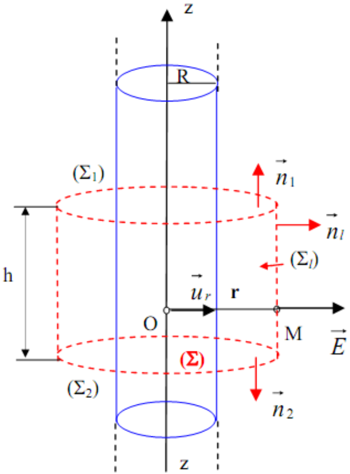
On remarque que les deux expressions sont égales pour $r = R$: il y a continuité du champ à la frontière des deux zones intérieure et extérieure.



Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour un cylindre infini chargé avec une charge Q et de rayon R.

Exploitons le théorème de Gauss pour obtenir l'expression du champ pour un cylindre infini chargé avec une charge Q et de rayon R.

Pour ce faire, il faut **choisir une surface de Gauss** : une surface fermée passant par un point M de l'espace. **Pour un cylindre chargée, on choisit une surface de Gauss aussi cylindrique de hauteur h tendant vers** ∞.



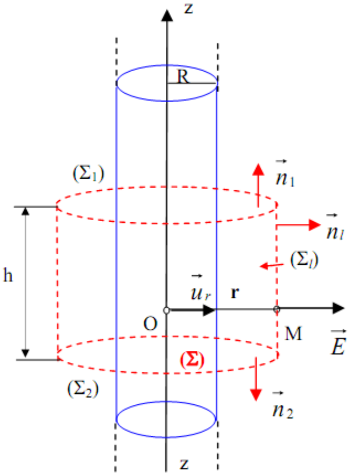
Champ électrique

Théorème de Gauss

D'après le théorème de Gauss

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

Ici on va séparer la surface de Gauss fermée $\mathcal{S}$ en trois surfaces Σ_1 (le haut de la surface), Σ_2 (le bas de la surface) et Σ_l (la surface latérale).

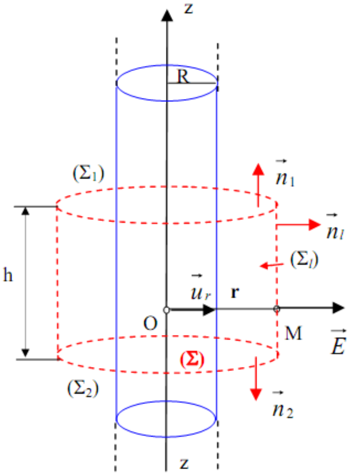


Champ électrique

Théorème de Gauss

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\mathrm{d}S$$
$$+ \iint_{\Sigma_2} \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\mathrm{d}S$$
$$+ \iint_{\Sigma_l} \vec{E}(M) \cdot \vec{n}\mathrm{d}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

Il faut exprimer $\vec{n}\mathrm{d}S$ pour chaque surface.

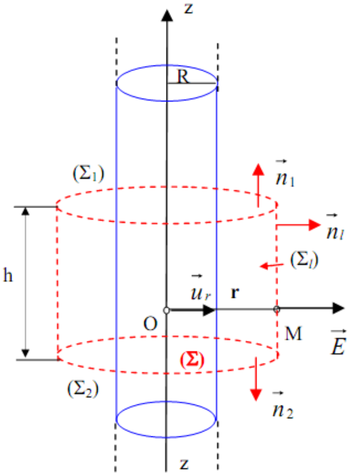


Champ électrique

Théorème de Gauss

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M)\cdot + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}(M)\cdot + \iint_{\Sigma_l} \vec{E}(M)\cdot = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

D'après les plans de symétrie et les invariances de la distributions $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

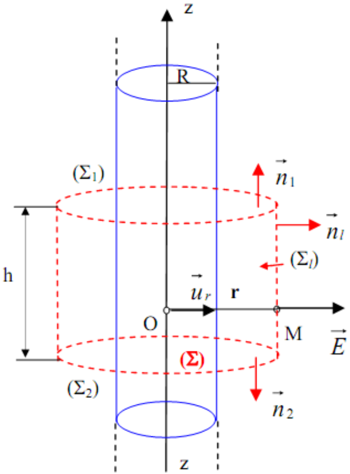


Champ électrique

Théorème de Gauss

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M)\cdot\vec{u}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$+\iint_{\Sigma_2} \vec{E}(M)\cdot$$
$$+\iint_{\Sigma_l} \vec{E}(M)\cdot \qquad = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

D'après les plans de symétrie et les invariances de la distributions $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

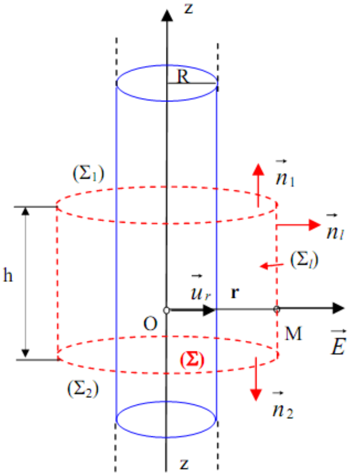


Champ électrique

Théorème de Gauss

$$
\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M)\cdot\vec{u}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
+&\iint_{\Sigma_2} \vec{E}(M)\cdot(-\vec{u}_z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
+&\iint_{\Sigma_l} \vec{E}(M)\cdot \qquad = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}
$$

D'après les plans de symétrie et les invariances de la distributions $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.

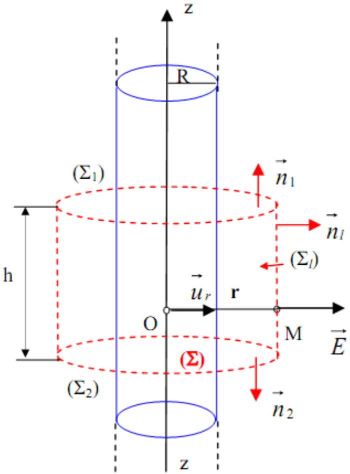


Champ électrique

Théorème de Gauss

$$\iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M) \cdot \vec{u}_z r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}(M) \cdot (-\vec{u}_z) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta + \iint_{\Sigma_l} \vec{E}(M) \cdot \vec{u}_r r \mathrm{d}r \mathrm{d}z = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

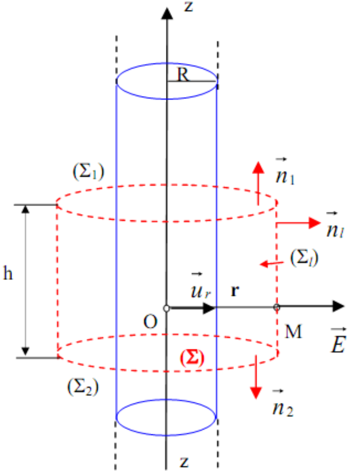
D'après les plans de symétrie et les invariances de la distributions $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$.



Champ électrique

Théorème de Gauss

$$\iint_{\Sigma_1} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \iint_{\Sigma_2} E(r)\vec{u}_r \cdot (-\vec{u}_z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \iint_{\Sigma_l} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$

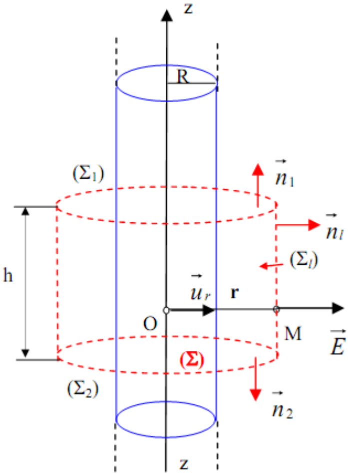


Champ électrique

Théorème de Gauss

$$\iint_{\Sigma_1} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \iint_{\Sigma_2} E(r)\vec{u}_r \cdot (-\vec{u}_z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta + \iint_{\Sigma_l} E(r)\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Seul le dernier terme est non nul.



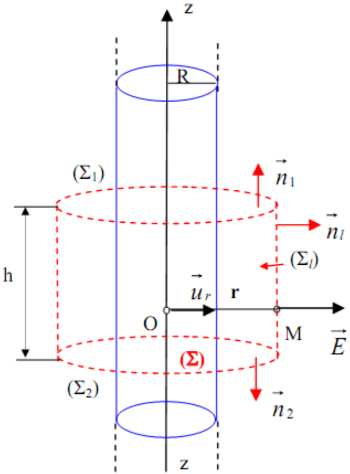
Champ électrique

Théorème de Gauss

$$\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} E(r) r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

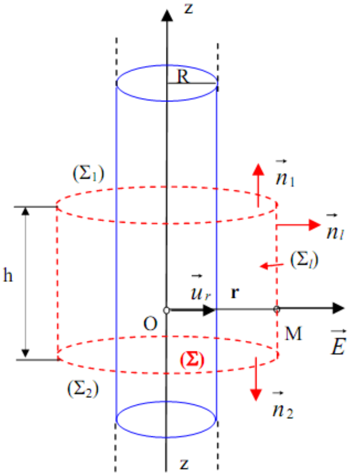
$$= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$



Champ électrique

Théorème de Gauss

$$
\begin{aligned}
\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} E(r) r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\
E(r) r \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta &= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \\
&= \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.
\end{aligned}
$$



Champ électrique

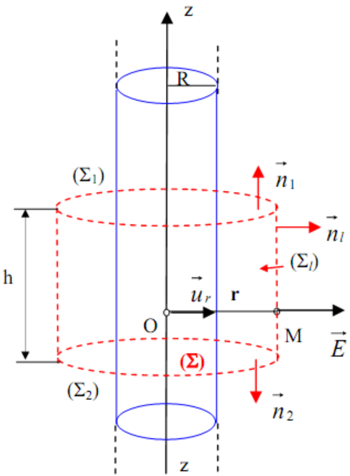
Théorème de Gauss

$$\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} E(r) r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) r \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) 2\pi r h = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

On reconnaît l'expression de **la surface latérale d'un cylindre** de rayon R et de hauteur h : $\Sigma_l = 2\pi r h$.

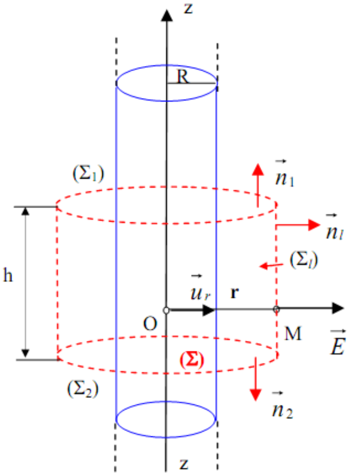


Champ électrique

Théorème de Gauss

L'expression du champ électrique au point M est donc

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r = \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi r h \varepsilon_0}\vec{u}_r.$$



Champ électrique

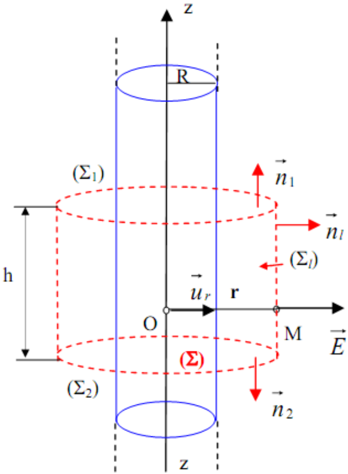
Théorème de Gauss

L'expression du champ électrique au point M est donc

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r = \frac{Q_{\text{int}}}{2\pi r h \varepsilon_0}\vec{u}_r.$$

Comme la surface de Gauss englobe tout le cylindre alors $Q_{\text{int}} = Q$ donc

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r = \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0}\vec{u}_r.$$

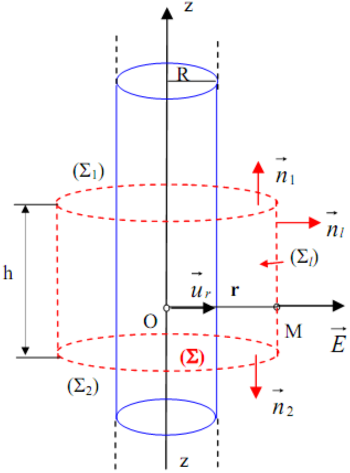


Champ électrique

Théorème de Gauss

Pour une surface de Gauss intérieur au cylindre, soit $r < R$, montrer que

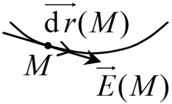
$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r = \frac{Qr}{2\pi R^2 h \varepsilon_0}\vec{u}_r.$$



Champ électrique

Lignes et tubes de champ

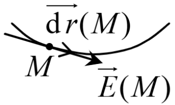
On définit une ligne de champ électrostatique $\vec{E}$ comme une courbe tangente au champ $\vec{E}$ en chacun de ses point.



Champ électrique

Lignes et tubes de champ

On définit une ligne de champ électrostatique $\vec{E}$ comme une courbe tangente au champ $\vec{E}$ en chacun de ses point.



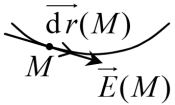
On obtient l'équation d'une ligne de champ en écrivant que le champ en un point M $\vec{E}$ est tangent à l'élément de longueur orientée $\mathrm{d}\vec{r}(M)$ de la ligne de champ en ce point, soit

$$\vec{E}(M) \wedge \mathrm{d}\vec{r}(M) = \vec{0}.$$

Champ électrique

Lignes et tubes de champ

On définit une ligne de champ électrostatique $\vec{E}$ comme une courbe tangente au champ $\vec{E}$ en chacun de ses point.



On obtient l'équation d'une ligne de champ en écrivant que le champ en un point M $\vec{E}$ est tangent à l'élément de longueur orientée $\mathrm{d}\vec{r}(M)$ de la ligne de champ en ce point, soit

$$\vec{E}(M) \wedge \mathrm{d}\vec{r}(M) = \vec{0}.$$

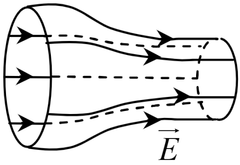
On retiendra que comme les lignes de champs sont tangents aux champs électrostatiques, elles sont, comme lui, **contenues dans les plans de symétries et orthogonales aux plans de symétries de la distribution de charges**.

Champ électrique

Lignes et tubes de champ

On peut définir un **tube de champ** comme les surfaces ouvertes formée par un ensemble de lignes de champs s'appuyant sur une courbe fermée. ♥

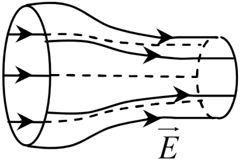
Dans l'exemple ci-contre, les courbes fermées sont deux cercles de diamètres différents.



Champ électrique

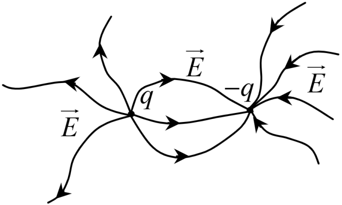
Lignes et tubes de champ

On peut définir un **tube de champ** comme les surfaces ouvertes formée par un ensemble de lignes de champs s'appuyant sur une courbe fermée.



Dans l'exemple ci-contre, les courbes fermées sont deux cercles de diamètres différents.

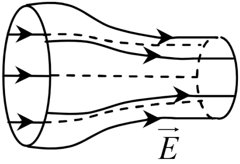
On peut établir une carte des lignes de champ à partir d'une distribution de charges discrètes en se rappelant que **le champ $\vec{E}$ diverge à partir d'une charge positive vers l'infini et converge depuis l'infini vers une charge négative**.



Champ électrique

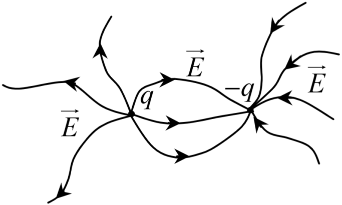
Lignes et tubes de champ

On peut définir un **tube de champ** comme les surfaces ouvertes formée par un ensemble de lignes de champs s'appuyant sur une courbe fermée. ♥



Dans l'exemple ci-contre, les courbes fermées sont deux cercles de diamètres différents.

On peut établir une carte des lignes de champ à partir d'une distribution de charges discrètes en se rappelant que **le champ $\vec{E}$ diverge à partir d'une charge positive vers l'infini et converge depuis l'infini vers une charge négative**. ♥



Une zone où les **lignes de champs sont resserrées** correspond à une zone où le **champ électrique est intense**, alors qu'une zone où les **lignes de champs sont espacées** correspond à une zone ooù **le champ électrique est faible**. ♥

Plan

Reprenons l'expression d'un champ électrostatique en un point M produit par une charge q située à l'origine d'un référentiel. En utilisant les coordonnées sphériques il vient que

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

On peut récrire cette expression

$$\vec{E}(M) =$$

n constate que le champ électrique dérive d'une autre grandeur.

Reprenons l'expression d'un champ électrostatique en un point M produit par une charge q située à l'origine d'un référentiel. En utilisant les coordonnées sphériques il vient que

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

On peut récrire cette expression

$$\vec{E}(M) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{u}_r = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\vec{u}_r.$$

On constate que le champ électrique dérive d'une autre grandeur.

Reprenons l'expression d'un champ électrostatique en un point M produit par une charge q située à l'origine d'un référentiel. En utilisant les coordonnées sphériques il vient que

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

On peut récrire cette expression

$$\vec{E}(M) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{u}_r = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\vec{u}_r.$$

On constate que le champ électrique dérive d'une autre grandeur.

On définit cette autre grandeur comme **le potentiel électrostatique** $V(M)$ au point M telle que

$$\vec{E}(M) = -\frac{\mathrm{d}V(M)}{\mathrm{d}r}\vec{u}_r.$$

Le potentiel électrique en un point M et le champ électrique en ce même point sont liés de telle manière que

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V(M)$$

avec $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ l'opérateur gradient.

Potentiel électrique

Définition du potentiel électrique

Le potentiel électrique en un point M et le champ électrique en ce même point sont liés de telle manière que

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V(M)$$

avec $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ l'opérateur gradient.

Un gradient est un opérateur qui s'applique à un scalaire, ici $V(M)$, et qui renvoie un vecteur, ici $\vec{E}(M)$. En coordonnées cartésiennes sont expression est

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V(M) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z.$$

Potentiel électrique

Définition du potentiel électrique

Le potentiel électrique en un point M et le champ électrique en ce même point sont liés de telle manière que

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M)$$

avec $\overrightarrow{\text{grad}}$ l'opérateur gradient.

Un gradient est un opérateur qui s'applique à un scalaire, ici $V(M)$, et qui renvoie un vecteur, ici $\vec{E}(M)$. En coordonnées cartésiennes sont expression est

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z.$$

On retiendra que le gradient d'une grandeur scalaire nous donne la direction et le sens de croissance de ce scalaire ("direction et sens de la pente la plus forte"). D'après la définition précédente $\vec{E}(M)$ est opposé au gradient de $V(M)$: **le champ électrique est orienté des potentiels les plus hauts vers les potentiels les plus faibles**.

Potentiel électrique

Définition du potentiel électrique

On retiendra que le potentiel électrique $V(M)$ mesuré en un point M dû à une charge ponctuelle q situé à l'origine d'un repère sphérique est

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \heartsuit$$

avec r la distance de la charge au point M.

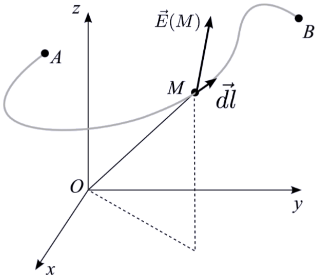
Potentiel électrique

Circulation du champ électrique

On peut étudier ce qu'on appelle **la circulation du champ électrique** $\mathcal{C}$ le long d'un chemin quelconque $\mathcal{L}$ tel que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{L}} \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M)$$

avec $\mathrm{d}\vec{\ell}(M)$ un élément de longueur orienté infinitésimal.



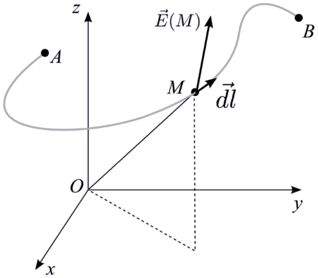
Potentiel électrique

Circulation du champ électrique

Si on utilise l'expression de $\vec{E}(M)$ en fonction de $V(M)$, il vient que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{L}} -\mathrm{grad}\, V(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M).$$

Or, une des propriétés de l'opérateur gradient est



Potentiel électrique

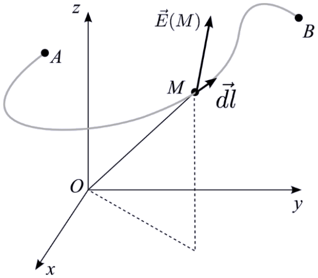
Circulation du champ électrique

Si on utilise l'expression de $\vec{E}(M)$ en fonction de $V(M)$, il vient que

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{L}} -\mathrm{grad}\, V(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M).$$

Or, une des propriétés de l'opérateur gradient est

$$\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \int_{V(A)}^{V(B)} -\mathrm{d}V(M) = [-V(M)]_{V(A)}^{V(B)} = V(A) - V(B).$$

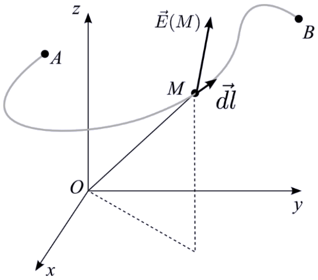


Potentiel électrique

Circulation du champ électrique

La circulation du champ électrique d'un point A vers un point B est égale à la différence de potentielle électrique entre le point A et le point B ♥

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M) = V(A) - V(B). \quad ♥$$



Que se passe-t'il pour un contour fermé ?

$$\mathcal{C} = \oint \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M) =$$

Que se passe-t'il pour un contour fermé ?

$$\mathcal{C} = \oint \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M) = \int_A^A \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M) = V(A) - V(A) = 0.$$

La circulation du champ électrique sur un contour fermé est nulle car cela revient à faire la différence de potentiel pour un même point. ♥

Potentiel électrique

Circulation du champ électrique

Que se passe-t'il pour un contour fermé ?

$$\mathcal{C} = \oint \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M) = \int_A^A \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M) = V(A) - V(A) = 0.$$

La circulation du champ électrique sur un contour fermé est nulle car cela revient à faire la différence de potentiel pour un même point. ♥

Décomposons ce dernier résultat en considérons un contour fermé $ABCDA$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \oint \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M) \\
0 &= \int_A^B \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M) + \int_B^C \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M) + \int_C^D \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M) + \int_D^A \vec{E}(M) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}(M) \\
0 &= [V(A) - V(B)] + [V(B) - V(C)] + [V(C) - V(D)] + [V(D) - V(A)]
\end{aligned}$$

Potentiel électrique

Circulation du champ électrique

$$0 = [V(A) - V(B)] + [V(B) - V(C)] + [V(C) - V(D)] + [V(D) - V(A)]$$

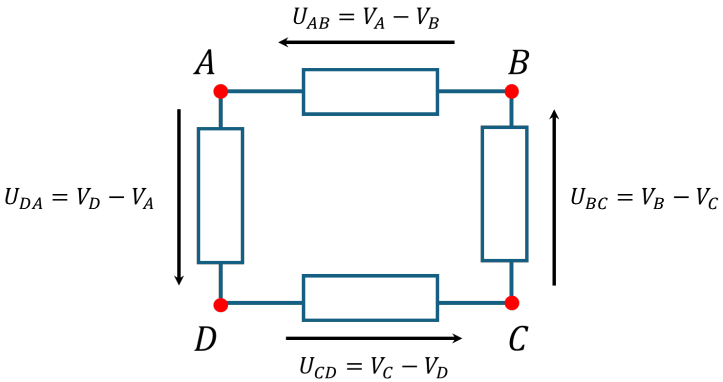
$$0 =$$

Potentiel électrique

Circulation du champ électrique

$$0 = [V(A) - V(B)] + [V(B) - V(C)] + [V(C) - V(D)] + [V(D) - V(A)]$$
$$0 = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DA}.$$

On retrouve la loi des mailles : **dans une maille la somme algébrique des tensions est nulle**.



Une surface équipotentielle est une zone de l'espace où le potentiel est le même. ♥

Potentiel électrique

Surfaces équipotentielles et lignes de champ

Une surface équipotentielle est une zone de l'espace où le potentiel est le même. ♥

Les surface équipotentielle sont normales aux lignes de champs. ♥

Potentiel électrique

Surfaces équipotentielles et lignes de champ

Une surface équipotentielle est une zone de l'espace où le potentiel est le même. ♥

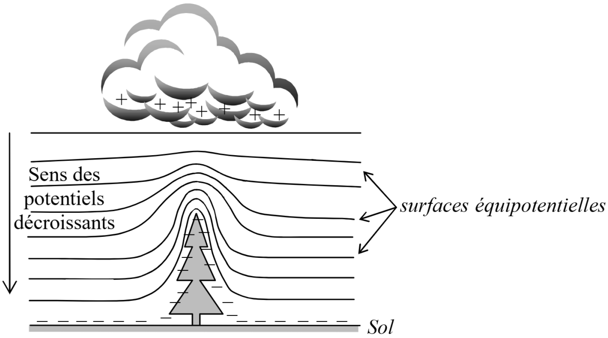
Les surface équipotentielle sont normales aux lignes de champs. ♥

De la même manière que l'**on peut tracer des rayons lumineux à partir des surfaces d'ondes**, et vice-versa, grâce au théorème de Malus, **on peut tracer des lignes de champ à partir de surfaces équipotentielles, et vice-versa**.

Potentiel électrique

Surfaces équipotentielles et lignes de champ

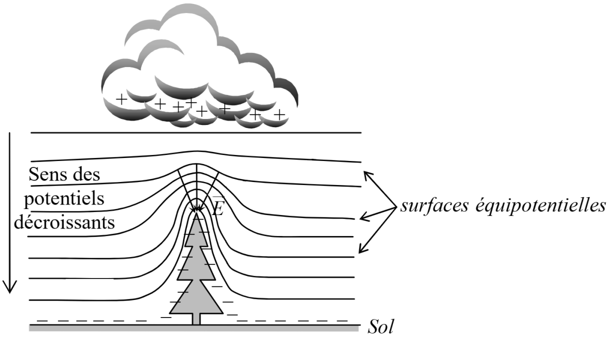
À partir des équipotentielles on peut obtenir les lignes de champs électriques et justifier pourquoi il faut s'éloigner de tout objet pointant vers le ciel.



Potentiel électrique

Surfaces équipotentielles et lignes de champ

À partir des équipotentielles on peut obtenir les lignes de champs électriques et justifier pourquoi il faut s'éloigner de tout objet pointant vers le ciel.



On constate que le champ électrique est plus intense au niveau des pointes, c'est ce qu'on nomme l'effet de pointe. Si le champ est assez intense, il peut alors ioniser l'air qui devient conducteur, un courant peut alors passer pour équilibrer les charges électriques entre le sol et le ciel : c'est la foudre.

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

Considérons un champ électrostatique $\vec{E}$. Si on place une charge q dans ce champ en un point M, elle est soumise à la force d'interaction électrostatique telle que

$$\vec{F} = \qquad\qquad . \quad \heartsuit$$

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

Considérons un champ électrostatique $\vec{E}$. Si on place une charge q dans ce champ en un point M, elle est soumise à la force d'interaction électrostatique telle que

$$\vec{F} = q\vec{E}(M).$$

D'après l'expression du champ en terme de potentiel, on peut aussi écrire

$$\vec{F} =$$

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

Considérons un champ électrostatique $\vec{E}$. Si on place une charge q dans ce champ en un point M, elle est soumise à la force d'interaction électrostatique telle que

$$\vec{F} = q\vec{E}(M).$$

D'après l'expression du champ en terme de potentiel, on peut aussi écrire

$$\vec{F} = -q\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(M).$$

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

Considérons un champ électrostatique $\vec{E}$. Si on place une charge q dans ce champ en un point M, elle est soumise à la force d'interaction électrostatique telle que

$$\vec{F} = q\vec{E}(M).$$

D'après l'expression du champ en terme de potentiel, on peut aussi écrire

$$\vec{F} = -q\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(M).$$

Or sait qu'une force est conservative si on peut le mettre sous la forme

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p(M)$$

avec $E_p(M)$ **l'énergie potentielle** dont dérive la force conservative.

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

Considérons un champ électrostatique $\vec{E}$. Si on place une charge q dans ce champ en un point M, elle est soumise à la force d'interaction électrostatique telle que

$$\vec{F} = q\vec{E}(M).$$

D'après l'expression du champ en terme de potentiel, on peut aussi écrire

$$\vec{F} = \, -q\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(M).$$

Or sait qu'une force est conservative si on peut le mettre sous la forme

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p(M)$$

avec $E_p(M)$ **l'énergie potentielle** dont dérive la force conservative.

Ici on peut identifier l'énergie potentielle de la charge q

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p(M) = -q\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(M) =$$

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

Considérons un champ électrostatique $\vec{E}$. Si on place une charge q dans ce champ en un point M, elle est soumise à la force d'interaction électrostatique telle que

$$\vec{F} = q\vec{E}(M).$$

D'après l'expression du champ en terme de potentiel, on peut aussi écrire

$$\vec{F} = -q\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(M).$$

Or sait qu'une force est conservative si on peut le mettre sous la forme

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p(M)$$

avec $E_p(M)$ **l'énergie potentielle** dont dérive la force conservative.

Ici on peut identifier l'énergie potentielle de la charge q

$$-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p(M) = -q\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V(M) =$$

$$\mathcal{E}_p(M) = qV(M).$$

On rappelle les relations entre travail et énergie potentielle

$$\delta W =$$

$$W_{AB} =$$

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

On rappelle les relations entre travail et énergie potentielle

$$\delta W = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p$$

$$W_{AB} =$$

On rappelle les relations entre travail et énergie potentielle

$$\delta W = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p$$

$$W_{AB} = \int_A^B \delta W = -\int_A^B \mathrm{d}\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B).$$

Dans le cas de l'énergie potentielle électrostatique, il vient que

$$\delta W =$$

$$W_{AB} =$$

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

On rappelle les relations entre travail et énergie potentielle

$$\delta W = \, -\, \mathrm{d}\mathcal{E}_p$$

$$W_{AB} = \int_A^B \delta W = -\int_A^B \mathrm{d}\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B).$$

Dans le cas de l'énergie potentielle électrostatique, il vient que

$$\delta W = \, -\, \mathrm{d}\mathcal{E}_p = -q\mathrm{d}V$$

$$W_{AB} =$$

On rappelle les relations entre travail et énergie potentielle

$$\delta W = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p$$

$$W_{AB} = \int_A^B \delta W = -\int_A^B \mathrm{d}\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B).$$

Dans le cas de l'énergie potentielle électrostatique, il vient que

$$\delta W = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -q\mathrm{d}V$$

$$W_{AB} = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B) = q\left(V(A) - V(B)\right) = qU_{AB}$$

avec U_{AB} la différence de potentiel ou tension prise du point B vers le point A.

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

On peut également adopter l'expression de la force d'interaction électrostatique donnée par la loi de Coulomb en considérant la force exercée par une charge q_2 sur une charge q_1 pour obtenir **l'énergie potentielle d'interaction** $\mathcal{E}_p$ entre ces deux charges

$$\vec{F}_{2\to 1} =$$

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

On peut également adopter l'expression de la force d'interaction électrostatique donnée par la loi de Coulomb en considérant la force exercée par une charge q_2 sur une charge q_1 pour obtenir **l'énergie potentielle d'interaction** $\mathcal{E}_p$ entre ces deux charges

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{2\to 1}.$$

On constate une ressemblance forte entre cette force et **la force d'interaction gravitationnelle** appliquée par une masse m_2 sur une masse m_1

$$\vec{F}_{2\to 1} =$$

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

On peut également adopter l'expression de la force d'interaction électrostatique donnée par la loi de Coulomb en considérant la force exercée par une charge q_2 sur une charge q_1 pour obtenir **l'énergie potentielle d'interaction** $\mathcal{E}_p$ entre ces deux charges

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{2\to 1}.$$

On constate une ressemblance forte entre cette force et **la force d'interaction gravitationnelle** appliquée par une masse m_2 sur une masse m_1

$$\vec{F}_{2\to 1} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{2\to 1}$$

avec G la constante de gravitation universelle.

En effet, on peut passer d'une expression à une autre en remplaçant le coefficient $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ par $-G$.

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

On peut ainsi utiliser l'expression de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle pour obtenir celle de l'énergie potentielle d'interaction électrostatique

$$\mathcal{E}_{p\,\text{grav}} =$$

$$\mathcal{E}_{p\,\text{élec}} =$$

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

On peut ainsi utiliser l'expression de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle pour obtenir celle de l'énergie potentielle d'interaction électrostatique

$$\mathcal{E}_{p\,\mathrm{grav}} = G\frac{m_1 m_2}{r}$$

$$\mathcal{E}_{p\,\text{élec}} =$$

Potentiel électrique

Energie potentiel électrostatique

On peut ainsi utiliser l'expression de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle pour obtenir celle de l'énergie potentielle d'interaction électrostatique

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p\,\mathrm{grav}} &= G\frac{m_1 m_2}{r} \quad \heartsuit \\ \mathcal{E}_{p\,\mathrm{élec}} &= -\ \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \heartsuit. \end{aligned}$$

On n'oubliera pas que les énergies potentielles sont définies à une constante près qui dépendra de l'origine des énergies potentielles choisie.