Lycée Charles Coëffin — Sciences physique

Fiche de travaux dirigés — CPGE TSI2

TD 12 : **Magnétostatique**

Objectifs

- Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant volumique ; justifier la modélisation d'une distribution de courant par une distribution filiforme.
- Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courants ; identifier les invariances d'une distribution de courants ; exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de courants pour prévoir des propriétés du champ magnétostatique créé.
- Identifier les situations pour lesquelles le champ magnétostatique peut être calculé simplement à l'aide du théorème d'Ampère ; choisir un contour, une surface et les orienter pour appliquer le théorème d'Ampère en vue de déterminer l'expression d'un champ magnétostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
- Justifier le choix d'une modélisation d'une distribution de courants par une distribution infinie ; établir les expressions des champs magnétostatiques créés en tout point de l'espace par un fil rectiligne infini de section non nulle, parcouru par des courants uniformément répartis en volume, par un solénoïde infini en admettant que le champ est nul à l'extérieur.
- Orienter les lignes de champ magnétostatique créées par une distribution de courants ; associer les variations de l'intensité du champ magnétostatique à l'évolution de la position relative des lignes de champ ; vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.

Pré-requis : systèmes de coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques. Champ magnétique : règle de la main droite ; sources de champs magnétique ; cartes de champ magnétique.

1 Cahier d'entraînement

EMP2 Fiche d'entraînement n° 4 Électromagnétisme en régime permanent

Magnétostatique

Prérequis
Repérages cartésien, cylindrique et sphérique. Intégrales curvilignes, de surface et de volume. Champs scalaire et vectoriel. Théorème d'Ampère.

Constantes utiles
- → Charge électrique élémentaire : $e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
- → Masse de l'électron : $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
- → Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$

Distributions de courant et densités de courant

Entraînement 4.1 — Dimension de densités de courant.

La dimension d'une intensité électrique est notée I, celle d'un temps T, et celle d'une longueur L.

a) On note $\vec{j}$ une densité volumique de courant, $\vec{j_s}$ une densité surfacique de courant et I l'intensité d'un courant. Quelles sont les relations correctes ?

(a) $I = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$ (b) $\vec{j} = \iint I \overrightarrow{dS}$ (c) $I = \iiint \vec{j} \cdot \overrightarrow{dV}$ (d) $I = \int \vec{j_s} \cdot \overrightarrow{d\ell}$

....

b) Comment s'écrit la dimension de la norme d'une densité volumique de courant $\vec{j}$?

(a) $\mathrm{I \cdot L^{-3}}$ (b) $\mathrm{I \cdot T \cdot L^{-2}}$ (c) $\mathrm{I \cdot T \cdot L^{-3}}$ (d) $\mathrm{I \cdot L^{-2}}$

....

c) Comment s'écrit la dimension de la norme d'une densité surfacique de courant $\vec{j_s}$?

(a) $\mathrm{I \cdot L^{-1}}$ (b) $\mathrm{I \cdot T \cdot L^{-1}}$ (c) $\mathrm{I \cdot L^{2}}$ (d) $\mathrm{I \cdot L^{-2}}$

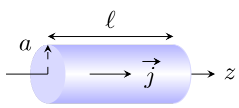
....

Entraînement 4.2 — Densité volumique de courant en coordonnées cylindriques.

Soit un conducteur cylindrique (rayon a et longueur ℓ) d'axe (Oz) parcouru par un courant d'intensité

$$I = \iint \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS},$$

où $\vec{j} = j_0 \frac{b}{r} \vec{e_z}$ est le vecteur densité volumique de courant, avec j_0 et b constants, et $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{e_z}$ un élément de section orientée.



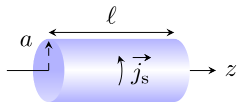
Exprimer I en fonction de la section S du conducteur, du rayon a et des constantes j_0 et b.

....

Entraînement 4.3 — Densité surfacique de courant en coordonnées cylindriques.

Soit un conducteur cylindrique (rayon a et longueur ℓ) d'axe $(\mathrm{O}z)$ parcouru par un courant d'intensité

$$I = \int \overrightarrow{j_{\mathrm{s}}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell},$$



où $\overrightarrow{j_{\mathrm{s}}} = j_{\mathrm{s},0}\overrightarrow{e_\theta}$ est un vecteur densité surfacique de courant constant et $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$ un élément de longueur orientée.

Exprimer I en fonction de la longueur ℓ du conducteur et de la constante $j_{\mathrm{s},0}$.

....

Symétries et invariances

Entraînement 4.4 — Vent solaire.

Le vent solaire est un flux de particules chargées, majoritairement constitué de protons et de noyaux d'hélium. Le Soleil est considéré comme ponctuel et placé à l'origine O d'un repère sphérique. En première approximation, le vent solaire est assimilé à un courant de particules radial et stationnaire.

a) Si l'émission est isotrope, quelle est l'expression simplifiée du vecteur densité de courant en $\mathrm{M}(r, \theta, \varphi)$?

- (a) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r, \theta)\overrightarrow{e_\theta}$
- (b) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta}$
- (c) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r, \theta)\overrightarrow{e_r}$
- (d) $\vec{j}(\mathrm{M}) = j_r(r)\overrightarrow{e_r}$

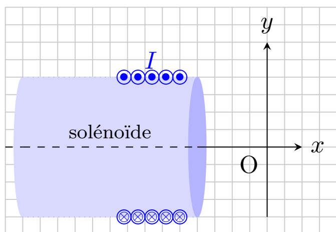
....

b) Exprimer alors l'intensité I_R du courant électrique traversant une sphère de rayon R.

....

Entraînement 4.5 — Propriétés de symétrie d'une distribution de courant (I).

Soit un solénoïde d'axe $(\mathrm{O}x)$, parcouru par un courant stationnaire d'intensité I.



On rappelle qu'un plan de symétrie (resp. antisymétrie) d'une distribution de courant est un plan pour lequel les courants de la distribution sont répartis de manière strictement identique (resp. opposée) de part et d'autre du plan.

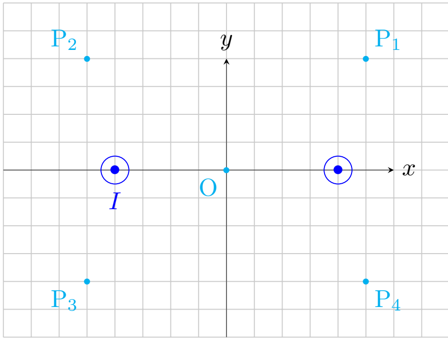
Parmi les propositions ci-dessous, quelles sont celles qui sont correctes ?

- (a) Le plan $(x\mathrm{O}y)$ est un plan de symétrie de la distribution.
- (b) Le plan $(x\mathrm{O}y)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution même si le solénoïde n'est pas infiniment long.
- (c) Le plan $(x\mathrm{O}z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution.
- (d) Le plan $(x\mathrm{O}z)$ est un plan de symétrie de la distribution seulement si le solénoïde est infiniment long.

....

Entraînement 4.6 — Propriétés de symétrie d'une distribution de courant (II).

On considère la situation suivante, où deux fils infinis sont parcourus par des courants de même intensité I et de même sens (de l'arrière vers l'avant).



On rappelle qu'en tout point d'un plan de symétrie (respectivement d'antisymétrie) de la distribution, le champ magnétostatique est perpendiculaire (respectivement appartient) à ce plan.

a) Le plan (xOy) est un plan d'antisymétrie pour la distribution.

Quelles sont les propositions correctes ?

(a) Le vecteur $\overrightarrow{e_z}$ est normal à ce plan.

(b) Au point O, le champ $\overrightarrow{B}$ est selon $\pm\overrightarrow{e_z}$.

(c) Au point P_1, le champ $\overrightarrow{B}$ appartient à ce plan.

(d) Au point P_3, le champ $\overrightarrow{B}$ appartient à ce plan.

....

b) Le plan (yOz) est un plan de symétrie pour la distribution.

Quelles sont les propositions incorrectes ?

(a) Le vecteur $\overrightarrow{e_x}$ est normal à ce plan.

(b) $\overrightarrow{B}(P_4) = B_y(P_4)\overrightarrow{e_y} + B_z(P_4)\overrightarrow{e_z}$

(c) Au point P_2, le champ $\overrightarrow{B}$ est selon $\pm\overrightarrow{e_y}$.

(d) $\overrightarrow{B}(O) = B(O)\overrightarrow{e_z}$

....

c) Quelles sont les propositions incomplètes ou incorrectes ?

(a) Le plan (xOz) est un plan d'antisymétrie pour la distribution.

(b) $\overrightarrow{B}(O) = \overrightarrow{0}$

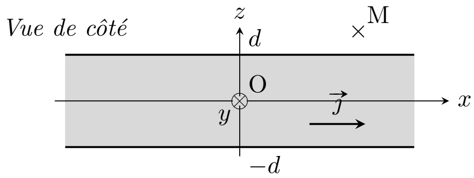
(c) Le champ $\overrightarrow{B}$ est toujours perpendiculaire au plan (xOz).

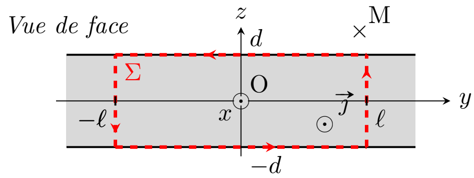
(d) $\overrightarrow{B}(P_2) = -\overrightarrow{B}(P_1)$

....

Entraînement 4.7 — **Couche épaisse infinie parcourue par un courant.**

Soit une couche infinie suivant les axes (Ox) et (Oy), située entre les plans d'équations $z = d$ et $z = -d$, parcourue par un courant de densité volumique uniforme $\vec{j} = j_0\vec{e_x}$.





a) Exprimer l'intensité I du courant qui traverse la surface Σ orientée suivant $\vec{e_x}$ ...

b) Quelles sont les invariances de cette distribution de courant ?

(a) invariance par translation parallèlement à l'axe (Ox)

(b) invariance par rotation autour de l'axe (Oz)

(c) invariance par translation parallèlement à l'axe (Oy)

(d) aucune invariance

....

c) Le champ magnétostatique au point M est suivant le vecteur $\vec{e_y}$.

Sachant que les composantes du champ magnétostatique possèdent les mêmes invariances que la distribution, déterminer l'expression correcte.

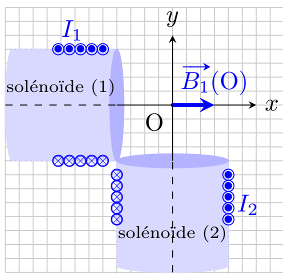
(a) $\vec{B}(M) = B_y(y)\vec{e_y}$ (b) $\vec{B}(M) = B_y(z)\vec{e_y}$ (c) $\vec{B}(M) = B_y(y,z)\vec{e_y}$

....

Champs magnétostatiques

Entraînement 4.8 — **Théorème de superposition.**

Deux solénoïdes longs, parcourus par des courants stationnaires d'intensités I_1 et I_2, sont positionnés perpendiculairement entre eux et à égale distance d'un point O. En ce point, le champ magnétostatique produit par le solénoïde (1) est supposé s'écrire $\vec{B_1}(O) = \mu_0 n_1 I_1 \vec{e_x}$, avec n_1 le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde (1).



a) Par analogie avec l'expression fournie pour le solénoïde (1), écrire le champ magnétostatique produit par le solénoïde (2) au point O.

....

b) D'après le théorème de superposition, comment s'écrit alors le champ total produit au point O ?

(a) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1I_1 + n_2I_2)\vec{e_z}$

(b) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1I_1 - n_2I_2)\vec{e_z}$

(c) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1I_1 - n_2I_2)(\vec{e_x} + \vec{e_y})$

(d) $\vec{B}(O) = \mu_0(n_1I_1\vec{e_x} - n_2I_2\vec{e_y})$

....

Entraînement 4.9 — Analyse dimensionnelle et champ magnétique.

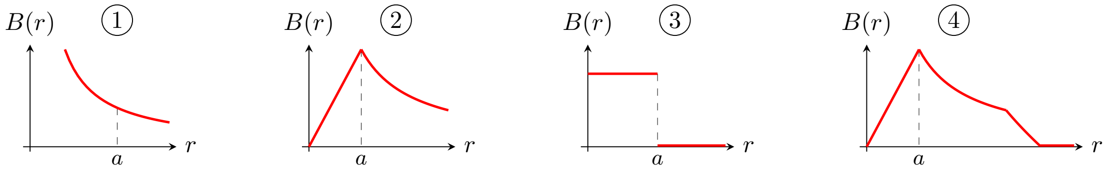
Sachant que la force magnétique s'exprime comme $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, avec $\vec{v}$ une vitesse, q une charge électrique et $\vec{B}$ un champ magnétique, déterminer laquelle des expressions ci-dessous est homogène à la norme B d'un champ magnétique si m est une masse et R un rayon.

(a) $\dfrac{qv}{mR}$ (b) $\dfrac{mR}{qv}$ (c) $\dfrac{qR}{mv}$ (d) $\dfrac{mv}{qR}$

....

Entraînement 4.10 — Graphes et expressions d'un champ magnétique.

On donne les graphes associés aux champs magnétiques créés par divers dispositifs, chacun étant parcouru par un courant d'intensité I.



Le champ magnétique d'un conducteur cylindrique de rayon a parcouru par un courant volumique uniforme est donné par

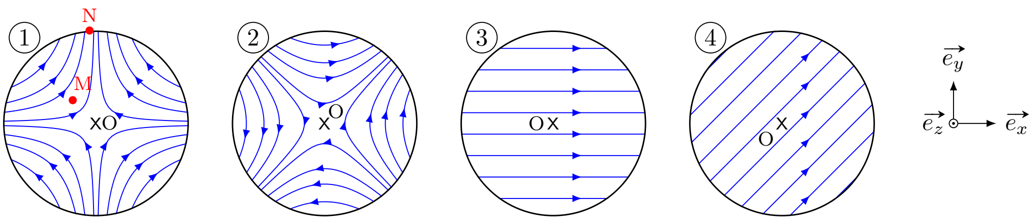
$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \text{ pour } 0 < r < a \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ pour } r > a.$$

Quel graphe correspond au champ magnétique créé par ce conducteur cylindrique ? ....

Entraînement 4.11 — Champ magnétostatique quadrupolaire.

En repérage cartésien et dans le plan d'équation $z = 0$, les composantes du champ magnétostatique créé par un quadrupôle sont $B_x = ky$, $B_y = kx$ et $B_z = 0$, avec k une constante non nulle.

a) Quelle carte de champ correspond à l'expression du champ donnée ci-dessus ? ....



b) En ce qui concerne la carte de champ (1), quelle est la proposition valide ?

(a) $\vec{B}(\mathrm{M}) = \vec{B}(\mathrm{N})$ (b) $B(\mathrm{M}) < B(\mathrm{N})$ (c) $B(\mathrm{M}) > B(\mathrm{N})$

....

Annale

Physique-chimie dans la cuisine !

Les **parties I à III** s'intéressent au fonctionnement de trois appareils électroménagers : une plaque à induction, une machine à eau pétillante et un réfrigérateur.
La **partie IV** concerne l'étude d'une bouteille de vin.
Enfin, la **partie V** traite de l'étude d'une expérience réalisée dans un four micro-ondes, sous forme de question ouverte.

Partie I - Plaque à induction

Dans une plaque à induction, une bobine est placée sous une plaque en vitrocéramique. Lorsque cette bobine est parcourue par un courant électrique alternatif, un champ magnétique variable induit un champ électrique qui entraîne la circulation de courants électriques dans le métal du récipient posé sur la plaque. Ces courants électriques, appelés " courants de Foucault ", génèrent de l'énergie thermique par effet Joule.
Nous nous intéresserons tour à tour au champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur infinie, puis par une spire circulaire.
Ensuite, nous nous intéresserons au phénomène d'induction dans le fond de la casserole et à l'effet Joule associé.

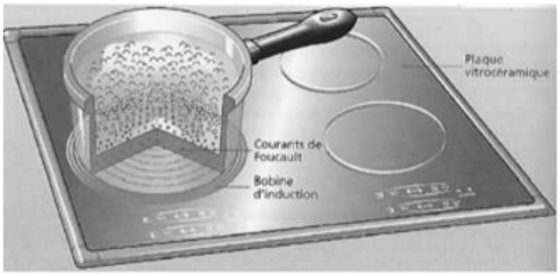


Figure 1 - Plaque à induction

Source : La physique par les objets quotidiens – Cédric Ray et Jean-Claude Poizat

Les données utiles à la **Partie I** sont indiquées ci-dessous :

Données - Partie I
Théorème de Stokes :
$\oint_{(C)} \vec{A}\,.\,\vec{dl} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot}\,(\vec{A})\,\vec{dS}$ où Σ est une surface qui s'appuie sur le contour fermé C orienté.
Conductivité thermique de l'acier : $\lambda = 16\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
Capacité thermique massique de l'acier : $c = 1{,}0\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$
Masse volumique de l'acier : $\rho = 8\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

I.1 - Théorème d'Ampère

Q1. Écrire l'équation de Maxwell-Ampère reliant le champ magnétique, le vecteur densité de courant et le champ électrique.

On considère que l'on se trouve dans le cas de régimes lentement variables. Le champ magnétique s'identifie alors au champ magnétique déterminé selon une approche de magnétostatique.

Q2. Que devient l'équation de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'hypothèse précédente ?

Q3. En utilisant le théorème de Stokes, démontrer le théorème d'Ampère dans le cadre de la magnétostatique et dans le cas des courants circulant dans des circuits filiformes. Vous préciserez sur un schéma les conventions d'orientation des surfaces et contours utilisés.

I.2 - Champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur infinie

Soit un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant électrique d'intensité I et placé dans le vide. L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$.
On considère que, dans l'hypothèse de régimes lentement variables, le cas d'un courant d'intensité variable au cours du temps est assimilable au cas d'un courant d'intensité constante.

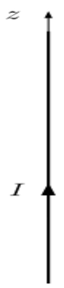


Figure 2 - Fil infini parcouru par un courant électrique d'intensité I

Q4. Analyser les symétries et les invariances de la distribution de courant pour déterminer la direction du champ magnétique et les paramètres d'espace dont dépendent sa ou ses coordonnée(s) en coordonnées cylindriques.

Q5. En appliquant le théorème d'Ampère, établir l'expression du champ magnétique créé par ce fil à une distance *R* du fil. Préciser le contour d'Ampère choisi.

I.3 - Champ magnétique créé par une spire

Soit une spire circulaire de rayon *r*, de centre O, parcourue par un courant d'intensité I.
On considère ici encore que, dans l'hypothèse de régimes lentement variables, le cas d'un courant d'intensité variable au cours du temps est assimilable au cas d'un courant d'intensité constante.
Soit un point M situé sur l'axe de la spire, de coordonnée *x* et tel que du point M la spire soit vue sous l'angle α.

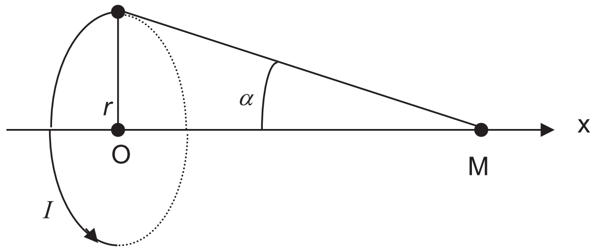


Figure 3 - Spire circulaire de rayon *r* parcourue par un courant d'intensité I

Q6. En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de courant, déterminer la direction et le sens du champ magnétique créé par cette spire au point M.
Reproduire succinctement le schéma précédent et représenter la direction et le sens du champ magnétique créé au point M.

Le champ magnétique créé en un point M de l'axe de la spire est donné par l'expression :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} sin^3(\alpha) = B_0\ sin^3(\alpha)$$

où α représente l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point M et $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2r}$.

Q7. Établir l'expression de *B* au point M en fonction de B_0, *r* et de *x*, *x* représentant la distance entre le point O et le point M.

Pour des distances *x* petites par rapport au rayon de la spire, un développement limité permet de montrer que l'expression du champ B au point M est donnée par :

$$B = B_0\left(1 - \frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2}\right).$$

Q8. Quelle valeur maximale de *x* permet de considérer que le champ B est égal à B_0, (à 10 % près).
On exprimera *x* en fonction de *r*. On donne $\sqrt{\frac{2}{30}} \approx 0{,}26$.

I.4 - Chauffage par induction

Une plaque à induction comporte une bobine (P) de rayon r_1 permettant de créer un champ magnétique. La bobine (P) est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0\cos(\omega t)$ et de fréquence f = 60 kHz. On modélise la casserole métallique posée sur la plaque par une spire (S) circulaire de rayon $r_2 < r_1$. Elle est parcourue par un courant d'intensité *i(t)*.
Les sens des courants sont arbitrairement ceux mentionnés sur la **figure 4**.

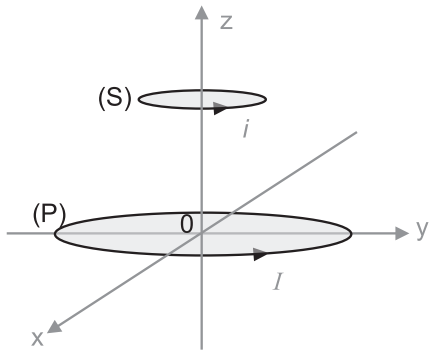


Figure 4 - Représentation de la bobine (P) et de la spire (S)

On considère les hypothèses simplificatrices suivantes :
- la casserole posée sur la plaque à induction est à une distance z_0 de la bobine ;
- le champ magnétique auquel est soumis la casserole est uniforme et son expression est donnée par : $\vec{B} = B_0\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_z}$ où B_0 est une constante ;
- la spire (S) a une résistance électrique R et son inductance propre est négligée.

Q9. Déterminer l'expression du flux Φ du champ magnétique qui traverse la spire (S).

Q10. En déduire l'expression de la force électromotrice induite *e* apparaissant dans la spire (S).

Q11. Déterminer l'expression du courant induit *i(t)* dans la bobine.

Q12. Déterminer l'expression de la puissance instantanée *P(t)* dissipée par effet Joule dans la spire (S).

Q13. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que la puissance moyenne P_{moy} dissipée par effet Joule dans la spire (S) est égale à :

$$P_{moy} = \frac{\left(\omega B_0 \pi {r_2}^2\right)^2}{2R}.$$

Q14. Par quel phénomène physique l'énergie thermique transmise au fond de la casserole par effet Joule est-elle transmise au contenu de la casserole ?

Q15. Citer un intérêt d'une plaque à induction par rapport à une plaque de cuisson électrique fonctionnant à l'aide d'une résistance électrique.

Q16. Déterminer l'ordre de grandeur des longueurs que r_1, r_2 et z_0 ne doivent pas dépasser pour permettre de considérer que l'approximation des régimes quasi-stationnaires est justifiée. Commenter.