

Leçon 1 : stabilité des systèmes linéaires

E. Capitaine

TSI 2 - Lycée Charles Coëffin

3 septembre 2025

Plan

- 1 Introduction
- 2 Système linéaire continu et invariant temporellement
 - Vocabulaire
 - Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle
 - Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert
- 3 Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2
 - Définition
 - Système du premier ordre
 - Système du premier ordre
 - Système du deuxième ordre
 - Système du premier ordre
- 4 Signal périodique non sinusoïdal
 - Décomposition en série de Fourier
 - Effet de filtrages sur un signal périodique
 - Détermination d'un signal de sortie

Plan

1 Introduction

2 Système linéaire continu et invariant temporellement

- Vocabulaire
- Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle
- Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

3 Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

- Définition
- Système du premier ordre
- Système du premier ordre
- Système du deuxième ordre
- Système du premier ordre

4 Signal périodique non sinusoïdal

- Décomposition en série de Fourier
- Effet de filtrages sur un signal périodique
- Détermination d'un signal de sortie

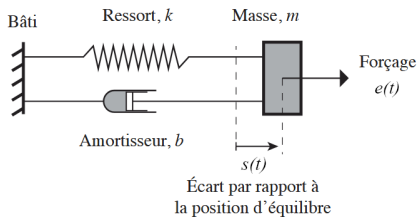
Introduction

Exemple de l'amortisseur de moto
(chaîne Youtube : Integral Physics)

Modèle masse ressort amortisseur : une masse m soumise à la force de rappel d'un ressort et à une force de frottement fluide.

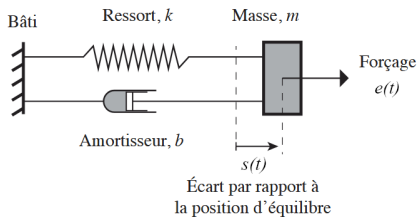
On simplifie le problème en considérant un amortisseur subissant une excitation horizontale $e(t)$.

Introduction



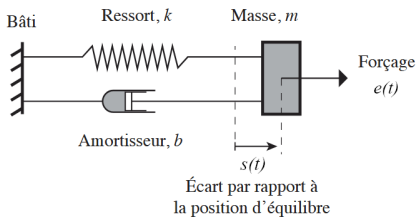
Introduction

- Système : masse



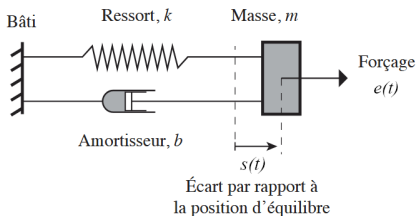
Introduction

- Système : masse
- Référentiel : référentiel terrestre

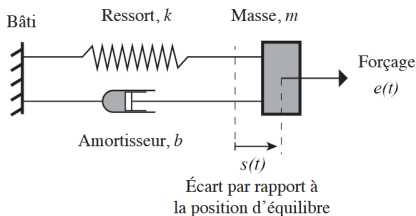


Introduction

- Système : masse
- Référentiel : référentiel terrestre
- Système de coordonnées :
cartésien, translation selon l'axe
(Ox) avec $s = x - \ell_0$ ou
 $x = s + \ell_0$

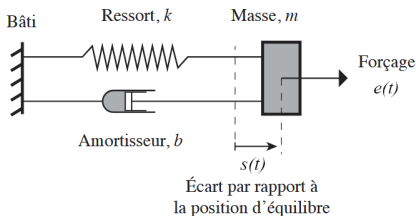


Introduction



- Système : masse
- Référentiel : référentiel terrestre
- Système de coordonnées :
cartésien, translation selon l'axe
(Ox) avec $s = x - \ell_0$ ou
 $x = s + \ell_0$
- Bilan des forces : poids
 $\vec{P} = m\vec{g}$; force de rappel du
ressort $\vec{F}_r = -ks$; force de
frottement fluide
 $\vec{F}_f = -\beta\dot{x} = -\beta\dot{s}$; excitation
 $e(t)$

Introduction



- Système : masse
- Référentiel : référentiel terrestre
- Système de coordonnées : cartésien, translation selon l'axe (Ox) avec $s = x - \ell_0$ ou $x = s + \ell_0$
- Bilan des forces : poids $\vec{P} = m\vec{g}$; force de rappel du ressort $\vec{F}_r = -ks$; force de frottement fluide $\vec{F}_f = -\beta\dot{x} = -\beta\dot{s}$; excitation $e(t)$
- PFD :

$$m\ddot{s} = -ks - \beta\dot{s} + e(t)$$

$$ks + \beta\dot{s} + m\ddot{s} = e(t).$$

Introduction

On vient d'établir l'équation différentielle d'un système soumis à une **excitation ou forçage ou grandeur d'entrée** $e(t)$ et donnant une **réponse ou grandeur de sortie** $s(t)$.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Système linéaire continu et invariant temporellement
 - Vocabulaire
 - Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle
 - Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert
- 3 Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2
 - Définition
 - Système du premier ordre
 - Système du premier ordre
 - Système du deuxième ordre
 - Système du premier ordre
- 4 Signal périodique non sinusoïdal
 - Décomposition en série de Fourier
 - Effet de filtrages sur un signal périodique
 - Détermination d'un signal de sortie

Système linéaire continu et invariant temporellement

Vocabulaire

- Si le forçage $e(t)$ est constamment nul alors aucune énergie n'est fournie au système : on parle de **régime libre**
- Si le forçage $e(t)$ n'est pas constamment nul alors de l'énergie est fournie au système : on parle de **régime forcé**.

Système linéaire continu et invariant temporellement

Vocabulaire

- Si le forçage $e(t)$ est constamment nul alors aucune énergie n'est fournie au système : on parle de **régime libre**
- Si le forçage $e(t)$ n'est pas constamment nul alors de l'énergie est fournie au système : on parle de **régime forcé**.
- Si la réponse $s(t)$ est du même type que l'entrée $e(t)$ (constante, sinusoïdale, périodique quelconque) on parle de **régime permanent ou établi**.
- Si le forçage change alors un **régime transitoire** apparaît avant un nouveau régime permanent.

Système linéaire continu et invariant temporellement

Vocabulaire

On limitera notre étude à un certains types de systèmes : **les systèmes linéaires, continus et invariants temporellement (LCI)**.

Système linéaire continu et invariant temporellement

Vocabulaire

On limitera notre étude à un certains types de systèmes : **les systèmes linéaires, continus et invariants temporellement (LCI)**.

- **Linéaire** : si une entrée $e_1(t)$ donne une réponse $s_1(t)$, et une entrée $e_2(t)$ donne une réponse $s_2(t)$, alors une entrée $k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t)$, avec k_1 et k_2 constantes, donnera une sortie $k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)$.

Système linéaire continu et invariant temporellement

Vocabulaire

On limitera notre étude à un certains types de systèmes : **les systèmes linéaires, continus et invariants temporellement (LCI)**.

- **Linéaire** : si une entrée $e_1(t)$ donne une réponse $s_1(t)$, et une entrée $e_2(t)$ donne une réponse $s_2(t)$, alors une entrée $k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t)$, avec k_1 et k_2 constantes, donnera une sortie $k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)$.
- **Continu** : les grandeurs étudiées sont définies en chaque instant (on parle de grandeurs analogiques par opposition aux grandeurs numériques qui ne prennent des valeurs discrètes).

Système linéaire continu et invariant temporellement

Vocabulaire

On limitera notre étude à un certains types de systèmes : **les systèmes linéaires, continus et invariants temporellement (LCI)**.

- **Linéaire** : si une entrée $e_1(t)$ donne une réponse $s_1(t)$, et une entrée $e_2(t)$ donne une réponse $s_2(t)$, alors une entrée $k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t)$, avec k_1 et k_2 constantes, donnera une sortie $k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)$.
- **Continu** : les grandeurs étudiées sont définies en chaque instant (on parle de grandeurs analogiques par opposition aux grandeurs numériques qui ne prennent des valeurs discrètes).
- **Invariant** : son comportement dans le temps reste inchangé ; si l'on reproduit une même entrée $e(t)$ à deux instants différents, mêmes éloignés, les réponses $s(t)$ seront identiques (décalées de ce même temps).

Système linéaire continu et invariant temporellement

Vocabulaire

On limitera notre étude à un certains types de systèmes : **les systèmes linéaires, continus et invariants temporellement (LCI)**.

Propriété : En régime permanent, si on impose une entrée sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t + \varphi)$, alors la réponse sera également sinusoïdal et de même pulsation (et donc fréquence) : $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi')$.

Trouver la réponse $s(t)$ d'un LCI revient à rechercher **le rapport des amplitudes S/E et la différence de phase à l'origine, ou le déphasage $\varphi' - \varphi$** .

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle

On considérera qu'un **système qui vérifie une équation différentielle linéaire coefficients constants est un système LCI.**

Exemple : l'équation différentielle de l'amortisseur de moto

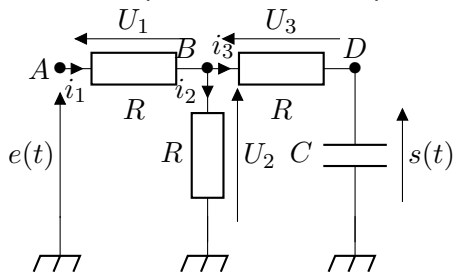
$$ks + \beta\dot{s} + m\ddot{s} = e(t)$$

k , β et m sont des coefficients constants.

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle

Autre exemple : circuit électrique

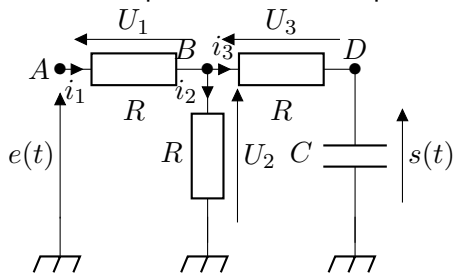


Système linéaire continu et invariant temporellement

Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle

- Loi des mailles : $i_1 = i_2 + i_3$

Autre exemple : circuit électrique

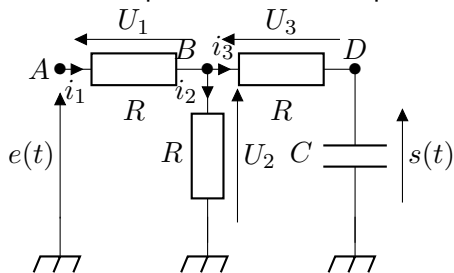


Système linéaire continu et invariant temporellement

Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle

- Loi des mailles : $i_1 = i_2 + i_3$
- Loi d'Ohm : $\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + i_3$

Autre exemple : circuit électrique



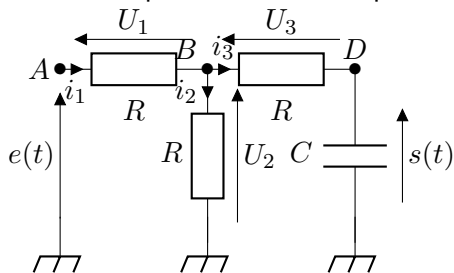
Système linéaire continu et invariant temporellement

Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle

- Loi des mailles : $i_1 = i_2 + i_3$
- Loi d'Ohm : $\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + i_3$
- Loi du condensateur :

$$\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + C \frac{ds}{dt}$$

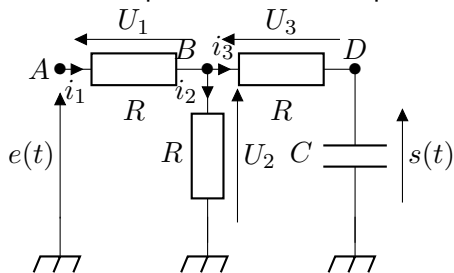
Autre exemple : circuit électrique



Système linéaire continu et invariant temporellement

Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle

Autre exemple : circuit électrique

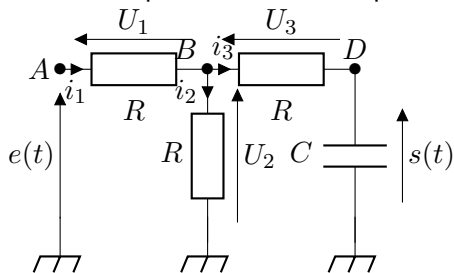


- Loi des mailles : $i_1 = i_2 + i_3$
- Loi d'Ohm : $\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + i_3$
- Loi du condensateur :
$$\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + C \frac{ds}{dt}$$
- Expressions des tensions sous forme de différences de potentiels
$$\frac{V_A - V_B}{R} = \frac{V_B - V_M}{R} + C \frac{ds}{dt}$$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle

Autre exemple : circuit électrique

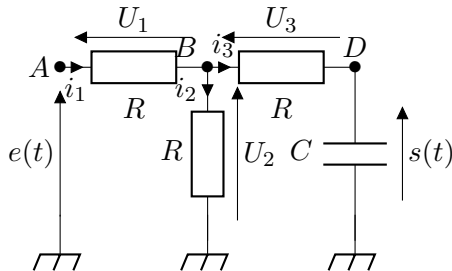


- Loi des mailles : $i_1 = i_2 + i_3$
- Loi d'Ohm : $\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + i_3$
- Loi du condensateur :
$$\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + C \frac{ds}{dt}$$
- Expressions des tensions sous forme de différences de potentiels
$$\frac{V_A - V_B}{R} = \frac{V_B - V_M}{R} + C \frac{ds}{dt}$$
- Expressions de $e(t)$ et de $s(t)$ en fonction des potentiels
$$e(t) = V_A - V_M \text{ et } s(t) = V_D - V_M$$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle

Autre exemple : circuit électrique

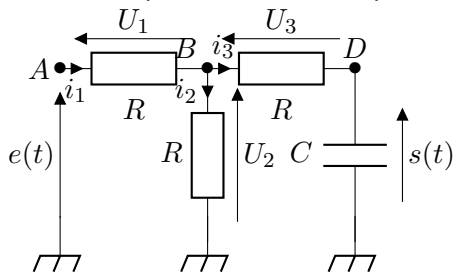


- Loi des mailles : $i_1 = i_2 + i_3$
- Loi d'Ohm : $\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + i_3$
- Loi du condensateur :
$$\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + C \frac{ds}{dt}$$
- Expressions des tensions sous forme de différences de potentiels
$$\frac{V_A - V_B}{R} = \frac{V_B - V_M}{R} + C \frac{ds}{dt}$$
- Expressions de $e(t)$ et de $s(t)$ en fonction des potentiels
 $e(t) = V_A - V_M$ et
 $s(t) = V_D - V_M$
- On simplifie $V_M = 0$: $e(t) = V_A$ et
 $s(t) = V_D$ ainsi
$$\frac{e(t) - V_B}{R} = \frac{V_B}{R} + C \frac{ds}{dt}$$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle

Autre exemple : circuit électrique

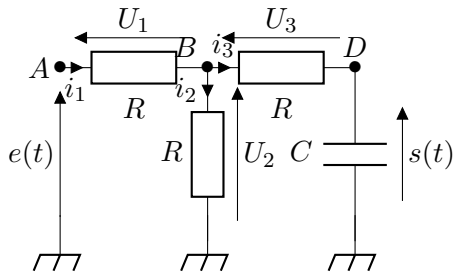


- V_B est inconnu. Loi des mailles
 $U_2 = U_3 + s(t)$
 $V_B - V_M = Ri_3 + s(t)$
 $V_B = Ri_3 + s(t)$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle

Autre exemple : circuit électrique



- V_B est inconnu. Loi des mailles
 $U_2 = U_3 + s(t)$
 $V_B - V_M = Ri_3 + s(t)$
 $V_B = Ri_3 + s(t)$
- On utilise l'expression précédente
 $\frac{e(t)}{R} - i_3 - \frac{s(t)}{R} = i_3 + \frac{s(t)}{R} + C \frac{ds}{dt}$
 $2s(t) + 2Ri_3 + RC \frac{ds}{dt} = e(t)$
 $2s(t) + 2RC \frac{ds}{dt} + RC \frac{ds}{dt} = e(t)$
 $2s(t) + 3RC \frac{ds}{dt} = 1 \times e(t)$

Les coefficients 2 et $3RC$ et 1 sont constants, **il s'agit d'un système LCI.**

L'ordre du filtre est donné par l'ordre n de la dérivée temporelle de la réponse $s(t)$ le plus haut, ici $n = 1$. L'ordre m le plus haut des dérivées temporelles du forçage $e(t)$ est inférieur ou égal à n , ici $m = 0$.

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

- Signal harmonique :
- Représentation complexe d'un signal harmonique :
- Fonction de transfert :

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

- Signal harmonique : signal sinusoïdal ou signal monochromatique

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi) = U \cos(2\pi f t + \varphi) = U \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right)$$

avec U l'amplitude, ω la pulsation, f la fréquence, T la période et φ la phase à l'origine.

- Représentation complexe d'un signal harmonique :

- Fonction de transfert :

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

- Signal harmonique : signal sinusoïdal ou signal monochromatique

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi) = U \cos(2\pi f t + \varphi) = U \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right)$$

avec U l'amplitude, ω la pulsation, f la fréquence, T la période et φ la phase à l'origine.

- Représentation complexe d'un signal harmonique :

$$\underline{u}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi)} = U e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t}$$

avec $\underline{U} = U e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe.

- Fonction de transfert :

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

- Signal harmonique : signal sinusoïdal ou signal monochromatique

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi) = U \cos(2\pi f t + \varphi) = U \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right)$$

avec U l'amplitude, ω la pulsation, f la fréquence, T la période et φ la phase à l'origine.

- Représentation complexe d'un signal harmonique :

$$\underline{u}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi)} = U e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t}$$

avec $\underline{U} = U e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe.

- Fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}.$$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

- Signal harmonique : signal sinusoïdal ou signal monochromatique

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi) = U \cos(2\pi f t + \varphi) = U \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right)$$

avec U l'amplitude, ω la pulsation, f la fréquence, T la période et φ la phase à l'origine.

- Représentation complexe d'un signal harmonique :

$$\underline{u}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi)} = U e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t}$$

avec $\underline{U} = U e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe.

- Fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}.$$

Si la fonction de transfert d'un système est le quotient de deux polynômes en $j\omega$ alors c'est un système LCI.

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Exemple : l'équation différentielle de l'amortisseur de moto

$$ks + \beta \dot{s} + m\ddot{s} = e(t)$$

On obtient la fonction de transfert en utilisant la notation complexe en considérant que $s(t)$ et $e(t)$ sont des signaux harmoniques de même pulsation (régime permanent)

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Exemple : l'équation différentielle de l'amortisseur de moto

$$ks + \beta \dot{s} + m\ddot{s} = e(t)$$

On obtient la fonction de transfert en utilisant la notation complexe en considérant que $s(t)$ et $e(t)$ sont des signaux harmoniques de même pulsation (régime permanent)

$$k\underline{s}(t) + \beta j\omega \underline{s}(t) + m(j\omega)^2 \underline{s}(t) = \underline{e}(t)$$

$$\underline{s}(t) (k + j\omega\beta - m\omega^2) = \underline{e}(t)$$

$$\underline{s}(t) = \underline{e}(t) \frac{1}{k + j\omega\beta - m\omega^2}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{k + j\omega\beta - m\omega^2}.$$

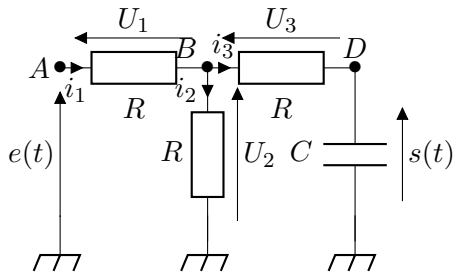
La fonction de transfert est un quotient de deux polynômes : **il s'agit d'un système LCI.**

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

- Loi des mailles : $i_1 = i_2 + i_3$

Autre exemple : circuit électrique

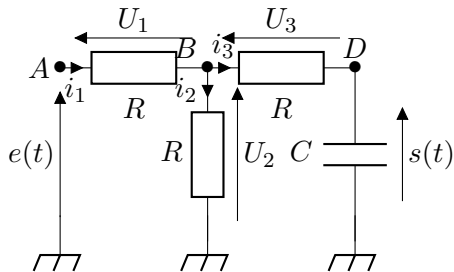


Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

- Loi des mailles : $i_1 = i_2 + i_3$
- Loi d'Ohm : $\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + \frac{U_3}{R}$

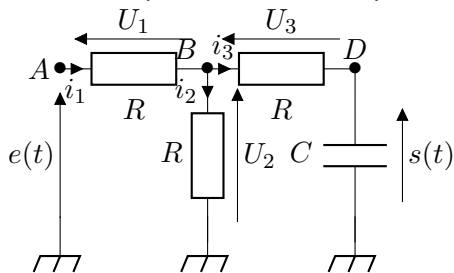
Autre exemple : circuit électrique



Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Autre exemple : circuit électrique

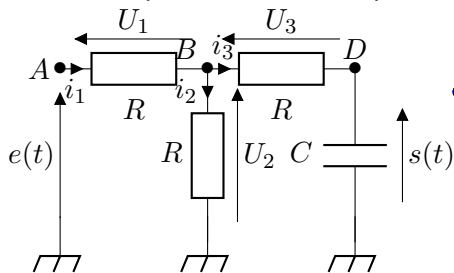


- Loi des mailles : $i_1 = i_2 + i_3$
- Loi d'Ohm : $\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + \frac{U_3}{R}$
- Expressions des tensions sous forme de différences de potentiels
 $V_A - V_B = V_B - V_M + V_B - V_D$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Autre exemple : circuit électrique

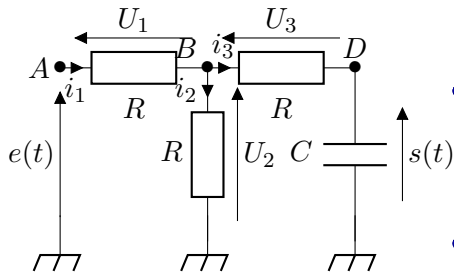


- Loi des mailles : $i_1 = i_2 + i_3$
- Loi d'Ohm : $\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + \frac{U_3}{R}$
- Expressions des tensions sous forme de différences de potentiels
 $V_A - V_B = V_B - V_M + V_B - V_D$
- Expressions de $e(t)$ et de $s(t)$ en fonction des potentiels
 $e(t) = V_A - V_M$ et
 $s(t) = V_D - V_M$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Autre exemple : circuit électrique

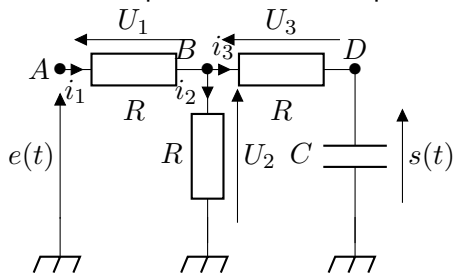


- Loi des mailles : $i_1 = i_2 + i_3$
- Loi d'Ohm : $\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R} + \frac{U_3}{R}$
- Expressions des tensions sous forme de différences de potentiels
 $V_A - V_B = V_B - V_M + V_B - V_D$
- Expressions de $e(t)$ et de $s(t)$ en fonction des potentiels
 $e(t) = V_A - V_M$ et
 $s(t) = V_D - V_M$
- On simplifie $V_M = 0$: $e(t) = V_A$ et
 $s(t) = V_D$ ainsi
 $e(t) - V_B = 2V_B - s(t)$
 $V_B = \frac{e(t) + s(t)}{3}$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Autre exemple : circuit électrique

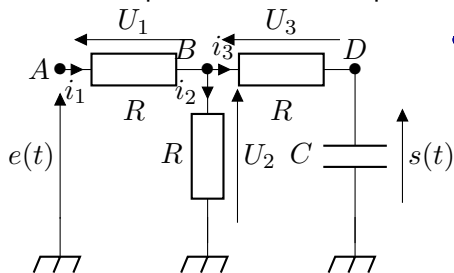


- V_B est inconnu. Or
 $U_2 = V_B - V_M = V_B$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Autre exemple : circuit électrique

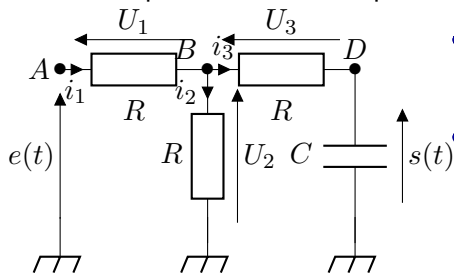


- V_B est inconnu. Or
 $U_2 = V_B - V_M = V_B$
- Pont diviseur de tension
$$s(t) = U_3 \frac{\frac{1}{j\omega RC}}{R + \frac{1}{j\omega RC}} = V_B \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Autre exemple : circuit électrique



- V_B est inconnu. Or
 $U_2 = V_B - V_M = V_B$
- Pont diviseur de tension
$$s(t) = U_3 \frac{\frac{1}{j\omega RC}}{R + \frac{1}{j\omega RC}} = V_B \frac{1}{1 + j\omega RC}$$
- On utilise l'expression de V_B
$$s(t) = \frac{e(t) + s(t)}{3} \frac{1}{1 + j\omega RC}$$
$$s(t) (3 + 3j\omega RC) = e(t) + s(t)$$
$$s(t) (2 + 3j\omega RC) = e(t)$$
$$s(t) = e(t) \frac{1}{2 + 3j\omega RC}$$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Rappels sur le diagramme de Bode en amplitude

On trace le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ en fonction de ω ou $\frac{\omega}{\omega_0}$ selon une échelle logarithmique

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Rappels sur le diagramme de Bode en amplitude

On trace le gain en décibel $G_{dB}(\omega)$ en fonction de ω ou $\frac{\omega}{\omega_0}$ selon une échelle logarithmique

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log (|\underline{H}(j\omega)|) .$$

On commence par tracer les asymptotes à basses et hautes fréquences.

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Filtre passe-bas ($x = \omega/\omega_0$)

- d'ordre 1 : $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{1+jx}$
- d'ordre 2 : $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$

On obtient l'asymptote à basses fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus petit degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

On obtient l'asymptote à hautes fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus haut degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Filtre passe-bas ($x = \omega/\omega_0$)

- d'ordre 1 : $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{1+jx}$
- d'ordre 2 : $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$

On obtient l'asymptote à basses fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus petit degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

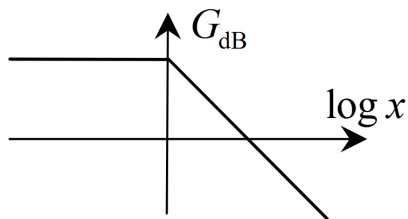
- d'ordre 1 : $\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{1} = H_0$ donc $G_{dB}(\omega) = 20 \log(H_0)$
- d'ordre 2 : $\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{1} = H_0$ donc $G_{dB}(\omega) = 20 \log(H_0)$

On obtient l'asymptote à hautes fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus haut degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

- d'ordre 1 : $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{jx}$ donc
 $G_{dB}(\omega) = 20 \log\left(H_0 \frac{1}{x}\right) = 20 \log(H_0) - 20 \log(x)$
- d'ordre 2 : $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1}{-x^2}$ donc
 $G_{dB}(\omega) = 20 \log\left(H_0 \frac{1}{x^2}\right) = 20 \log(H_0) - 40 \log(x)$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert



- Asymptotes filtre passe-bas d'ordre 1 : $20 \log(H_0)$ et -20 dB/décades .
- Asymptotes filtre passe-bas d'ordre 2 : $20 \log(H_0)$ et -40 dB/décades .

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Filtre passe-haut ($x = \omega/\omega_0$)

- d'ordre 1 : $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{jx}{1+jx}$
- d'ordre 2 : $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{-x^2}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$

On obtient l'asymptote à basses fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus petit degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

On obtient l'asymptote à hautes fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus haut degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Filtre passe-haut ($x = \omega/\omega_0$)

- d'ordre 1 : $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{jx}{1+jx}$
- d'ordre 2 : $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{-x^2}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$

On obtient l'asymptote à basses fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus petit degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

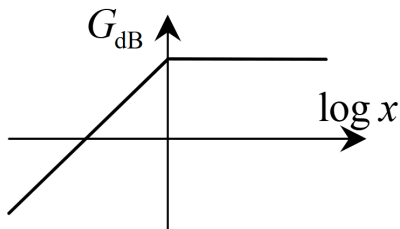
- d'ordre 1 : $\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{jx}{1}$ donc
 $G_{dB}(\omega) = 20 \log(H_0 x) = 20 \log(H_0) + 20 \log(x)$
- d'ordre 2 : $\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{-x^2}{1}$ donc
 $G_{dB}(\omega) = 20 \log(H_0 x^2) = 20 \log(H_0) + 40 \log(x)$

On obtient l'asymptote à hautes fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus haut degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

- d'ordre 1 : $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{jx}{jx} = H_0$ donc
 $G_{dB}(\omega) = 20 \log(H_0)$
- d'ordre 2 : $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{-x^2}{-x^2} = H_0$ donc
 $G_{dB}(\omega) = 20 \log(H_0)$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert



- Asymptotes filtre passe-bas d'ordre 1 : $+20 \text{ dB/décades}$ et $20 \log(H_0)$.
- Asymptotes filtre passe-bas d'ordre 2 : $+40 \text{ dB/décades}$ et $20 \log(H_0)$.

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Filtre passe-bande ($x = \omega/\omega_0$)

- d'ordre 1 : n'existe pas
- d'ordre 2 : $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j^{\frac{x}{Q}}}{1 + j^{\frac{x}{Q}} - x^2}$

On obtient l'asymptote à basses fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus petit degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

On obtient l'asymptote à hautes fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus haut degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

Filtre passe-bande ($x = \omega/\omega_0$)

- d'ordre 1 : n'existe pas
- d'ordre 2 : $\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j^{\frac{x}{Q}}}{1+j^{\frac{x}{Q}}-x^2}$

On obtient l'asymptote à basses fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus petit degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

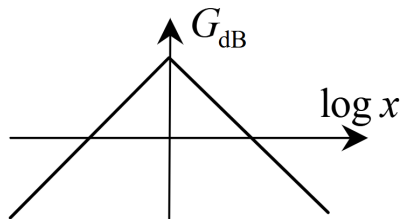
- $\lim_{\omega \rightarrow 0} \underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j^{\frac{x}{Q}}}{1}$ donc
 $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(H_0 \frac{x}{Q} \right) = 20 \log \left(\frac{H_0}{Q} \right) + 20 \log (x)$

On obtient l'asymptote à hautes fréquences en ne sélectionnant que le terme du plus haut degré en x des polynômes au numérateur et au dénominateur

- $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j^{\frac{x}{Q}}}{-x^2}$ donc
 $G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(H_0 \frac{1}{Qx} \right) = 20 \log \left(\frac{H_0}{Q} \right) - 20 \log (x)$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert



- Asymptotes filtre passe-bande :
+20 dB/décades et
-20 dB/décades.

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

On peut utiliser la notation de Laplace dans le domaine temporel et fréquentiel.

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

On peut utiliser la notation de Laplace dans le domaine temporel et fréquentiel.

- Dans le domaine temporel p correspond à l'opérateur $\frac{d}{dt}$:

$$ks(t) + \beta \dot{s}(t) + m\ddot{s}(t) = e(t) \iff ks(t) + \beta ps(t) + mp^2s(t) = e(t)$$
$$s(t) (k + \beta p + mp^2) = e(t).$$

Système linéaire continu et invariant temporellement

Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert

On peut utiliser la notation de Laplace dans le domaine temporel et fréquentiel.

- Dans le domaine temporel p correspond à l'opérateur $\frac{d}{dt}$:

$$ks(t) + \beta \dot{s}(t) + m\ddot{s}(t) = e(t) \iff ks(t) + \beta ps(t) + mp^2s(t) = e(t)$$
$$s(t) \left(k + \beta p + mp^2 \right) = e(t).$$

- Dans le domaine fréquentiel p correspond à $j\omega$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{k + j\omega\beta - m\omega^2} \iff \underline{H}(p) = \frac{1}{k + \beta p + mp^2}.$$

Plan

- 1 Introduction
- 2 Système linéaire continu et invariant temporellement
 - Vocabulaire
 - Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle
 - Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert
- 3 Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2
 - Définition
 - Système du premier ordre
 - Système du premier ordre
 - Système du deuxième ordre
 - Système du premier ordre
- 4 Signal périodique non sinusoïdal
 - Décomposition en série de Fourier
 - Effet de filtrages sur un signal périodique
 - Détermination d'un signal de sortie

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Définition

La solution d'une équation différentielle pour système LCI du premier ou du second ordre s'écrit

$$s(t) = s_p(t) + s_h(t)$$

avec

- $s_p(t)$
- $s_h(t)$

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Définition

La solution d'une équation différentielle pour système LCI du premier ou du second ordre s'écrit

$$s(t) = s_p(t) + s_h(t)$$

avec

- $s_p(t)$ **la solution particulière**, de la même forme que le forçage $e(t)$ et qui décrit physiquement **la réponse dans le régime permanent**
- $s_h(t)$

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Définition

La solution d'une équation différentielle pour système LCI du premier ou du second ordre s'écrit

$$s(t) = s_p(t) + s_h(t)$$

avec

- $s_p(t)$ **la solution particulière**, de la même forme que le forçage $e(t)$ et qui décrit physiquement **la réponse dans le régime permanent**
- $s_h(t)$ **la solution homogène**, dont la forme dépend de l'ordre du système et qui décrit physiquement **la réponse dans le régime transitoire**.

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Définition

On considérera qu'un système LCI est **stable si sa réponse à un forçage borné est aussi bornée** : $s(t)$ diverge si et seulement si $e(t)$ diverge.

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Définition

On considérera qu'un système LCI est **stable si sa réponse à un forçage borné est aussi bornée** : $s(t)$ diverge si et seulement si $e(t)$ diverge.

Comme la solution particulière $s_p(t)$ est de la même forme que le forçage $e(t)$, si $e(t)$ est borné, alors $s_p(t)$ l'est aussi. L'instabilité dépend donc de la solution homogène $s_h(t)$:

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Définition

On considérera qu'un système LCI est **stable si sa réponse à un forçage borné est aussi bornée** : $s(t)$ diverge si et seulement si $e(t)$ diverge.

Comme la solution particulière $s_p(t)$ est de la même forme que le forçage $e(t)$, si $e(t)$ est borné, alors $s_p(t)$ l'est aussi. L'instabilité dépend donc de la solution homogène $s_h(t)$:

- si $s_h(t)$ est bornée alors le système est **stable**, au bout d'un certains temps $s_h(t) \rightarrow 0$ donc $s(t) \rightarrow s_p(t)$: comme $s_p(t)$ est de la même forme que $e(t)$, si $e(t)$ est borné alors $s(t)$ aussi.

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Définition

On considérera qu'un système LCI est **stable** si sa réponse à un forçage borné est aussi bornée : $s(t)$ diverge si et seulement si $e(t)$ diverge.

Comme la solution particulière $s_p(t)$ est de la même forme que le forçage $e(t)$, si $e(t)$ est borné, alors $s_p(t)$ l'est aussi. L'instabilité dépend donc de la solution homogène $s_h(t)$:

- si $s_h(t)$ est bornée alors le système est **stable**, au bout d'un certains temps $s_h(t) \rightarrow 0$ donc $s(t) \rightarrow s_p(t)$: comme $s_p(t)$ est de la même forme que $e(t)$, si $e(t)$ est borné alors $s(t)$ aussi.
- si $s_h(t)$ diverge alors le système est **instable** : $s_h(t)$ ne tend plus vers 0 et diverge vers une limite de saturation, $s(t)$ ne varie plus en fonction de $e(t)$: le système n'est plus linéaire : une entrée $k_1 e_1(t) + k_2 e_2(t)$ ne donne plus une sortie $k_1 s_1(t) + k_2 s_2(t)$.

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

Exemple système du premier ordre : circuit RC série avec $s(t) = u_C(t)$.

Description temporelle : équation différentielle

Loi des mailles, de la loi d'Ohm et de la loi du condensateur

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

Exemple système du premier ordre : circuit RC série avec $s(t) = u_C(t)$.

Description temporelle : équation différentielle

Loi des mailles, de la loi d'Ohm et de la loi du condensateur

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t) = Ri(t) + u_C(t) = RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t)$$
$$s(t) + RC \frac{ds}{dt} = e(t).$$

On généralise le résultat à tout autres systèmes en introduisant les coefficients a_0 , a_1 et b_0

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt} = b_0 e(t).$$

On obtient la solution homogène à partir de

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

Exemple système du premier ordre : circuit RC série avec $s(t) = u_C(t)$.

Description temporelle : équation différentielle

Loi des mailles, de la loi d'Ohm et de la loi du condensateur

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t) = Ri(t) + u_C(t) = RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t)$$
$$s(t) + RC \frac{ds}{dt} = e(t).$$

On généralise le résultat à tout autres systèmes en introduisant les coefficients a_0 , a_1 et b_0

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt} = b_0 e(t).$$

On obtient la solution homogène à partir de l'équation homogène : équation sans second membre

$$a_0 s_h(t) + a_1 \frac{ds_h}{dt} = 0 \quad \text{soit} \quad s_h(t) = Ae^{-\frac{a_1}{a_0}t}.$$

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

On constate que la solution homogène $s_h(t) = Ae^{-\frac{a_1}{a_0}t}$ diverge si donc **si les coefficient a_1 et a_0 sont de signes opposés.**

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

On constate que la solution homogène $s_h(t) = Ae^{-\frac{a_1}{a_0}t}$ diverge si $-\frac{a_1}{a_0} > 0$ donc **si les coefficient a_1 et a_0 sont de signes opposés.**

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

On constate que la solution homogène $s_h(t) = Ae^{-\frac{a_1}{a_0}t}$ diverge si $-\frac{a_1}{a_0} > 0$ donc **si les coefficient a_1 et a_0 sont de signes opposés.**

Généralisation : un système LCI du premier ordre est **stable** si et seulement si **les coefficients de l'équation homogènes sont de même signes.**

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

On constate que la solution homogène $s_h(t) = Ae^{-\frac{a_1}{a_0}t}$ diverge si $-\frac{a_1}{a_0} > 0$ donc **si les coefficient a_1 et a_0 sont de signes opposés.**

Généralisation : un système LCI du premier ordre est **stable** si et seulement si **les coefficients de l'équation homogènes sont de même signes.**

Remarques : $\left| \frac{a_1}{a_0} \right|$ correspond à la **pulsation de coupure** ω_0 (ou ω_c du système) ; $\left| \frac{a_0}{a_1} \right|$ correspond au **temps caractéristique ou temps de réponse** du système τ .

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

Exemple système du premier ordre : circuit RC série avec $s(t) = u_C(t)$.

Description fréquentielle : fonction de transfert

Pont diviseur de tension en notation complexe

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

Exemple système du premier ordre : circuit RC série avec $s(t) = u_C(t)$.

Description fréquentielle : fonction de transfert

Pont diviseur de tension en notation complexe

$$\underline{s}(t) = \underline{e}(t) \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \underline{e}(t) \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \underline{e}(t) \frac{1}{1 + j\omega RC}$$
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

On généralise le résultat à tout autres systèmes en introduisant les coefficients a_0 , a_1 et b_0

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 + j\omega a_1}.$$

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

On remarque que **les coefficients du dénominateurs de la fonction de transfert correspondent à ceux de l'équation homogène**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 + j\omega a_1}.$$

On peut alors utiliser la conclusion précédente.

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

On remarque que **les coefficients du dénominateurs de la fonction de transfert correspondent à ceux de l'équation homogène**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 + j\omega a_1}.$$

On peut alors utiliser la conclusion précédente.

Généralisation : un système LCI du premier ordre est **stable** si et seulement si **les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert sont de même signe**.

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du deuxième ordre

Exemple système du deuxième ordre : amortisseur moto.

Description temporelle : équation différentielle

$$ks(t) + \beta \dot{s}(t) + m\ddot{s}(t) = e(t).$$

On généralise le résultat à tout autres systèmes en introduisant les coefficients a_0 , a_1 et b_0

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} = b_0 e(t)$$

$$a_0 s_h(t) + a_1 \frac{ds_h}{dt} + a_2 \frac{d^2 s_h}{dt^2} = 0.$$

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du deuxième ordre

Exemple système du deuxième ordre : amortisseur moto.

Description temporelle : équation différentielle

$$ks(t) + \beta\dot{s}(t) + m\ddot{s}(t) = e(t).$$

On généralise le résultat à tout autres systèmes en introduisant les coefficients a_0 , a_1 et b_0

$$a_0s(t) + a_1\frac{ds}{dt} + a_2\frac{d^2s}{dt^2} = b_0e(t)$$

$$a_0s_h(t) + a_1\frac{ds_h}{dt} + a_2\frac{d^2s_h}{dt^2} = 0.$$

À cette équation homogène est associé le **polynôme caractéristique**

$$P(r) = a_2r^2 + a_1r + a_0 \quad \text{de discriminant} \quad \Delta = a_1^2 - 4a_2a_0.$$

Si $\Delta > 0$ régime apériodique, $\Delta = 0$ régime critique, $\Delta < 0$ régime pseudo-périodique.

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du deuxième ordre

Quelque soit le signe de Δ il apparaît un terme exponentiel dans l'expression de $s_h(t)$ qui diverge si les coefficients de l'équation homogène sont de signes différents.

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du deuxième ordre

Quelque soit le signe de Δ il apparaît un terme exponentiel dans l'expression de $s_h(t)$ qui diverge si les coefficients de l'équation homogène sont de signes différents.

Généralisation : un système LCI du deuxième ordre est **stable** si et seulement si **les coefficients de l'équation homogène sont de même signe**.

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

Exemple système du deuxième ordre : amortisseur de moto.

Description fréquentielle : fonction de transfert

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

Exemple système du deuxième ordre : amortisseur de moto.

Description fréquentielle : fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{k + j\omega\beta - m\omega^2}.$$

On généralise le résultat à tout autres systèmes en introduisant les coefficients a_0 , a_1 , a_2 et b_0

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 + j\omega a_1 - a_2\omega^2}.$$

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

On remarque que **les coefficients du dénominateurs de la fonction de transfert correspondent à ceux de l'équation homogène**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 + j\omega a_1 - a_2\omega^2}.$$

On peut alors utiliser la conclusion précédente.

Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2

Système du premier ordre

On remarque que **les coefficients du dénominateurs de la fonction de transfert correspondent à ceux de l'équation homogène**

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{b_0}{a_0 + j\omega a_1 - a_2\omega^2}.$$

On peut alors utiliser la conclusion précédente.

Généralisation : un système LCI du deuxième ordre est **stable** si et seulement si **les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert sont de même signe**.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Système linéaire continu et invariant temporellement
 - Vocabulaire
 - Description temporelle d'un système LCI : équation différentielle
 - Description fréquentielle d'un système LCI : fonction de transfert
- 3 Stabilité des systèmes d'ordre 1 et 2
 - Définition
 - Système du premier ordre
 - Système du premier ordre
 - Système du deuxième ordre
 - Système du premier ordre
- 4 Signal périodique non sinusoïdal
 - Décomposition en série de Fourier
 - Effet de filtrages sur un signal périodique
 - Détermination d'un signal de sortie

Signal périodique non sinusoïdal

Décomposition en série de Fourier

Décomposition d'un signal périodique quelconque de pulsation ω en série de Fourier (somme de signaux sinusoïdaux) :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

- S_0 est
- ω est
- $\omega_n = n\omega$ sont

Signal périodique non sinusoïdal

Décomposition en série de Fourier

Décomposition d'un signal périodique quelconque de pulsation ω en série de Fourier (somme de signaux sinusoïdaux) :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

- S_0 est **la composante continue** correspondant à la valeur moyenne du signal.
- ω est
- $\omega_n = n\omega$ sont

Signal périodique non sinusoïdal

Décomposition en série de Fourier

Décomposition d'un signal périodique quelconque de pulsation ω en série de Fourier (somme de signaux sinusoïdaux) :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

- S_0 est **la composante continue** correspondant à la valeur moyenne du signal.
- ω est la pulsation la plus basse de la composante (ou signal sinusoïdal) nommée **le fondamental**.
- $\omega_n = n\omega$ sont

Signal périodique non sinusoïdal

Décomposition en série de Fourier

Décomposition d'un signal périodique quelconque de pulsation ω en série de Fourier (somme de signaux sinusoïdaux) :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

- S_0 est **la composante continue** correspondant à la valeur moyenne du signal.
- ω est la pulsation la plus basse de la composante (ou signal sinusoïdal) nommée **le fondamental**.
- $\omega_n = n\omega$ sont les pulsations des autres composantes nommées **les harmoniques de rang n** .

Signal périodique non sinusoïdal

Effet de filtrages sur un signal périodique

Voir le code python [filtrage](#).

Signal périodique non sinusoïdal

Détermination d'un signal de sortie

Chacune des composantes sinusoïdales de l'entrée est affectée par le filtre : les amplitudes par le gain linéaire $G(\omega)$ et les phases par le déphasage $\varphi(\omega)$.

$$\begin{array}{ccc} \overline{e(t)} & & \overline{s(t)} \\ E_0 & & \\ E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1}) & \text{filtre} & \\ E_2 \cos(2\omega t + \varphi_{0,2}) & \Rightarrow & \\ E_3 \cos(3\omega t + \varphi_{0,3}) & & \\ \dots & & \\ E_n \cos(n\omega t + \varphi_{0,n}) & & \end{array}$$

Signal périodique non sinusoïdal

Détermination d'un signal de sortie

Chacune des composantes sinusoïdales de l'entrée est affectée par le filtre : les amplitudes par le gain linéaire $G(\omega)$ et les phases par le déphasage $\varphi(\omega)$.

$$\begin{array}{ccc} \frac{e(t)}{E_0} & & \frac{s(t)}{G(0)E_0} \\ E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1}) & \text{filtre} & \\ E_2 \cos(2\omega t + \varphi_{0,2}) & \Rightarrow & \\ E_3 \cos(3\omega t + \varphi_{0,3}) & & \\ \dots & & \\ E_n \cos(n\omega t + \varphi_{0,n}) & & \end{array}$$

Signal périodique non sinusoïdal

Détermination d'un signal de sortie

Chacune des composantes sinusoïdales de l'entrée est affectée par le filtre : les amplitudes par le gain linéaire $G(\omega)$ et les phases par le déphasage $\varphi(\omega)$.

$$\begin{array}{ccc} \frac{e(t)}{E_0} & & \frac{s(t)}{G(0)E_0} \\ E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1}) & \text{filtre} & G(\omega)E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1} + \varphi(\omega)) \\ E_2 \cos(2\omega t + \varphi_{0,2}) & \Rightarrow & \\ E_3 \cos(3\omega t + \varphi_{0,3}) & & \\ \dots & & \\ E_n \cos(n\omega t + \varphi_{0,n}) & & \end{array}$$

Signal périodique non sinusoïdal

Détermination d'un signal de sortie

Chacune des composantes sinusoïdales de l'entrée est affectée par le filtre : les amplitudes par le gain linéaire $G(\omega)$ et les phases par le déphasage $\varphi(\omega)$.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \overline{e(t)} \\ E_0 \\ E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1}) \\ E_2 \cos(2\omega t + \varphi_{0,2}) \\ E_3 \cos(3\omega t + \varphi_{0,3}) \\ \dots \\ E_n \cos(n\omega t + \varphi_{0,n}) \end{array} & \begin{array}{c} \text{filtre} \\ \Rightarrow \end{array} & \begin{array}{c} \overline{s(t)} \\ G(0)E_0 \\ G(\omega)E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1} + \varphi(\omega)) \\ G(2\omega)E_2 \cos(2\omega t + \varphi_{0,2} + \varphi(2\omega)) \end{array} \end{array}$$

Signal périodique non sinusoïdal

Détermination d'un signal de sortie

Chacune des composantes sinusoïdales de l'entrée est affectée par le filtre : les amplitudes par le gain linéaire $G(\omega)$ et les phases par le déphasage $\varphi(\omega)$.

$\begin{array}{c} \hline e(t) \\ \hline E_0 \\ E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1}) \\ E_2 \cos(2\omega t + \varphi_{0,2}) \\ E_3 \cos(3\omega t + \varphi_{0,3}) \\ \dots \\ E_n \cos(n\omega t + \varphi_{0,n}) \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{filtre} \\ \Rightarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \hline s(t) \\ \hline G(0)E_0 \\ G(\omega)E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1} + \varphi(\omega)) \\ G(2\omega)E_2 \cos(2\omega t + \varphi_{0,2} + \varphi(2\omega)) \\ G(3\omega)E_3 \cos(3\omega t + \varphi_{0,3} + \varphi(3\omega)) \end{array}$
--	---	---

Signal périodique non sinusoïdal

Détermination d'un signal de sortie

Chacune des composantes sinusoïdales de l'entrée est affectée par le filtre : les amplitudes par le gain linéaire $G(\omega)$ et les phases par le déphasage $\varphi(\omega)$.

$\frac{e(t)}{E_0}$		$\frac{s(t)}{G(0)E_0}$
$E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1})$	filtre $\Rightarrow$	$G(\omega)E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1} + \varphi(\omega))$
$E_2 \cos(2\omega t + \varphi_{0,2})$		$G(2\omega)E_2 \cos(2\omega t + \varphi_{0,2} + \varphi(2\omega))$
$E_3 \cos(3\omega t + \varphi_{0,3})$		$G(3\omega)E_3 \cos(3\omega t + \varphi_{0,3} + \varphi(3\omega))$
...		...
$E_n \cos(n\omega t + \varphi_{0,n})$		

Signal périodique non sinusoïdal

Détermination d'un signal de sortie

Chacune des composantes sinusoïdales de l'entrée est affectée par le filtre : les amplitudes par le gain linéaire $G(\omega)$ et les phases par le déphasage $\varphi(\omega)$.

$\begin{array}{c} \hline e(t) \\ \hline E_0 \\ E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1}) \\ E_2 \cos(2\omega t + \varphi_{0,2}) \\ E_3 \cos(3\omega t + \varphi_{0,3}) \\ \dots \\ E_n \cos(n\omega t + \varphi_{0,n}) \end{array}$	$\begin{array}{c} \text{filtre} \\ \Rightarrow \end{array}$	$\begin{array}{c} \hline s(t) \\ \hline G(0)E_0 \\ G(\omega)E_1 \cos(\omega t + \varphi_{0,1} + \varphi(\omega)) \\ G(2\omega)E_2 \cos(2\omega t + \varphi_{0,2} + \varphi(2\omega)) \\ G(3\omega)E_3 \cos(3\omega t + \varphi_{0,3} + \varphi(3\omega)) \\ \dots \\ G(n\omega)E_n \cos(n\omega t + \varphi_{0,n} + \varphi(n\omega)) \end{array}$
--	---	--