

DS 4 : chimie, électrostatique et magnétostatique

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en 3 parties **indépendantes**.
 - Les calculatrices **sont interdites**.
 - Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
 - Indiquer clairement le numéro de la question (exemple question 5.1 de la partie B noter "B5.1", question 21 de la partie C noter "C21", etc.), aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.
-

Partie A

Partie IV - Traitement de l'eau

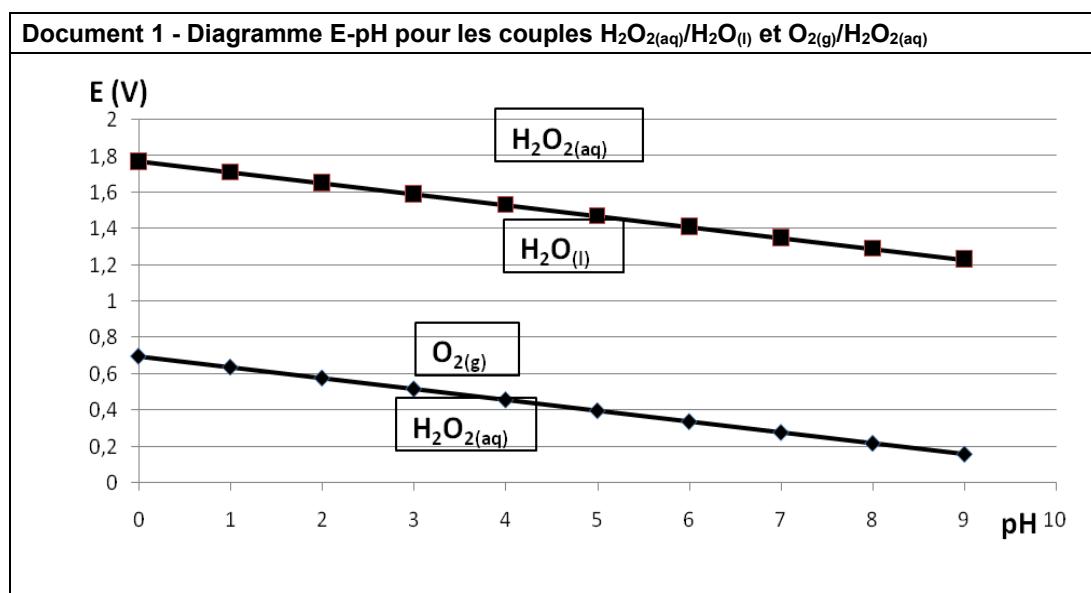
La qualité de l'eau des bassins doit sans cesse être surveillée pour éviter tout problème de prolifération d'algues ou tout dérèglement pouvant nuire à la santé des baigneurs. Différents traitements existent : on s'intéresse en particulier au traitement grâce à l'oxygène actif qui est assimilé à un ajout de solution d'eau oxygénée dont le principe actif est le peroxyde d'hydrogène H_2O_2 .

- Q50.** Donner le nombre d'électrons de valence des atomes d'oxygène (numéro atomique $Z = 8$) et d'hydrogène.
- Q51.** En déduire la formule de Lewis du peroxyde d'hydrogène H_2O_2 .
- Q52.** Indiquer, justification à l'appui, si la liaison O-O est polarisée.
- Q53.** Donner le degré d'oxydation de l'oxygène dans les trois composés suivants : O_2 , H_2O et H_2O_2 .

H_2O_2 intervient dans les deux couples oxydant/réducteur suivants : $\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$ et $\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}$.

- Q54.** Écrire les deux demi-équations électroniques associées à ces deux couples.

On donne dans le **document 1** le diagramme potentiel-pH :



- Q55.** En déduire que $\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}$ n'est pas thermodynamiquement stable en solution et écrire alors la réaction susceptible de se produire dans une solution contenant $\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}$.
- Q56.** Donner le nom de ce type de réaction.

La réaction précédente peut être fortement ralentie par l'ajout de stabilisant : on souhaite vérifier le titre d'une solution commerciale de traitement à l'oxygène actif achetée il y a quelques années. La définition du titre est donnée dans le **document 2**.

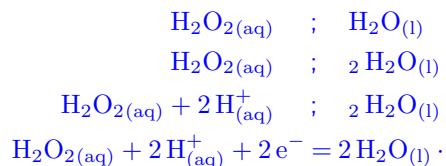
- Q50. Le nombre d'électrons de valence des atomes d'oxygène et d'hydrogène sont respectivement 6 et 1.
- Q51. Il y a au total $N_e = 2 \times 6 + 2 \times 1 = 14$ électrons de valence, soit 7 doublets à placer. On donne une structure symétrique à la molécule soit $\text{H}-\text{O}-\text{O}-\text{H}$. Il manque 4 doublets à placer. Les 4 doublets à placer sont les deux doublets non liants de chaque oxygène. Comme les oxygènes forment 2 liaisons, ils sont entourés de 8 électrons, ils respectent la règle de l'octet. Comme les hydrogènes forment 1 liaison, ils sont entourés de 2 électrons, ils respectent la règle du duet.
- Q52. La liaison n'est pas polarisé car les atomes sont identiques, ils ont donc la même électronégativité : les électrons ne sont pas plus attirés par l'un que par l'autre.
- Q53. — Dans O_2 , le degré d'oxydation est nul : $N.O.(\text{O}_2) = 0$.
— Dans H_2O , le degré d'oxydation de toute la molécule est nul et le degré d'oxydation de l'hydrogène est $N.O.(\text{H}) = -\text{I}$, donc

$$\begin{aligned} N.O.(\text{H}_2\text{O}) &= 2N.O.(\text{H}) + N.O.(\text{O}) \\ 0 &= 2 + N.O.(\text{O}) \\ N.O.(\text{O}) &= -\text{II}. \end{aligned}$$

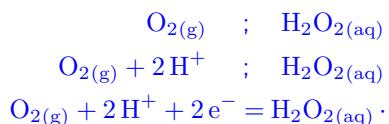
— Dans H_2O_2 , le degré d'oxydation de toute la molécule est nul et le degré d'oxydation de l'hydrogène est $N.O.(\text{H}) = -\text{I}$, donc

$$\begin{aligned} N.O.(\text{H}_2\text{O}_2) &= 2N.O.(\text{H}) + 2N.O.(\text{O}) \\ 0 &= 2 + 2N.O.(\text{O}) \\ N.O.(\text{O}) &= -\text{I}. \end{aligned}$$

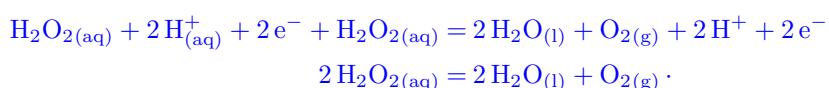
- Q54. La demi-équation associé au couple $\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$ est



La demi-équation associé au couple $\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}$ est



- Q55. On constate que le peroxyde d'hydrogène en solution $\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})}$ possède des domaines de prédominances disjoints : il n'est donc pas stable thermodynamiquement. Il y a donc réaction de . On associe les deux demi-équations d'oxydo-réduction pour obtenir son équation



- Q56. Il s'agit d'une réaction de dismutation.

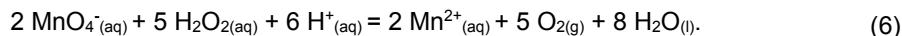
Document 2 - Titre en oxygène actif pour une solution de traitement d'eau de piscine

Le titre, exprimé en volumes (vol.), représente le volume de $O_{2(g)}$, exprimé en litres et mesuré dans les conditions normales de température et de pression, susceptible de se dégager lors de la décomposition du peroxyde d'hydrogène $H_2O_{2(aq)}$ présent dans 1,0 L de solution.

Le volume molaire des gaz dans ces conditions est $V_m = 22,4 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Il est possible d'effectuer un titrage colorimétrique de $H_2O_{2(aq)}$ par une solution aqueuse de permanganate de potassium ($K^+_{(aq)}$, $MnO_4^-_{(aq)}$) à $c_2 = 0,020 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

L'équation de réaction entre les ions permanganate et le peroxyde d'hydrogène est :

**Données**

Potentiels standards à 298 K :

$$E^\circ_1 = E^\circ(\text{MnO}_4^-_{(aq)}/\text{Mn}^{2+}_{(aq)}) = 1,51 \text{ V} \text{ et } E^\circ_2 = E^\circ(\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{2(aq)}) = 0,69 \text{ V}.$$

$$\text{On donne aussi, à T = 298 K, la relation } \frac{R \cdot T}{F} \ln(a) = 0,06 \log(a).$$

- Q57.** Relier l'enthalpie libre standard de réaction de la réaction de titrage (6) avec les potentiels standards des couples.
- Q58.** En déduire un ordre de grandeur de la constante d'équilibre de la réaction de titrage (6). Conclure.
- Q59.** Décrire la préparation, par dilution d'un facteur 10, de 100,0 mL de solution (S) de $H_2O_{2(aq)}$ à partir de la solution commerciale de traitement à l'oxygène actif.

L'équivalence, pour un titrage de 10,0 mL de (S), a lieu pour un volume équivalent $v_{eq} = 16,0 \text{ mL}$.

- Q60.** Effectuer un schéma légendé du dispositif de titrage.
- Q61.** En déduire la concentration c_1 en $H_2O_{2(aq)}$ dans (S), puis sa concentration c dans la solution commerciale.
- Q62.** Déterminer alors le titre en $H_2O_{2(aq)}$ de la solution commerciale.

Un traitement de l'eau des piscines grâce aux ions hypochlorite $\text{ClO}^-_{(aq)}$ est aussi envisageable. Comme avec le traitement à l'oxygène actif, le principe actif n'est pas rémanent car $\text{ClO}^-_{(aq)}$ peut se décomposer d'après la réaction d'équation :

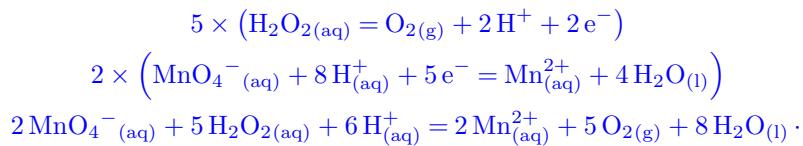


Il faut sans cesse surveiller le taux de $\text{ClO}^-_{(aq)}$ et l'ajuster si nécessaire en utilisant, par exemple, des solutions d'eau de Javel.

La décomposition de l'ion hypochlorite est lente, de sorte que la concentration de l'ion hypochlorite dans les solutions commerciales d'eau de Javel diminue lentement au cours du temps.

La courbe de la **figure 6** représente l'évolution de la concentration en ion hypochlorite $[\text{ClO}^-]$ pour une solution de concentration initiale $[\text{ClO}^-]_0 = 2,0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ maintenue à la température $\theta_1 = 30^\circ \text{C}$. L'unité utilisée pour l'axe des abscisses est la semaine.

Q57. La réaction présentée correspond à l'association de deux demi-équations



La loi de Nernst s'écrit pour chacune des couples

$$E \left(\text{MnO}_4^-_{(\text{aq})}/\text{Mn}^{2+}_{(\text{aq})} \right) = E_1 = E_1^\circ + \frac{RT}{5F} \ln \left(\frac{[\text{MnO}_4^-][\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}] (c^\circ)^8} \right)$$

$$E \left(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{2(\text{aq})} \right) = E_2 = E_2^\circ + \frac{RT}{2F} \ln \left(\frac{P_{\text{O}_2}[\text{H}^+]^2}{[\text{H}_2\text{O}_2] P^\circ c^\circ} \right)$$

À l'équilibre $E_1 = E_2$, donc

$$\begin{aligned} E_1^\circ + \frac{RT}{5F} \ln \left(\frac{[\text{MnO}_4^-][\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}] (c^\circ)^8} \right) &= E_2^\circ + \frac{RT}{2F} \ln \left(\frac{P_{\text{O}_2}[\text{H}^+]^2}{[\text{H}_2\text{O}_2] P^\circ c^\circ} \right) \\ E_1^\circ - E_2^\circ &= \frac{RT}{10F} \left(\frac{[\text{Mn}^{2+}] (c^\circ)^8 P_{\text{O}_2}}{[\text{MnO}_4^-][\text{H}^+]^6 [\text{H}_2\text{O}_2] P^\circ c^\circ} \right) \\ E_1^\circ - E_2^\circ &= \frac{RT}{10F} \ln (K^\circ). \end{aligned}$$

L'enthalpie libre standard de la réaction est donc

$$\Delta_r G^\circ = -RT \ln K^\circ = 10F (E_2^\circ - E_1^\circ).$$

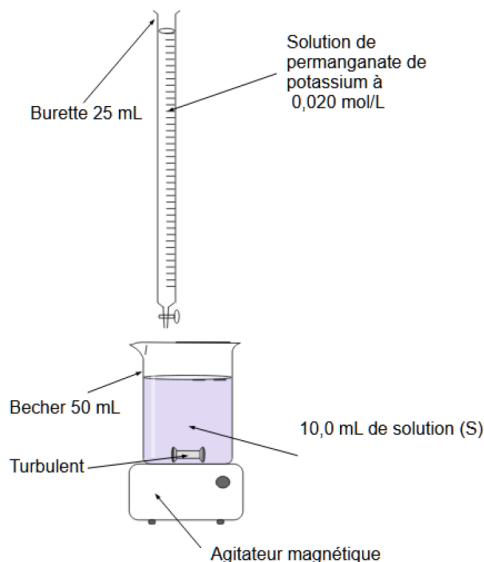
Q58. Il vient que

$$\begin{aligned} E_1^\circ - E_2^\circ &= \frac{RT}{10F} \ln (K^\circ) \\ E_1^\circ - E_2^\circ &\approx \frac{0,06}{10} \log (K^\circ) \\ K^\circ &\approx 10^{10 \frac{E_1^\circ - E_2^\circ}{0,06}} \\ \text{A.N. } K^\circ &\approx 10^{10 \times \frac{0,82}{0,06}} \approx 10^{10 \times \frac{82}{6}} \approx 10^{130} \gg 1. \end{aligned}$$

On en conclut que la réaction est totale.

Q59. Dans une fiole jaugée de 100 mL à moitié remplie d'eau distillée, on verse 10,0 mL de la solution commerciale prélevés à l'aide d'une pipette jaugée. On complète alors jusqu'au trait de jauge et on homogénéise la solution.

Q60. Un schéma est donné ci-après.



Q61. À partir de l'équation de la réaction donnée Q57, on sait qu'à l'équivalence les réactifs sont présents en quantité stoechiométrique, ainsi

$$\frac{n(\text{MnO}_4^-)}{2} = \frac{n(\text{H}_2\text{O}_2)}{5}$$

$$n(\text{H}_2\text{O}_2) = \frac{5}{2}n(\text{MnO}_4^-) = \frac{5}{2}c_2V_{eq}.$$

Dans la solution (S) la concentration est donc

$$c_1 = \frac{n(\text{MnO}_4^-)}{V} = \frac{5}{2}c_2 \frac{V_{eq}}{V}$$

$$\text{A.N. } c_1 = 2,5 \times 2 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times \frac{16 \text{ mL}}{10 \text{ mL}} = 8 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Dans la solution commerciale, 10 fois plus concentrée, la concentration est donc

$$c = 10c_1$$

$$\text{A.N. } c = 8 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Q62. D'après l'équation de dismutation de H_2O_2 de la question 55, pour deux moles de H_2O_2 réagissant, une mole de O_2 est produite. Ainsi la quantité de matière de O_2 pouvant être dégagé par la solution commerciale est

$$n_{\text{O}_2} = \frac{1}{2}n_{\text{H}_2\text{O}_2} = \frac{1}{2}cV_{com}.$$

Le volume de O_2 dégagé correspond aux nombre de moles fois le volume molaire, soit le volume occupé par une mole de gaz dans les conditions fixées, soit

$$V = n_{\text{O}_2}V_m = \frac{1}{2}cV_{com}V_m.$$

$$\text{A.N. } V = \frac{1}{2} \times 8 \times 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 1,0 \text{ L} \times 22,4 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \approx 9 \text{ L}.$$

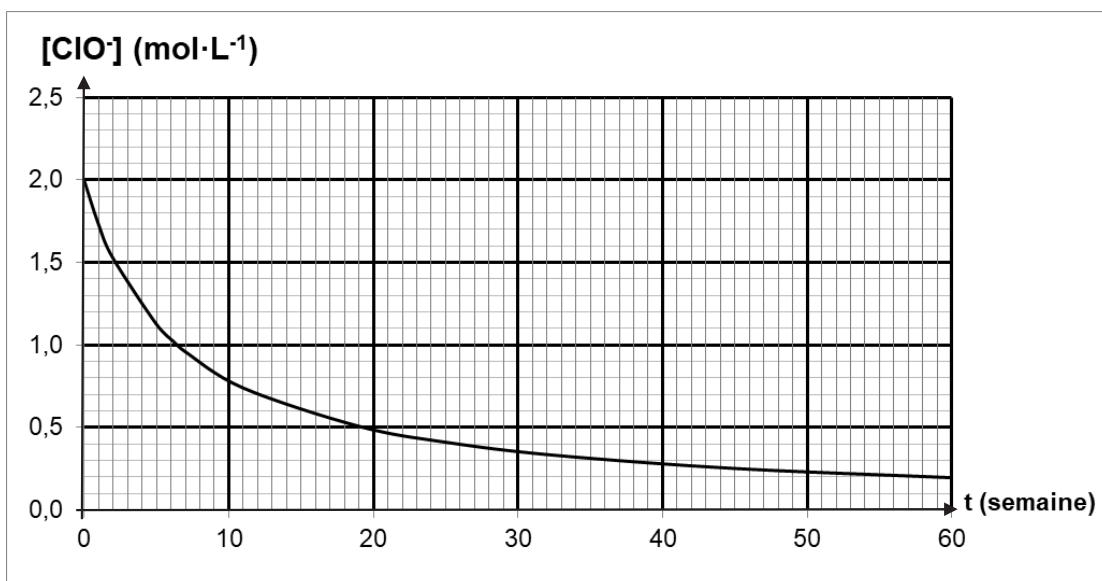


Figure 6 - Évolution de la concentration en ions hypochlorite $\text{ClO}^{-\text{(aq)}}$ au cours du temps

- Q63.** Donner l'expression de la vitesse volumique v de disparition de l'ion hypochlorite.
- Q64.** En expliquant votre démarche, calculer à l'aide du graphique (en moles par litre par semaine) la valeur de cette vitesse juste après la date $t = 0$ semaine.
- Q65.** Préciser, toujours à l'aide du graphique, comment évolue la valeur de la vitesse v au cours du temps. Expliquer qualitativement l'origine de cette évolution.

Le **tableau 1** donne les valeurs de la vitesse v à différentes dates :

t (semaine)	6,5	19,5
$[\text{ClO}^-]$ (mol·L ⁻¹)	1	0,5
v (mol·L ⁻¹ ·semaine ⁻¹)	0,076	0,019

Tableau 1 - Données expérimentales de vitesses de disparition de l'ion $\text{ClO}^{-\text{(aq)}}$

- Q66.** Préciser la relation entre la vitesse v et la concentration en ion hypochlorite dans le cas d'une réaction d'ordre 2.
- Q67.** Montrer que les valeurs données dans le **tableau 1** sont en accord avec l'hypothèse d'une réaction de décomposition de l'ion hypochlorite d'ordre 2.
- Q68.** Formuler un conseil à donner aux utilisateurs quant aux conditions de stockage des solutions de traitement de l'eau, telles que celles à l'oxygène actif ou aux ions hypochlorite, afin d'allonger leur durée de conservation.

Q63. La vitesse volumique de disparition est

$$v = -\frac{d[\text{ClO}^-]}{dt}.$$

Q64. À partir de la valeur absolue de la pente à l'origine, que l'on obtient graphiquement en traçant un trait, on obtient une valeur de

$$v = -\frac{d[\text{ClO}^-]}{dt} \approx \frac{2,0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}}{8 \text{ semaine}} = 0,25 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{semaine}^{-1}.$$

Q65. Graphiquement, on constate que la vitesse de disparition de l'ion hypochlorite diminue au cours du temps. Cette évolution est due à l'existence d'un ordre : la vitesse de disparition est alors liée à la concentration en ion hypochlorite qui diminue au cours du temps.

Q66. La relation est

$$v = k[\text{ClO}^-]^2.$$

Q67. Comparons les valeurs de vitesses données et les valeurs obtenues avec la relation précédente

$$\begin{aligned} v(t = 6,5 \text{ semaine}) &= 0,076 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{semaine}^{-1} ; \quad v(t = 6,5 \text{ semaine}) = k(1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1})^2 = k \times 1 \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2} \\ v(t = 19,5 \text{ semaine}) &= 0,019 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{semaine}^{-1} ; \quad v(t = 19,5 \text{ semaine}) = k(0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1})^2 = k \times 0,25 \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}. \end{aligned}$$

On peut isoler la constante de vitesse k dans les deux cas et la comparer afin de vérifier la relation fournie

$$\begin{aligned} k &= \frac{0,076 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{semaine}^{-1}}{1 \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}} \approx 8 \times 10^{-2} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{semaine}^{-1} \\ k &= \frac{0,019 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{semaine}^{-1}}{0,25 \text{ mol}^2 \cdot \text{L}^{-2}} \approx 2 \times 10^{-2} \times 4 \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{semaine}^{-1} = 8 \times 10^{-2} \text{ mol}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{semaine}^{-1}. \end{aligned}$$

La relation est vérifiée.

Q68. On sait que les constantes de vitesses satisfont la loi d'Arrhénius et sont donc très dépendantes de la température. Afin de ralentir ces réactions de décomposition et donc d'augmenter la durée de conservation de ces solutions de traitement de l'eau, on peut donc conseiller de les conserver au réfrigérateur ou à défaut, dans un endroit frais.

Partie B

Troisième problème : A propos du théorème de Gauss

Dans tout le problème, ϵ_0 représente la permittivité diélectrique de l'air, égale à celle du vide.

Première partie : Le théorème de Gauss

1 – Enoncer le théorème de Gauss relatif au flux sortant du champ électrostatique \vec{E} à travers une surface fermée S contenant la charge électrique Q_{int} .

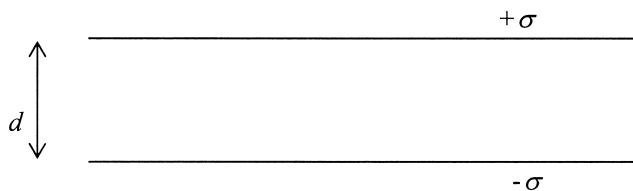
Deuxième partie : Condensateur plan

2 – On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ positive.

En considérant les propriétés de symétrie de la distribution de charges, montrer que le champ électrostatique \vec{E} créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ est orthogonal au plan.

Démontrer que \vec{E} est tel que sa norme E vaut $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Représenter sur un schéma le vecteur \vec{E} de part et d'autre du plan. On indiquera avec précision la surface de Gauss choisie.

3 – Soit un condensateur plan constitué par deux plans infinis, parallèles, uniformément chargés et séparés par une distance d . Le plan supérieur étant chargé avec une densité surfacique σ positive et le plan inférieur étant chargé avec une densité $-\sigma$.



3.1 – En utilisant le théorème de superposition, déduire de la question précédente le champ électrostatique en tout point de l'espace.

3.2 – Déterminer la différence de potentiel U entre les deux plans du condensateur. On exprimera U en fonction de ϵ_0 , σ et d . Identifier clairement, en le justifiant, le plan dont le potentiel est le plus élevé.

3.3 – Définir et déterminer la capacité C du condensateur par unité de surface. On exprimera C en fonction de ϵ_0 et d .

1. Le théorème de Gauss est

$$\iint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

2. Au niveau d'un point M hors de la distribution de charges que l'on considère orientée selon les axes (Ox et (Oy), on trouve deux plans de symétrie de la distribution tels que $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le champ électrique étant contenu dans ces plans il est tel que

$$\vec{E}(M) = E(x, y, z)\vec{e}_z.$$

Il est donc orthogonal au plan.

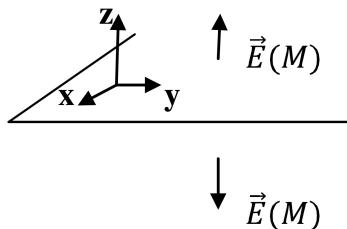
Il y a invariances par translation selon x et y donc le champ est tel que

$$\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z.$$

On considère une surface de Gauss cylindrique de base S_1 coupant le plan infini. Au niveau du point M situé en z au dessus du plan, le champ est tel que $\vec{E}(M) = E(z)\vec{e}_z$. Comme le champ est symétrique par rapport à la distribution de charge, au niveau d'un point N situé en $-z$ en dessous du plan, le champ est tel que $\vec{E}(N) = -E(z)\vec{e}_z = -\vec{E}(M)$.

Le théorème de Gauss donne

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \\ \iint_{\Sigma_1} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_{lat}} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S} + \iint_{\Sigma_2} \vec{E}(N) \cdot d\vec{S} &= \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0} \\ \iint_{\Sigma_1} E(z)\vec{e}_z \cdot dS\vec{e}_z + \iint_{\Sigma_{lat}} E(z)\vec{e}_z \cdot dS\vec{e}_r \iint_{\Sigma_2} -E(z)\vec{e}_z \cdot (-dS\vec{e}_z) &= \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0} \\ 2E(z)S_1 &= \frac{\sigma S_1}{\varepsilon_0} \\ E(z) &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad ; \quad \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z. \end{aligned}$$



3.1. D'après le théorème de superposition, le champ total correspond à la somme des champs produits par les deux distributions de charges. D'après l'étude précédente, le champ produit par la distribution de charge $+\sigma$ située en $z = d$ est orienté vers le haut au dessus de la distribution $+\sigma$ et orienté vers le bas en dessous tel que

$$\text{pour } z > d \quad \vec{E}_+(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

$$\text{pour } z < d \quad \vec{E}_+(M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z.$$

On peut utiliser les conclusions précédentes pour un distribution de charges négative $-\sigma$ situé en $z = 0$: le champ produit par la distribution de charge $-\sigma$ est orienté vers le bas au dessus de la distribution $-\sigma$ et orienté vers le haut en dessous tel que

$$\text{pour } z > 0 \quad \vec{E}_-(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z$$

$$\text{pour } z < 0 \quad \vec{E}_-(M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z.$$

En faisant la somme des deux champs, il vient que

$$\begin{aligned} \text{pour } z > d \quad \vec{E}(M) &= \vec{E}_+(M) + \vec{E}_-(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = \vec{0} \\ \text{pour } 0 > z > d \quad \vec{E}(M) &= \vec{E}_+(M) + \vec{E}_-(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \\ \text{pour } z < 0 \quad \vec{E}(M) &= \vec{E}_+(M) + \vec{E}_-(M) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = \vec{0}. \end{aligned}$$

Le champ est donc non nul partout, sauf entre les deux distributions où il vaut $\vec{E}(M) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$.

- 3.2. Les deux distributions infinies modélisent les armatures du condensateur si on néglige les effets de bords.
On peut obtenir la tension U à partir de la circulation du champ électrique entre les points $z = d$ et $z = 0$, soit

$$\begin{aligned} \int_{z=d}^{z=0} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} &= V(z=d) - V(z=0) = U \\ \int_{z=d}^{z=0} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} &= \int_{z=d}^{z=0} -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \cdot (-dz \vec{e}_z) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \\ U &= \frac{\sigma d}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Le plan dont le potentiel est le plus élevé est le plan avec la densité de charges la plus importante, soit le plan en $z = d$.

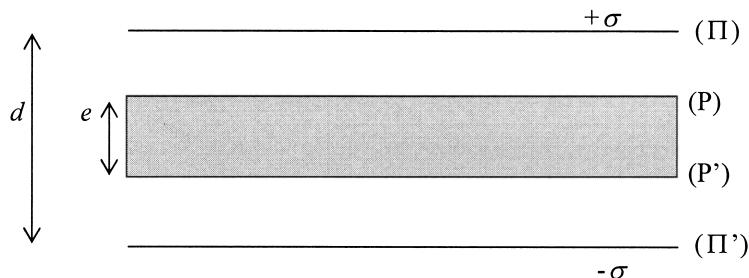
- 3.3. D'après la loi du condensateur $Q = cU$, on peut identifier la capacité c à partir de l'expression précédente

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q}{c} = \frac{\sigma S}{C} \quad ; \quad U = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} \\ \frac{S}{c} &= \frac{d}{\epsilon_0} \\ c &= \frac{S\epsilon_0}{d}. \end{aligned}$$

Par unité de surface la capacité C est $C = c/S$, soit

$$C = \frac{\epsilon_0}{d}.$$

4 – On introduit entre les deux plaques du condensateur plan précédent une plaque métallique parallélépipédique d'épaisseur $e < d$ parallèle aux armatures du condensateur. L'épaisseur e est donc une grandeur finie, mais on considère que les autres dimensions de la plaque métallique sont infinies.



On admet que le champ électrostatique est nul à l'intérieur du métal.

Justifier le fait qu'il apparaîtra des charges électriques sur les surfaces supérieure P et inférieure P' de la plaque métallique. Déterminer le signe de ces charges. On pourra s'aider d'un schéma succinct.

5 – En utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, déterminer les densités surfaciques de charge σ_p et $\sigma_{p'}$, qui apparaissent sur les surfaces P et P' de la plaque métallique. Exprimer σ_p et $\sigma_{p'}$, en fonction de σ .

6.1 – Déterminer la valeur du champ électrostatique en un point du condensateur extérieur à la plaque métallique (entre P et Π d'une part et entre P' et Π' d'autre part).

En déduire la différence de potentiel U' entre les deux armatures du condensateur. On exprimera U' en fonction de σ , e , d et ϵ_0 .

6.2 – En déduire la capacité surfacique C' du condensateur ainsi obtenu. On exprimera C' en fonction de e , d et ϵ_0 . Conclure quant à l'influence de la plaque métallique sur la capacité surfacique du condensateur.

4. Si le champ électrostatique à l'intérieur du métal est nul, c'est qu'un champ électrostatique est produit par la plaque afin de s'opposer au champ produit par les armatures du condensateur. Comme le champ produit est opposé au premier, les distributions de charges sur les faces du métal sont de signes opposés à celles des armatures, soit des charges négatives sur le plan (P) et des charges positives sur le plan (P').
 5. On utilise le théorème de Gauss avec une surface de Gauss cylindrique S_2 de base S à cheval sur l'espace entre le plan (Π) et le plan (P), et dans le métal. Il vient que

$$\begin{aligned} \oint_{S_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \\ \int_{\Sigma_1} -E(z) \vec{z} \cdot dS \vec{e}_z + \int_{\Sigma_{lat}} -E(z) \vec{z} \cdot dS \vec{e}_r + \int_{\Sigma_2} \vec{0} \cdot (-dS \vec{e}_z) &= \frac{\sigma_P S}{\varepsilon_0} \\ -E(z)S &= \frac{\sigma_P S}{\varepsilon_0} \\ -E(z) &= \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} \\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} &= \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} \\ \sigma_P &= -\sigma. \end{aligned}$$

On peut montrer de la même manière pour le plan (P') que $\sigma_{P'} = -(-\sigma) = \sigma$.

- 6.1. On sait que le métal produit un champ électrostatique permettant d'annuler, dans le métal, le champ produit par les armatures : ce champ est nulle partout, sauf entre les deux parois du métal où il vaut, par analogie avec le travail fait précédemment,

$$\vec{E}_m(M) = -\frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z.$$

Dans le métal, le champ total est donc

$$\vec{E}_{tot}(M) = \vec{E}(M) + \vec{E}_m(M) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z = \vec{0}.$$

On peut alors calculer la différence de potentielle entre les deux armatures du condensateur comme on l'a fait précédemment à partir de la circulation du champ

$$\begin{aligned} \int_{z=d}^{z=0} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} &= U' \\ \int_{z=d}^{z(P)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} + \int_{z(P)}^{z(P')} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} + \int_{z(P')}^{z=d} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} &= U' \\ \int_{z=d}^{z(P)} -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot (-dz \vec{e}_z) + \int_{z(P)}^{z(P')} 0 \cdot (-dz \vec{e}_z) + \int_{z(P')}^{z=0} -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot (-dz \vec{e}_z) &= U' \\ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{d-e}{2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{d-e}{2} &= U' \\ U' &= \frac{\sigma(d-e)}{\varepsilon_0}. \end{aligned}$$

- 6.2. D'après le travail précédent, on peut déduire que la capacité dans ce cas là est

$$\begin{aligned} c'U' &= Q \\ c' &= \frac{Q}{U'} = \frac{\sigma S \varepsilon_0}{\sigma(d-e)} \\ c' &= \frac{S \varepsilon_0}{d-e}. \end{aligned}$$

La capacité surfacique $C' = c'/S$ est donc $C' = \frac{\varepsilon_0}{d-e}$. On constate que la plaque métallique augmente la capacité surfacique du condensateur.

Partie C

Partie I - Plaque à induction

Dans une plaque à induction, une bobine est placée sous une plaque en vitrocéramique. Lorsque cette bobine est parcourue par un courant électrique alternatif, un champ magnétique variable induit un champ électrique qui entraîne la circulation de courants électriques dans le métal du récipient posé sur la plaque. Ces courants électriques, appelés "courants de Foucault", génèrent de l'énergie thermique par effet Joule.

Nous nous intéresserons tour à tour au champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur infinie, puis par une spire circulaire.

Ensuite, nous nous intéresserons au phénomène d'induction dans le fond de la casserole et à l'effet Joule associé.



Figure 1 - Plaque à induction

Source : *La physique par les objets quotidiens – Cédric Ray et Jean-Claude Poizat*

Les données utiles à la **Partie I** sont indiquées ci-dessous :

Données - Partie I
Théorème de Stokes :
$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \vec{rot}(\vec{A}) \vec{dS}$ où Σ est une surface qui s'appuie sur le contour fermé C orienté.
Conductivité thermique de l'acier : $\lambda = 16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Capacité thermique massique de l'acier : $c = 1,0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Masse volumique de l'acier : $\rho = 8\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

I.2 - Champ magnétique créé par un fil rectiligne de longueur infinie

Soit un fil rectiligne de longueur infinie parcouru par un courant électrique d'intensité I et placé dans le vide. L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

On considère que, dans l'hypothèse de régimes lentement variables, le cas d'un courant d'intensité variable au cours du temps est assimilable au cas d'un courant d'intensité constante.



Figure 2 - Fil infini parcouru par un courant électrique d'intensité I

- Q4.** Analyser les symétries et les invariances de la distribution de courant pour déterminer la direction du champ magnétique et les paramètres d'espace dont dépendent sa ou ses coordonnée(s) en coordonnées cylindriques.
- Q5.** En appliquant le théorème d'Ampère, établir l'expression du champ magnétique créé par ce fil à une distance R du fil. Préciser le contour d'Ampère choisi.

I.3 - Champ magnétique créé par une spire

Soit une spire circulaire de rayon r , de centre O, parcourue par un courant d'intensité I .

On considère ici encore que, dans l'hypothèse de régimes lentement variables, le cas d'un courant d'intensité variable au cours du temps est assimilable au cas d'un courant d'intensité constante.

Soit un point M situé sur l'axe de la spire, de coordonnée x et tel que du point M la spire soit vue sous l'angle α .

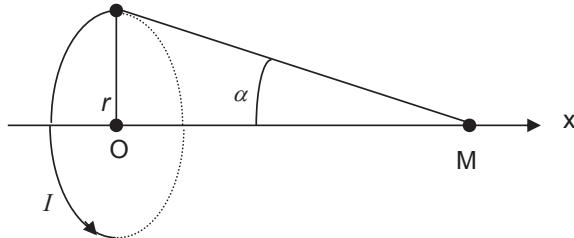


Figure 3 - Spire circulaire de rayon r parcourue par un courant d'intensité I

4. Dans le système de coordonnées cylindriques, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie de la distribution de courant du fil. Le champ magnétique étant perpendiculaire au plan de symétrie, il est tel que

$$\vec{B}(M) = B(r, \theta, z)\vec{e}_\theta.$$

Il y a invariance de la distribution de courant par rotation selon θ et par translation selon z , ainsi le champ généré par la distribution est

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_\theta.$$

5. On utilise comme contour d'Ampère \mathcal{C} un cercle de rayon R entourant le fil électrique. On le parcourt selon le vecteur \vec{e}_θ afin que le courant I soit compté positivement selon la règle de la main droite. Ainsi, le théorème d'Ampère donne

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 I \\ \int_0^{2\pi} B(R)\vec{e}_\theta \cdot R d\theta \vec{e}_\theta &= \mu_0 I \\ 2\pi B(R)R &= \mu_0 I \\ B(R) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\vec{e}_r$.

- Q6.** En utilisant les propriétés de symétrie de la distribution de courant, déterminer la direction et le sens du champ magnétique créé par cette spire au point M.
Reproduire succinctement le schéma précédent et représenter la direction et le sens du champ magnétique créé au point M.

Le champ magnétique créé en un point M de l'axe de la spire est donné par l'expression :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} \sin^3(\alpha) = B_0 \sin^3(\alpha)$$

où α représente l'angle sous lequel la spire est vue depuis le point M et $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2r}$.

- Q7.** Établir l'expression de B au point M en fonction de B_0 , r et de x , x représentant la distance entre le point O et le point M.

Pour des distances x petites par rapport au rayon de la spire, un développement limité permet de montrer que l'expression du champ B au point M est donnée par :

$$B = B_0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{r^2}\right).$$

- Q8.** Quelle valeur maximale de x permet de considérer que le champ B est égal à B_0 , (à 10 % près).

On exprimera x en fonction de r . On donne $\sqrt{\frac{2}{30}} \approx 0,26$.

I.4 - Chauffage par induction

Une plaque à induction comporte une bobine (P) de rayon r_1 permettant de créer un champ magnétique. La bobine (P) est parcourue par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et de fréquence $f = 60$ kHz. On modélise la casserole métallique posée sur la plaque par une spire (S) circulaire de rayon $r_2 < r_1$. Elle est parcourue par un courant d'intensité $i(t)$.

Les sens des courants sont arbitrairement ceux mentionnés sur la **figure 4**.

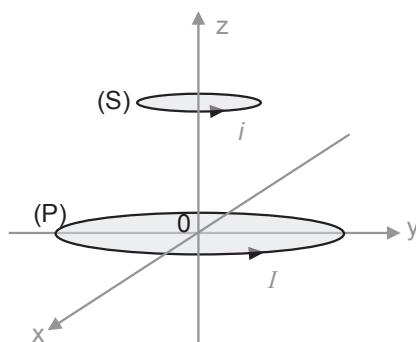


Figure 4 - Représentation de la bobine (P) et de la spire (S)

On considère les hypothèses simplificatrices suivantes :

- la casserole posée sur la plaque à induction est à une distance z_0 de la bobine ;
- le champ magnétique auquel est soumis la casserole est uniforme et son expression est donnée par : $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ où B_0 est une constante ;
- la spire (S) a une résistance électrique R et son inductance propre est négligée.

- Q9.** Déterminer l'expression du flux Φ du champ magnétique qui traverse la spire (S).

- Q10.** En déduire l'expression de la force électromotrice induite e apparaissant dans la spire (S).

- Q11.** Déterminer l'expression du courant induit $i(t)$ dans la bobine.

6. Au niveau du point M , soit sur l'axe (Ox), les plans d'anti-symétrie de la distribution sont $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_x)$ et $(M, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x)$ (en assimilant le vecteur unitaire \vec{e}_x donné au vecteur \vec{e}_z de la base cylindrique). Le champ magnétique est contenue dans ces plans, soit

$$\vec{B}(M) = B(r, \theta, x)\vec{e}_x.$$

Au point M , il y a invariance par rotation selon θ , soit

$$\vec{B}(M) = B(r, x)\vec{e}_x.$$

7. On constate que dans le triangle rectangle d'angle α , de côté adjacent à cet angle OM et de côté opposé à cet angle r , il vient que

$$\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + OM^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}.$$

Ainsi il vient que

$$B = B_0 \sin^3(\alpha) = B_0 \frac{r^3}{(r^2 + x^2)^{3/2}}.$$

8. On cherche la valeur de x pour laquelle $B = B_0 \frac{9}{10}$, soit

$$\begin{aligned} 1 - \frac{3}{2} \frac{x^2}{r^2} &= \frac{9}{10} \\ \frac{3}{2} \frac{x^2}{r^2} &= \frac{1}{10} \\ x^2 &= r^2 \frac{2}{30} \\ x &= r \sqrt{\frac{2}{30}} \approx 0,26r. \end{aligned}$$

9. Le flux du champ magnétique qui traverse la spire (S) est

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z \cdot \pi r_2^2 \vec{e}_z = B_0 \pi r_2^2 \cos(\omega t)$$

avec \vec{S} orienté d'après la règle de la main droite et le sens du courant i donné.

10. La force électromotrice induite est, d'après la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 \pi r_2^2 \omega \sin(\omega t).$$

11. Le courant induit dans la bobine est donc

$$i = \frac{e}{R} = \frac{B_0 \pi r_2^2 \omega}{R} \sin(\omega t).$$

Q12. Déterminer l'expression de la puissance instantanée $P(t)$ dissipée par effet Joule dans la spire (S).

Q13. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que la puissance moyenne P_{moy} dissipée par effet Joule dans la spire (S) est égale à :

$$P_{moy} = \frac{(\omega B_0 \pi r_2^2)^2}{2R}.$$

Q14. Par quel phénomène physique l'énergie thermique transmise au fond de la casserole par effet Joule est-elle transmise au contenu de la casserole ?

Q15. Citer un intérêt d'une plaque à induction par rapport à une plaque de cuisson électrique fonctionnant à l'aide d'une résistance électrique.

12. La puissance instantanée dissipée par effet Joule est

$$P(t) = ei = \frac{(B_0 \pi r_2^2 \omega)^2}{R} \sin^2(\omega t).$$

13. La puissance moyenne est

$$P_{moy} = \langle P(t) \rangle = \frac{(B_0 \pi r_2^2 \omega)^2}{R} \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{(B_0 \pi r_2^2 \omega)^2}{2R}.$$

14. L'énergie thermique transmise au fond de la casserole est la conduction thermique.

15. Dans le cas de la cuisson électrique à l'aide d'une résistance classique, la chaleur est transmise via la résistance sous la plaque, puis par conduction thermique au fond de la casserole, puis du fond de la casserole à son contenu. Dans le cas de la cuisson avec une plaque à induction, le fond de la casserole agit directement comme une résistance, cette chaleur est transmise par conduction au contenu. Il y a donc moins de perte énergétique avec la plaque à induction.