

## Concours blanc

Durée : 3h

### Partie II - Stockage électromécanique

Une des solutions possibles pour maintenir l'équilibre consommation-production électrique est de stocker l'énergie du réseau lors des pics de production afin de la restituer lorsque la demande augmente sur une journée. Il existe plusieurs types de stockage, on pourra citer entre autres :

- le stockage électrochimique par batteries ;
- les systèmes de transfert d'énergie par pompage (STEP) ;
- le stockage électromécanique ou inertiel.

Le stockage inertiel de l'énergie est une solution intéressante, en particulier dans les dispositifs de production à faible et moyenne puissance. Le stockage inertiel se distingue par sa grande capacité au cyclage (possibilité de  $10^6$  cycles de charge/décharge) se traduisant ainsi par une durée de vie élevée et donc un coût de fonctionnement relativement faible par rapport au stockage par batteries ou aux STEP.

On peut également mentionner un contrôle aisément de la charge et de la décharge, une bonne connaissance de l'état de charge (image de la vitesse de rotation), et enfin, un recyclage en fin de vie pouvant être peu coûteux économiquement et énergétiquement.

Le stockage inertiel utilise le plus souvent des volants d'inertie mis en rotation de façon à stocker l'énergie électrique sous forme d'énergie cinétique. Dans cette optique, des centrales inertielles constituées de plusieurs centaines de volants d'inertie ont été développées (**figure 2**).



**Figure 2** - Centrale inertielle de 20 MW, 2011, New-York, © Beacon Power.

#### II.1 - Moment d'inertie

On veut pouvoir stocker  $3,0 \text{ kWh}$  par volant d'inertie, ce qui représente une énergie de  $1,0 \cdot 10^7 \text{ J}$ .

Le principe du volant d'inertie consiste à faire tourner un solide 1 dans une enceinte de confinement liée au bâti 0. On note  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère associé à 0 et on supposera le référentiel associé galiléen. Le solide 1 est un cylindre plein et homogène et on donne :

- hauteur  $H$ , rayon  $R$ ;
- masse  $m$ ;
- centre d'inertie  $G$  sur son axe de rotation  $(O, \vec{z}_0)$ ;
- moment d'inertie  $J_1$  autour de l'axe  $(O, \vec{z}_0)$ .

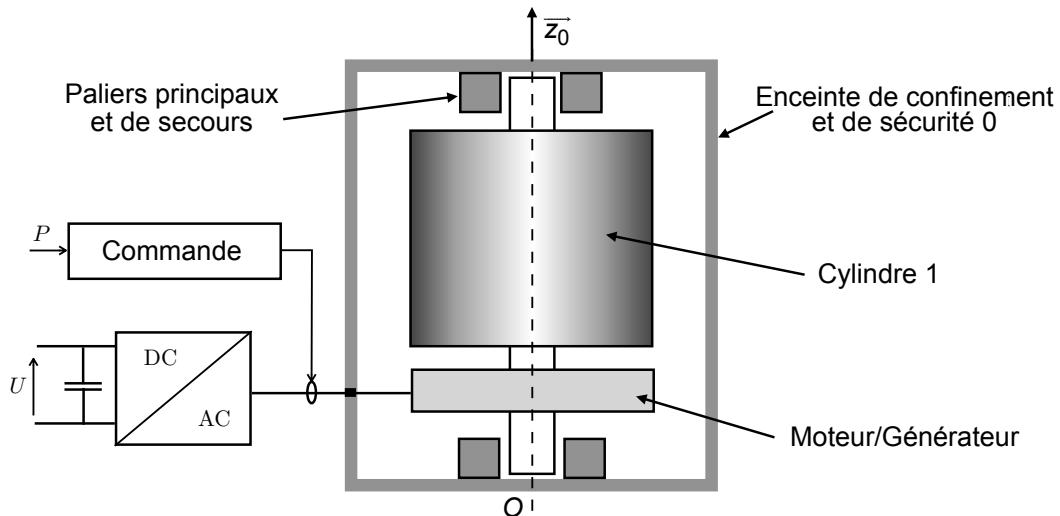
On note  $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega \vec{z}_0$  le vecteur rotation du cylindre 1 autour d'un axe fixe (**figure 3**).

**Q21.** Exprimer l'énergie cinétique  $E_c$  d'un tel dispositif en fonction de  $J_1$  et de  $\omega$ .

Q.21. L'énergie cinétique d'un tel dispositif est

$$E_c = \frac{1}{2} J_1 \omega^2$$

avec  $J_1$  le moment d'inertie et  $\omega$  la vitesse angulaire du système.



Afin d'optimiser le fonctionnement du volant d'inertie, on souhaite maintenir une vitesse angulaire minimale  $\omega_{min}$ . De plus, pour résister aux contraintes mécaniques liées à la rotation du volant, on définit également une vitesse angulaire maximale  $\omega_{max}$ .

Un cycle classique d'utilisation prendra l'allure suivante :

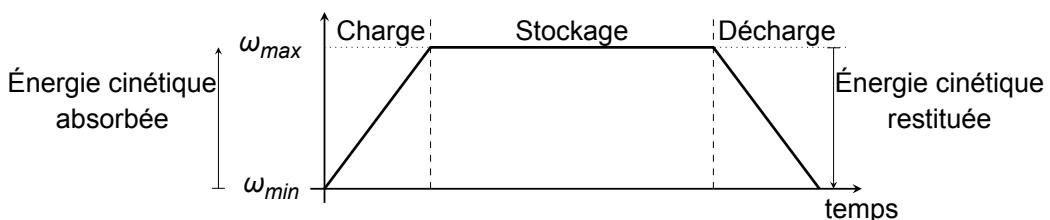


Figure 4 - Principe du cycle de récupération d'énergie cinétique

L'énergie cinétique employable correspond donc à la différence d'énergie entre les situations de vitesses angulaires maximale et minimale.

**Q22.** Pour des vitesses de rotation  $N_{min} = 30\ 000 \text{ tr/min}$  et  $N_{max} = 40\ 000 \text{ tr/min}$ , exprimer la valeur du moment d'inertie  $J_1$  nécessaire afin de disposer des  $3,0 \text{ kW}\cdot\text{h}$  demandés. Réaliser l'application numérique.

Le dispositif pouvant présenter des pertes (cas étudié en **sous-partie II.2**), on prendra une marge de sécurité avec une valeur de  $J_1$  de  $3,0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ . La forme du volant d'inertie est imposée : il s'agit d'un cylindre plein et homogène de masse  $m$ , de hauteur  $H$  et de rayon  $R$ .

**Q23.** Exprimer la masse  $m$  du cylindre en fonction de sa masse volumique  $\rho$ , ainsi que de ses dimensions  $H$  et  $R$ .

Le moment d'inertie d'un cylindre autour de son axe de révolution ( $O, \vec{z}_0$ ) est donné par la relation :

$$J_1 = \frac{\pi \rho H R^4}{2}$$

**Q24.** Montrer que :

$$J_1 = m \frac{R^2}{2}$$

En déduire la valeur du rayon  $R$  permettant d'obtenir un cylindre de 300 kg.

Q.22. L'énergie stockée correspond à la différence entre les énergies cinétiques maximal et minimal, soit

$$\begin{aligned} E_{\text{stock}} &= E_{c, \text{max}} - E_{c, \text{min}} = \frac{1}{2} J_1 (\omega_{\text{max}}^2 - \omega_{\text{min}}^2) = \frac{1}{2} J_1 \times \left( \frac{2\pi}{60} \right)^2 (N_{\text{max}}^2 - N_{\text{min}}^2) \\ &= \frac{J_1}{200} (N_{\text{max}}^2 - N_{\text{min}}^2). \end{aligned}$$

en utilisant la conversion

$$\begin{aligned} 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} &= 2\pi \text{ rad} \cdot \text{tr}^{-1} \times \frac{1}{60 \text{ s} \cdot \text{min}^{-1}} \times 1 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{\pi}{30} \text{ rad} \cdot \text{tr}^{-1} \cdot \text{min} \cdot \text{s}^{-1} \times 1 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} \\ &\simeq \frac{1}{10} \text{ rad} \cdot \text{tr}^{-1} \cdot \text{min} \cdot \text{s}^{-1} \times 1 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}. \end{aligned}$$

L'énergie stockée et les vitesses de rotation étant fixées, on peut isoler le moment d'inertie

$$J_1 \simeq \frac{100 \times E_{\text{stock}}}{N_{\text{max}}^2 - N_{\text{min}}^2}.$$

**A.N.**  $J_1 \simeq \frac{2,0 \times 10^9 \text{ J}}{16 \times 10^8 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2} - 9 \times 10^8 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{20 \text{ J}}{7 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}} \simeq 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

en se rappelant que  $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ .

Q.23. La masse du cylindre est

$$m = \rho H \pi R^2.$$

Q.24. D'après l'expression du moment d'inertie

$$J_1 = \frac{\pi \rho H R^4}{2} = m \frac{R^2}{2}.$$

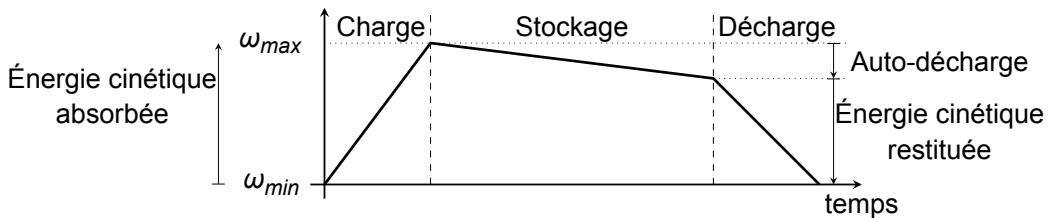
Ainsi, en isolant le rayon

$$R = \sqrt{\frac{2J_1}{m}}.$$

**A.N.**  $R = \sqrt{\frac{2 \times 3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{3 \times 10^2 \text{ kg}}} = \sqrt{2 \times 10^{-2} \text{ m}^2} \simeq 1,4 \times 10^{-1} \text{ m} = 14 \text{ cm}.$

## II.2 - Auto-décharge

Après une phase de charge, le volant d'inertie doit conserver son énergie cinétique jusqu'à la phase de décharge. Durant cette phase de stockage, différentes pertes dans le mécanisme peuvent dissiper une partie de l'énergie emmagasinée et induire un phénomène d'auto-décharge (**figure 5**).



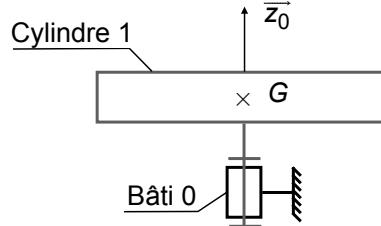
**Figure 5** - Principe du cycle de récupération d'énergie cinétique avec prise en compte des pertes

Pour limiter ces pertes, on envisage d'abord un guidage par roulements pour réaliser la liaison pivot d'axe ( $O, \vec{z}_0$ ) entre le cylindre 1 et le bâti 0.

On a toujours  $\vec{\Omega}_{1/0} = \omega \vec{z}_0$  le vecteur rotation du cylindre 1 par rapport au bâti 0.

On rappelle le paramétrage du cylindre 1 :

- hauteur  $H$ ;
- rayon  $R$ ;
- masse  $m$ ;
- centre d'inertie  $G$  sur son axe de rotation ( $O, \vec{z}_0$ );
- moment d'inertie  $J_1$  autour de l'axe ( $O, \vec{z}_0$ ).



**Figure 6** - Schéma cinématique simplifié du système

Un couple résistant  $C_{res} \vec{z}_0$  modélise les frottements visqueux et secs qui s'appliquent sur le cylindre 1, tel que  $C_{res} \vec{z}_0 = -(C_s + C_v) \vec{z}_0$ . On note alors  $C_s$  le couple résistant constant lié au frottement sec et  $C_v = \mu \cdot \omega$  le couple résistant lié au frottement visqueux où  $\mu$  est le coefficient de frottement visqueux en N·m/(rad/s) supposé constant.

**Q25.** Identifier qualitativement les éléments mécaniques et phénomènes physiques pouvant être à l'origine de ces différents frottements.

**Q26.** Préciser le(s) solide(s) isolé(s) et la démarche employée afin de montrer que :

$$J_1 \frac{d\omega}{dt} + \mu \cdot \omega = -C_s. \quad (3)$$

La fonction  $\omega$  de variable  $t$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

**Q27.** Résoudre l'équation différentielle (3) lorsque  $C_s$  est une constante réelle et pour la condition initiale  $\omega(0) = \omega_{max}$ .

**Q28.** Exprimer la durée  $\Delta t$  pour que le système s'autodécharge jusqu'à  $\omega_{min}$ .

On trouve alors  $\Delta t \simeq 1 \cdot 10^4$  s.

**Q29.** Exprimer la durée d'autodécharge en heure et conclure.

Q.25. Les frottements secs sont dus à l'imperfection des roulements constituant la liaison pivot entre 0 et 1. Les frottements visqueux sont dus à la rotation du volant d'inertie dans l'air environnant.

Q.26. On isole le solide 1 qui subit les actions mécaniques suivantes

- le couple résistant sec  $-C_S z_0$
- le couple résistant visqueux  $-\mu \omega z_0$ .

Le moment du poids est nul car cette force s'applique sur le point  $G$  qui est sur l'axe de rotation.

D'après le théorème du moment d'inertie scalaire appliqué dans le référentiel galiléen lié au bâti

$$J_1 \frac{d\omega}{dt} = -C_S - \mu \omega ; \quad J_1 \frac{d\omega}{dt} + \mu \omega = -C_S.$$

Q.27. On résout l'équation particulière pour laquelle  $\omega$  est de la même forme que le second membre  $C_S = \text{cst}$ , ainsi

$$J_1 \frac{d\omega_p}{dt} + \mu \omega_p = -C_S ; \quad \mu \omega_p = -C_S ; \quad \omega_p = -\frac{C_S}{\mu}.$$

On résout l'équation homogène sans second membre

$$J_1 \frac{d\omega_h}{dt} + \mu \omega_h = 0 ; \quad \frac{d\omega_h}{dt} = -\frac{\mu}{J_1} \omega_h ; \quad \omega_h = A e^{-\frac{\mu}{J_1} t}$$

avec  $A$  une constante d'intégration.

La solution totale est

$$\omega(t) = \omega_p + \omega_h(t) = -\frac{C_S}{\mu} + A e^{-\frac{\mu}{J_1} t}.$$

Or d'après la condition initiale fournie  $\omega(0) = \omega_{\max}$ , ainsi

$$\omega(0) = -\frac{C_S}{\mu} + A = \omega_{\max} ; \quad A = \omega_{\max} + \frac{C_S}{\mu}$$

ainsi

$$\omega(t) = \left( \omega_{\max} + \frac{C_S}{\mu} \right) e^{-\frac{\mu}{J_1} t} - \frac{C_S}{\mu}.$$

Q.28. Au bout de  $\Delta t$  il vient que  $\omega(\Delta t) = \omega_{\min}$  soit

$$\omega(\Delta t) = \left( \omega_{\max} + \frac{C_S}{\mu} \right) e^{-\frac{\mu}{J_1} \Delta t} - \frac{C_S}{\mu} = \omega_{\min} ; \quad e^{-\frac{\mu}{J_1} \Delta t} = \frac{\omega_{\min} + \frac{C_S}{\mu}}{\omega_{\max} + \frac{C_S}{\mu}} ; \quad -\frac{\mu}{J_1} \Delta t = \ln \left( \frac{\omega_{\min} + \frac{C_S}{\mu}}{\omega_{\max} + \frac{C_S}{\mu}} \right)$$

$$\Delta t = \frac{J_1}{\mu} \ln \left( \frac{\omega_{\max} + \frac{C_S}{\mu}}{\omega_{\min} + \frac{C_S}{\mu}} \right).$$

Q.29. On exprime la durée d'autodécharge  $\Delta t$  en heure

$$\Delta t \simeq 1 \times 10^4 \text{ s} = \frac{10\,000 \text{ s}}{3600 \text{ s} \cdot \text{h}^{-1}} \simeq \frac{9}{3} \text{ h} = 3 \text{ h}.$$

La durée d'auto-décharge est de l'ordre de quelques heures, donc ce dispositif n'est adapté qu'à des stockages sur de faibles durées.