Leçon 15 : statique des fluides

E. Capitaine

TSI 2 - Lycée Charles Coëffin

28 janvier 2026

Plan

Plan

Introduction

Cas introductif

On plonge une paille dans un verre rempli. On bouche l'ouverture du haut de la paille, puis on sort la paille du verre.

Introduction

Cas introductif

On plonge une paille dans un verre rempli. On bouche l'ouverture du haut de la paille, puis on sort la paille du verre.

Pourquoi le liquide dans la paille ne coule-t-il pas ?

Plan

À l'**échelle macroscopique** (échelle globale relative à l'ensemble d'un système) **la matière est continue** mais ces **propriétés** (température, masse volumique, etc.) **peuvent être inhomogènes**.

À l’**échelle macroscopique** (échelle globale relative à l’ensemble d’un système) **la matière est continue** mais ces **propriétés** (température, masse volumique, etc.) **peuvent être inhomogènes**.

À l’échelle macroscopique, un fluide est un milieu matériel capable de se déformer et de s’écouler jusqu’à adopter la forme du récipient qui le contient.

L'**échelle microscopique** est celle des atomes et des molécules. La matière est ici **discontinue**.

L'**échelle microscopique** est celle des atomes et des molécules. La matière est ici **discontinue**.

La longueur caractéristique de l'échelle microscopique pour un fluide est **le libre parcours moyen** ℓ^*, qui correspond à la distance parcourue par une particule entre deux collisions successives. À $300\,\mathrm{K}$

$$\ell^*_{\mathrm{liq}} \approx 10^{-9}\,\mathrm{m} \quad \text{et} \quad \ell^*_{\mathrm{gaz}} \approx 10^{-7}\,\mathrm{m}.$$

L'**échelle mésoscopique** est une échelle intermédiaire entre microscopique et macroscopique : la longueur caractéristique de cette échelle est très petite devant la taille totale du système, mais très grande devant le libre parcours moyen des particules. À cette échelle, **la matière est continue mais ses propriétés sont localement homogènes**.

De nouveaux types de forces

Description d'un fluide

L'**échelle mésoscopique** est une échelle intermédiaire entre microscopique et macroscopique : la longueur caractéristique de cette échelle est très petite devant la taille totale du système, mais très grande devant le libre parcours moyen des particules. À cette échelle, **la matière est continue mais ses propriétés sont localement homogènes**.

On appelle **particule fluide** une portion de fluide mésoscopique dans les trois dimensions et de masse constante. ♥

L'**échelle mésoscopique** est une échelle intermédiaire entre microscopique et macroscopique : la longueur caractéristique de cette échelle est très petite devant la taille totale du système, mais très grande devant le libre parcours moyen des particules. À cette échelle, **la matière est continue mais ses propriétés sont localement homogènes**.

On appelle **particule fluide** une portion de fluide mésoscopique dans les trois dimensions et de masse constante. ♥

Les **grandeurs extensives relatives à l'échelle mésoscopiques** sont notées avec le symbole différentielle d (“d droit”).

De nouveaux types de forces

Description d'un fluide

L'**échelle mésoscopique** est une échelle intermédiaire entre microscopique et macroscopique : la longueur caractéristique de cette échelle est très petite devant la taille totale du système, mais très grande devant le libre parcours moyen des particules. À cette échelle, **la matière est continue mais ses propriétés sont localement homogènes**.

On appelle **particule fluide** une portion de fluide mésoscopique dans les trois dimensions et de masse constante. ♥

Les **grandeurs extensives relatives à l'échelle mésoscopiques** sont notées avec le symbole différentielle d ("d droit").

Dans certaines situations on pourra étudier **un volume de fluide mésoscopique selon une seule dimension**. On ne pourra pas qualifier ce volume de particule fluide.

Rappel : les forces subies par un solide peuvent être classées en deux grand catégories.

Rappel : les forces subies par un solide peuvent être classées en deux grand catégories.

- Les **forces à distance** exercées par l'intermédiaire d'un champ : poids (ou force d'attraction gravitationnelle), force de Lorentz.

Rappel : les forces subies par un solide peuvent être classées en deux grand catégories.

- Les **forces à distance** exercées par l'intermédiaire d'un champ : poids (ou force d'attraction gravitationnelle), force de Lorentz.
- Les **forces de contact** qui nécessite que l'opérateur touche le système : force de frottement, réaction du support, force de rappel du ressort.

En mécanique des fluides, on distingue plutôt

En mécanique des fluides, on distingue plutôt

- Les **forces volumiques** qui sont la résultante des forces à distance subies par chacune des molécules de la particule fluide. ♥

En mécanique des fluides, on distingue plutôt

- Les **forces volumiques** qui sont la résultante des forces à distance subies par chacune des molécules de la particule fluide. ♥
- Les **forces surfaciques** qui sont l'équivalent des forces de contact avec les particules fluides voisines ou avec les parois du récipient contenant le fluide. ♥

De nouveaux types de forces

Exemple de force volumique

L'exemple typique de forces volumiques est **le poids** ou force de pesanteur. Exprimons la dans le cas d'une particule fluide située en un point M de l'espace

De nouveaux types de forces

Exemple de force volumique

L'exemple typique de forces volumiques est **le poids** ou force de pesanteur. Exprimons la dans le cas d'une particule fluide située en un point M de l'espace

$$\mathrm{d}\vec{F}_{pes} = \mathrm{d}m\vec{g} = \rho(M)\mathrm{d}\tau\vec{g}$$

avec $\mathrm{d}\vec{F}_{pes}$, $\mathrm{d}m$ et $\mathrm{d}\tau$ les grandeurs extensives mésoscopiques force, masse et volume.

De nouveaux types de forces

Exemple de force volumique

L'exemple typique de forces volumiques est **le poids** ou force de pesanteur. Exprimons la dans le cas d'une particule fluide située en un point M de l'espace

$$\mathrm{d}\vec{F}_{pes} = \mathrm{d}m\vec{g} = \rho(M)\mathrm{d}\tau\vec{g} \quad \heartsuit$$

avec $\mathrm{d}\vec{F}_{pes}$, $\mathrm{d}m$ et $\mathrm{d}\tau$ les grandeurs extensives mésoscopiques force, masse et volume.

Dans certains cas, on préférera utiliser les densités volumiques de force (ou forces volumiques) noté $\vec{f}$ qui est le rapport entre la force exercée sur une particule fluide et son volume. Dans le cas du poids

$$\vec{f}_{pes} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_{pes}}{\mathrm{d}\tau} =$$

De nouveaux types de forces

Exemple de force volumique

L'exemple typique de forces volumiques est **le poids** ou force de pesanteur. Exprimons la dans le cas d'une particule fluide située en un point M de l'espace

$$\mathrm{d}\vec{F}_{pes} = \mathrm{d}m\vec{g} = \rho(M)\mathrm{d}\tau\vec{g}$$

avec $\mathrm{d}\vec{F}_{pes}$, $\mathrm{d}m$ et $\mathrm{d}\tau$ les grandeurs extensives mésoscopiques force, masse et volume.

Dans certains cas, on préférera utiliser les densités volumiques de force (ou forces volumiques) noté $\vec{f}$ qui est le rapport entre la force exercée sur une particule fluide et son volume. Dans le cas du poids

$$\vec{f}_{pes} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_{pes}}{\mathrm{d}\tau} = \rho(M)\vec{g}.$$

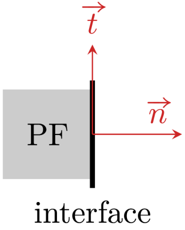
On évite la notation $\vec{P}$ pour le poids afin de ne pas confondre avec la notation pour le champ de pression $P(M)$.

Les **actions mécaniques exercées par un particule fluide** à une interface avec une autre particule fluide ou un solide sont au nombre de deux.

De nouveaux types de forces

Exemple de force surfaciques

Les **actions mécaniques exercées par un particule fluide** à une interface avec une autre particule fluide ou un solide sont au nombre de deux.

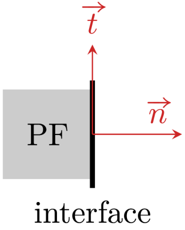


- La **force pressante** ou **force de pression** dirigée dans la direction normale à l'interface vers l'extérieure de la particule fluide exerçant la force, soit selon $\vec{n}$ sur le schéma.

De nouveaux types de forces

Exemple de force surfaciques

Les **actions mécaniques exercées par un particule fluide** à une interface avec une autre particule fluide ou un solide sont au nombre de deux.

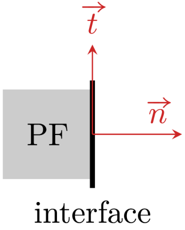


- La **force pressante** ou **force de pression** dirigée dans la direction normale à l'interface vers l'extérieure de la particule fluide exerçant la force, soit selon $\vec{n}$ sur le schéma.
- La **force visqueuse** ou **force de viscosité** dirigée dans la direction tangentielle à l'interface et dans le sens de déplacement de la particule fluide exerçant la force, soit selon $\vec{t}$ sur le schéma.

De nouveaux types de forces

Exemple de force surfaciques

Les **actions mécaniques exercées par un particule fluide** à une interface avec une autre particule fluide ou un solide sont au nombre de deux.



- La **force pressante** ou **force de pression** dirigée dans la direction normale à l'interface vers l'extérieure de la particule fluide exerçant la force, soit selon $\vec{n}$ sur le schéma.
- La **force visqueuse** ou **force de viscosité** dirigée dans la direction tangentielle à l'interface et dans le sens de déplacement de la particule fluide exerçant la force, soit selon $\vec{t}$ sur le schéma.

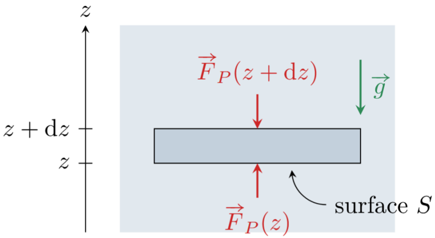
Dans le cas de la **statique des fluides**, les particules fluides sont immobiles car le fluide est au repos, ainsi on ne tiendra pas compte de la force visqueuse dans cette leçon.

Plan

Champ de pression dans un fluide au repos

Relation de la statique des fluides

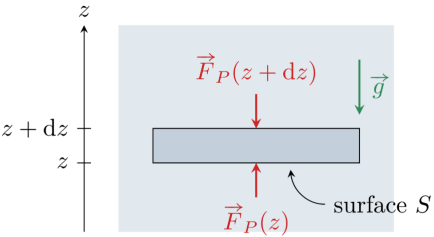
On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on note (Oz) un axe vertical ascendant.



Champ de pression dans un fluide au repos

Relation de la statique des fluides

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on note (Oz) un axe vertical ascendant.

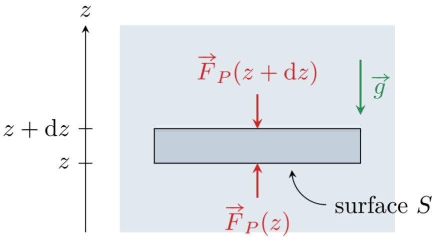


Comme on l'a fait pour les champs EM, on peut étudier les **invariances** pour le fluide, source du champ de pression $P(M)$, et donc obtenir celles du champ de pression $P(M)$ d'après le **principe de Curie**.

Champ de pression dans un fluide au repos

Relation de la statique des fluides

On se place dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on note (Oz) un axe vertical ascendant.



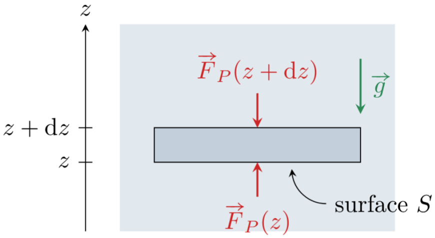
Comme on l'a fait pour les champs EM, on peut étudier les **invariances** pour le fluide, source du champ de pression $P(M)$, et donc obtenir celles du champ de pression $P(M)$ d'après le **principe de Curie**.

Le fluide est invariant par invariances de translations selon x et y, donc le champ de pression ne dépend que de z : $P(M) = P(z)$.

Champ de pression dans un fluide au repos

Relation de la statique des fluides

On considère comme système la tranche de fluide mésoscopique selon z mais macroscopiques selon x et y. Sa hauteur est donc $\mathrm{d}z$ et sa surface S.

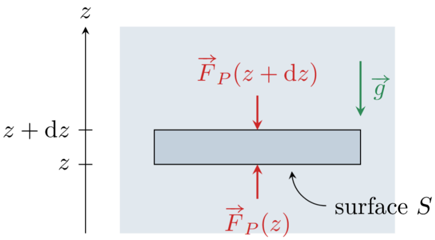


On fait le bilan des forces :

Champ de pression dans un fluide au repos

Relation de la statique des fluides

On considère comme système la tranche de fluide mésoscopique selon z mais macroscopiques selon x et y. Sa hauteur est donc $\mathrm{d}z$ et sa surface S.



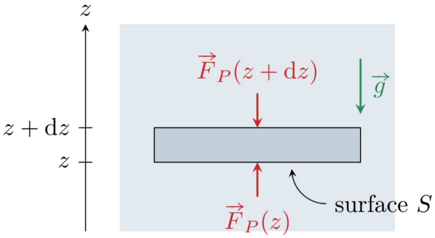
On fait le bilan des forces :

- son poids : $\vec{F}_{pes} = \mathrm{d}m\vec{g} = -\rho \mathrm{d}\tau g \vec{u}_z$

Champ de pression dans un fluide au repos

Relation de la statique des fluides

On considère comme système la tranche de fluide mésoscopique selon z mais macroscopiques selon x et y. Sa hauteur est donc $\mathrm{d}z$ et sa surface S.



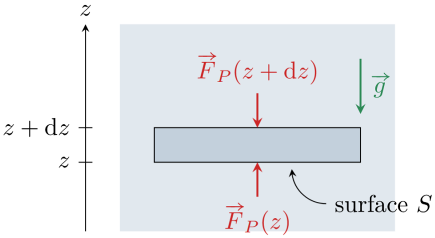
On fait le bilan des forces :

- son poids : $\vec{F}_{pes} = \mathrm{d}m\vec{g} = -\rho \mathrm{d}\tau g \vec{u}_z$
- la force pressante exercée par la tranche de fluide située en z sous le système : $\vec{F}_P(z) = P(z)S\vec{u}_z$

Champ de pression dans un fluide au repos

Relation de la statique des fluides

On considère comme système la tranche de fluide mésoscopique selon z mais macroscopiques selon x et y. Sa hauteur est donc $\mathrm{d}z$ et sa surface S.



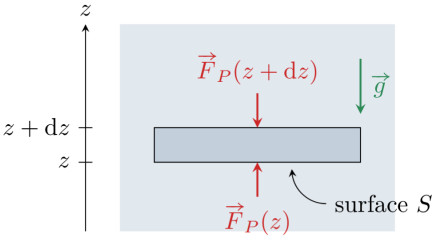
On fait le bilan des forces :

- son poids : $\vec{F}_{pes} = \mathrm{d}m\vec{g} = -\rho \mathrm{d}\tau g \vec{u}_z$
- la force pressante exercée par la tranche de fluide située en z sous le système : $\vec{F}_P(z) = P(z)S\vec{u}_z$
- la force pressante exercée par la tranche de fluide située en $z + \mathrm{d}z$ au dessus du système : $\vec{F}_P(z+\mathrm{d}z) = -P(z+\mathrm{d}z)S\vec{u}_z$.

Champ de pression dans un fluide au repos

Relation de la statique des fluides

On applique le PFD à la tranche de fluide mésoscopique

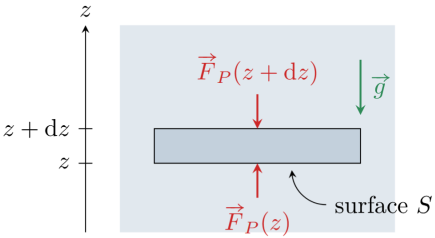


Champ de pression dans un fluide au repos

Relation de la statique des fluides

On applique le PFD à la tranche de fluide mésoscopique

$$m\vec{a} = \vec{F}_{pes} + \vec{F}_P(z) + \vec{F}_P(z + \mathrm{d}z).$$



Comme la tranche de fluide est au repos, sa vitesse est constamment nulle par définition, donc son accélération est nulle. Il vient que

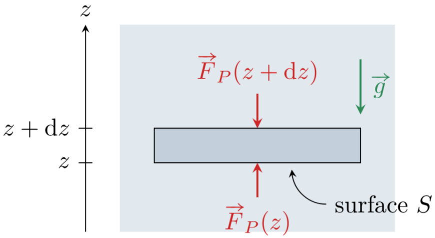
$$\begin{aligned} 0 &= -\rho \mathrm{d}\tau g \vec{u}_z + P(z) S \vec{u}_z - P(z + \mathrm{d}z) S \vec{u}_z \\ -\rho S \mathrm{d}z g &= \left(P(z + \mathrm{d}z) - P(z)\right) S. \end{aligned}$$

Champ de pression dans un fluide au repos

Relation de la statique des fluides

On applique le PFD à la tranche de fluide mésoscopique

$$m\vec{a} = \vec{F}_{pes} + \vec{F}_P(z) + \vec{F}_P(z+\mathrm{d}z).$$

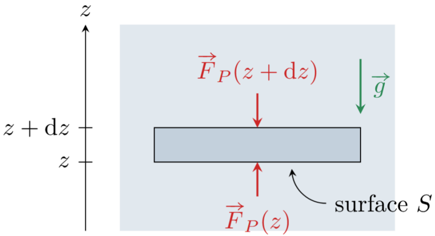


En divisant par $S\mathrm{d}z$ et en approximant au premier ordre en z, il vient que

$$-\rho g = \frac{P(z+\mathrm{d}z) - P(z)}{\mathrm{d}z} \simeq \frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z}.$$

On obtient la **relation fondamentale de la statique des fluides** (RSF)

$$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = \pm \rho g.$$



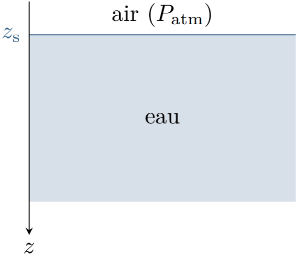
Attention : on choisira le signe $-$ si l'axe z est ascendant (comme l'exemple précédent) et $+$ s'il est descendant.

Champ de pression dans un fluide au repos

Evolution de la pression avec l'altitude dans un fluide incompressible

Nous pouvons modéliser l'eau comme un **fluide incompressible**, soit **un fluide de masse volumique ρ constante**. ♥

Appliquons la RSF à une tranche d'eau compris entre z et $z + \mathrm{d}z$.

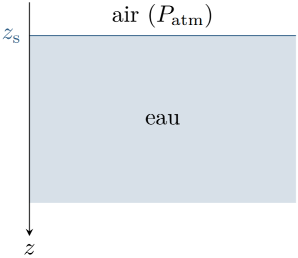


Champ de pression dans un fluide au repos

Evolution de la pression avec l'altitude dans un fluide incompressible

Nous pouvons modéliser l'eau comme un **fluide incompressible**, soit **un fluide de masse volumique ρ constante**.

Appliquons la RSF à une tranche d'eau compris entre z et $z + \mathrm{d}z$.



L'axe est ici descendant donc

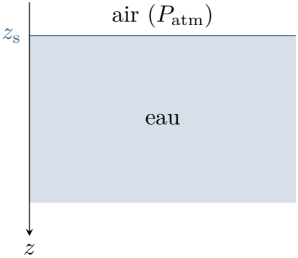
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \rho g \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}P = \rho g \mathrm{d}z.$$

On intègre alors cette relation.

Champ de pression dans un fluide au repos

Evolution de la pression avec l'altitude dans un fluide incompressible

Nous pouvons modéliser l'eau comme un **fluide incompressible**, soit **un fluide de masse volumique ρ constante**.



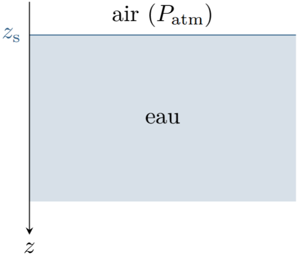
Appliquons la RSF à une tranche d'eau compris entre z et $z + \mathrm{d}z$.

$$\int_{P_{\mathrm{atm}}}^{P(z)} \mathrm{d}P = \rho g \int_{z_{\mathrm{s}}}^{z} \mathrm{d}z \quad \text{soit} \quad P(z) = P_{\mathrm{atm}} + \rho g \left(z - z_{\mathrm{s}}\right).$$

Champ de pression dans un fluide au repos

Evolution de la pression avec l'altitude dans un fluide incompressible

On obtient alors **la loi de pression hydrostatique** : dans un liquide incompressible, la pression ne dépend que de la profondeur et évolue linéairement. ♥



$$P(z) = P_{\mathrm{atm}} \pm \rho g (z - z_{\mathrm{s}})$$ ♥

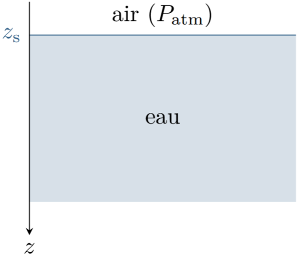
avec P_{atm} la pression de l'air au niveau de la surface du liquide et z_{s} l'altitude de la surface.

Attention : on choisira le signe $-$ si l'axe z est ascendant et $+$ s'il est descendant (comme l'exemple précédent).

Champ de pression dans un fluide au repos

Evolution de la pression avec l'altitude dans un fluide incompressible

On obtient alors **la loi de pression hydrostatique** : dans un liquide incompressible, la pression ne dépend que de la profondeur et évolue linéairement. ♥



$$P(z) = P_{\mathrm{atm}} \pm \rho g (z - z_{\mathrm{s}}) \quad ♥$$

avec P_{atm} la pression de l'air au niveau de la surface du liquide et z_{s} l'altitude de la surface.

Attention : on choisira le signe $-$ si l'axe z est ascendant et $+$ s'il est descendant (comme l'exemple précédent).

Ainsi la différence de pressions entre deux points altitudes différentes ne dépend que de la différence d'altitude $\Delta P = \pm \rho g \Delta z$.

Application 1

- Déterminer la différence de pression pour deux points avec une différence de profondeur de $10\,\mathrm{cm}$.

Application 1

- Déterminer la différence de pression pour deux points avec une différence de profondeur de $10\,\mathrm{cm}$.
- Déterminer la différence de pression entre la surface de l'océan et son point le plus profond : le fond de la fosse des Mariannes à $11\,\mathrm{km}$ sous l'eau.

Champ de pression dans un fluide au repos

Evolution de la pression avec l'altitude dans un fluide incompressible

Application 2 : l'expérience du tonneau de Blaise Pascal.

Au dessus d'un tonneau rempli d'eau et fermé, Pascal plonge un fin tube de verre de $10\,\mathrm{m}$ de long qu'il remplit d'eau.

Quelle est la valeur de la pression qui a fait rompre le tonneau ?

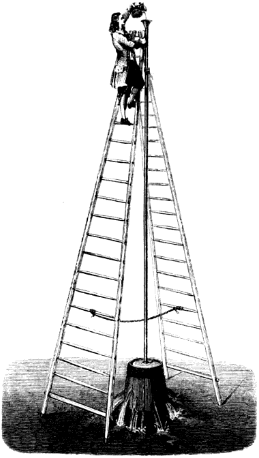


FIG. 45.—Hydrostatic paradox. Pascal's experiment.

Champ de pression dans un fluide au repos

Evolution de la pression avec l'altitude dans un fluide incompressible

Application 2 : l'expérience du tonneau de Blaise Pascal.
Au dessus d'un tonneau rempli d'eau et fermé, Pascal plonge un fin tube de verre de $10\,\mathrm{m}$ de long qu'il remplit d'eau.

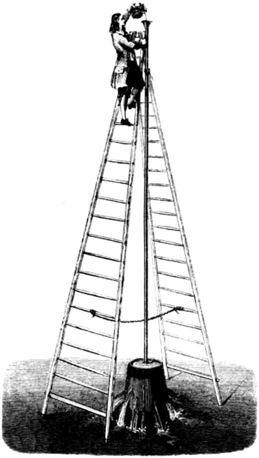


Fig. 45.—Hydrostatic paradox. Pascal's experiment.

Quelle est la valeur de la pression qui a fait rompre le tonneau ?

La pression dans le tonneau est

$$P(z) = P_{\mathrm{atm}} - \rho g \left(z - z_{\mathrm{s}}\right).$$

Soit pour $z = 0$ et $z_{\mathrm{s}} = 10\,\mathrm{m}$

$P(0) \simeq 10^5\,\mathsf{Pa} + 10^3\,\mathsf{kg}\cdot\mathsf{m}^{-3} \times 10\,\mathsf{m}\cdot\mathsf{s}^{-2} \times 10\,\mathsf{m}$
$P(0) \simeq 2 \times 10^5\,\mathsf{Pa} = 2\,\mathsf{bar}.$

Champ de pression dans un fluide au repos

Evolution de la pression avec l'altitude dans un fluide incompressible

Application 2 : l'expérience du tonneau de Blaise Pascal.

Au dessus d'un tonneau rempli d'eau et fermé, Pascal plonge un fin tube de verre de $10\,\mathrm{m}$ de long qu'il remplit d'eau.

Quelle est la valeur de la pression qui a fait rompre le tonneau ?

La pression a doublé alors que la masse d'eau ajouté est loin d'avoir doublée. **La pression est liée à la hauteur de liquide au dessus du point d'étude pas à la masse**.

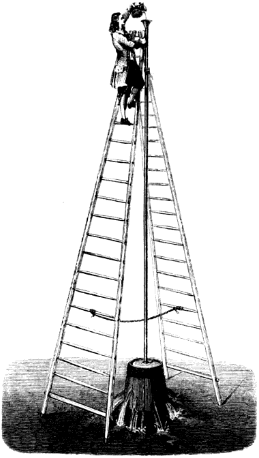
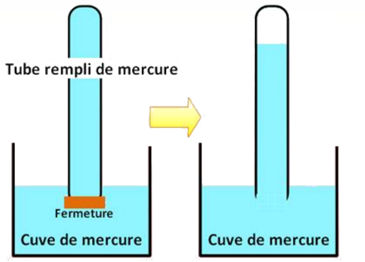


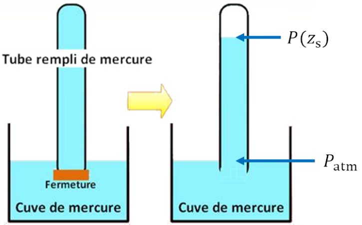
FIG. 45.—Hydrostatic paradox. Pascal's experiment.

Application 3 : l'expérience de Torricelli.
Torricelli, le secrétaire de Galilée, utilise une cuve contenant du mercure. Il retourne un tube de verre fermé de 1 m de long rempli de mercure et le plonge dans la cuve. Il ouvre alors le tube et voit le niveau de mercure baisser.

Quelle est la hauteur de mercure au dessus de la surface de la cuve ($\rho = 13{,}6 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) ?



Application 3 : l'expérience de Torricelli.



Comme il n'y a pas d'air dans le mercure, l'espace laissait vacant est vide (à peu près). D'après la RSF la pression au niveau de la surface de la cuve en $z = 0$ est donc

$$P(0) = P(z_S) - \rho g\,(z - z_S) \quad \text{soit} \quad z_S = \frac{P(0) - P(z_S)}{\rho g} + z$$

$$z_S = \frac{P_{atm} - 0}{\rho g} + 0 = \frac{P_{atm}}{\rho g} = \frac{10^5\ \text{Pa}}{13{,}6 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3} \times 10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}} = 735\ \text{mm}.$$

Le millimètre de mercure ou mmHg est une ancienne unité de pression fournie par les baromètre à mercure : leur hauteur étant proportionnelle à la pression atmosphérique.

Il est connu que la pression atmosphérique diminue en altitude. Nous allons démontrer cette observation à l'aide de la RSF en considérant que l'air est un **gaz parfait isotherme**.

D'après la RSF, il vient que

$$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -\rho(z)g$$

avec $\rho(z)$ la masse volumique de l'air qui évolue en fonction de l'altitude.

Exprimons $\rho(z)$ en fonction de $P(z)$ à partir de l'équation des gaz parfaits.

D'après l'équation des gaz parfaits appliquée à une particule fluide, il vient que

$$P(z)\mathrm{d}\tau(z) = \mathrm{d}nRT \quad \text{soit} \quad P(z) = \frac{\mathrm{d}mRT}{M\mathrm{d}\tau(z)}$$

$$\rho(z) = P(z)\frac{M}{RT}$$

avec $P(z)$ et $\mathrm{d}\tau(z)$ la pression et le volume d'une particule fluide, variant avec z ; M la masse molaire de l'air, constante, et $\mathrm{d}n$ et $\mathrm{d}m$ la quantités de matière et la masse d'une particule fluide constantes avec z.

Introduisons cette expression de $\rho(z)$ dans la RSF.

Champ de pression dans un fluide au repos

Evolution de la pression avec l'altitude pour une atmosphère isotherme

Il vient que

$$\frac{\mathrm{d}P(z)}{\mathrm{d}z} = -P(z)\frac{Mg}{RT} \quad \text{soit} \quad \int_{P(0)}^{P(z)} \frac{\mathrm{d}P(z)}{P(z)} = -\frac{Mg}{RT}\int_{z=0}^{z} \mathrm{d}z$$

$$\ln\left(\frac{P(z)}{P(0)}\right) = -\frac{Mg}{RT}z \quad \text{soit} \quad P(z) = P(0)\mathrm{e}^{-\frac{Mg}{RT}z}.$$

La grandeur $\delta = \frac{RT}{Mg}$ est la **distance caractéristique de variation** de P dans ce modèle : la distance sur laquelle P diminue d'un facteur e^{-1}, soit de 37%.

Calculer cette distance pour $T = 300\,\mathrm{K}$ et $M = 28 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$. On rappelle que $R = 8{,}314\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$.