

Leçon 16 : écoulement stationnaire d'un fluide dans une conduite

E. Capitaine

TSI 2 - Lycée Charles Coëffin

4 février 2026

Plan

- 1 Introduction
- 2 Description d'un écoulement
 - Description eulérienne
 - Écoulement stationnaire
 - Champ de vitesses d'un écoulement
- 3 Débits
 - Débit massique
 - Conservation du débit massique
 - Débit volumique
- 4 Viscosité
 - Force surfacique de viscosité
 - Fluides parfait et visqueux
 - Vitesse d'un fluide au contact d'une paroi
- 5 Théorème de Bernoulli
 - Bilan d'énergie cinétique
 - Interprétation énergétique et applications
 - Pertes de charge

Plan

1 Introduction

2 Description d'un écoulement

- Description eulérienne
- Écoulement stationnaire
- Champ de vitesses d'un écoulement

3 Débits

- Débit massique
- Conservation du débit massique
- Débit volumique

4 Viscosité

- Force surfacique de viscosité
- Fluides parfait et visqueux
- Vitesse d'un fluide au contact d'une paroi

5 Théorème de Bernoulli

- Bilan d'énergie cinétique
- Interprétation énergétique et applications
- Pertes de charge

Introduction

Cas introductif

Comment le planeur vole-t-il ?



Plan

1 Introduction

2 Description d'un écoulement

- Description eulérienne
- Écoulement stationnaire
- Champ de vitesses d'un écoulement

3 Débits

- Débit massique
- Conservation du débit massique
- Débit volumique

4 Viscosité

- Force surfacique de viscosité
- Fluides parfait et visqueux
- Vitesse d'un fluide au contact d'une paroi

5 Théorème de Bernoulli

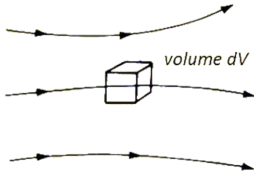
- Bilan d'énergie cinétique
- Interprétation énergétique et applications
- Pertes de charge

Description d'un écoulement

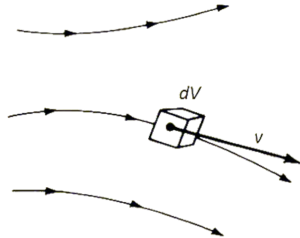
Description eulérienne

On peut adopter deux points de vue pour décrire un fluide.

Point de vue eulérien



Point de vue lagrangien



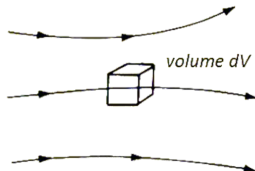
Du **point de vue eulérien**, on divise l'espace en plusieurs élément de volume dV . On étudie le passage du fluide dans ces éléments au cours du temps.

Description d'un écoulement

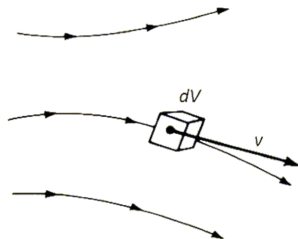
Description eulérienne

On peut adopter deux points de vue pour décrire un fluide.

Point de vue eulérien



Point de vue lagrangien



Du **point de vue lagrangien**, on divise le fluide en plusieurs particules fluides (PF) de volume dV que l'on suit selon le courant au cours du temps.

Description d'un écoulement

Description eulérienne

Afin de décrire les écoulements de fluide, nous choisissons le **point de vue eulérien**. Elle consiste à diviser l'espace en plusieurs **volumes mésoscopiques fixés** centrés sur les point M_1 , M_2 , .., M_n , etc. On enregistre alors les caractéristiques des PF qui y passent au cours du temps.



Les grandeurs physiques sont des champs dépendant des coordonnées d'espace et du temps :

Description d'un écoulement

Description eulérienne

Afin de décrire les écoulements de fluide, nous choisissons le **point de vue eulérien**. Elle consiste à diviser l'espace en plusieurs **volumes mésoscopiques fixés** centrés sur les point $M_1, M_2, \dots, M_n$, etc. On enregistre alors les caractéristiques des PF qui y passent au cours du temps.



Les grandeurs physiques sont des champs dépendant des coordonnées d'espace et du temps :

- champ des vitesses du fluides $\vec{v}(M, t)$

Description d'un écoulement

Description eulérienne

Afin de décrire les écoulements de fluide, nous choisissons le **point de vue eulérien**. Elle consiste à diviser l'espace en plusieurs **volumes mésoscopiques fixés** centrés sur les point $M_1, M_2, \dots, M_n$, etc. On enregistre alors les caractéristiques des PF qui y passent au cours du temps.



Les grandeurs physiques sont des champs dépendant des coordonnées d'espace et du temps :

- champ des vitesses du fluides $\vec{v}(M, t)$
- champ de pression $P(M, t)$

Description d'un écoulement

Description eulérienne

Afin de décrire les écoulements de fluide, nous choisissons le **point de vue eulérien**. Elle consiste à diviser l'espace en plusieurs **volumes mésoscopiques fixés** centrés sur les point $M_1, M_2, \dots, M_n$, etc. On enregistre alors les caractéristiques des PF qui y passent au cours du temps.



Les grandeurs physiques sont des champs dépendant des coordonnées d'espace et du temps :

- champ des vitesses du fluides $\vec{v}(M, t)$
- champ de pression $P(M, t)$
- champ de température $T(M, t)$

Description d'un écoulement

Description eulérienne

Afin de décrire les écoulements de fluide, nous choisissons le **point de vue eulérien**. Elle consiste à diviser l'espace en plusieurs **volumes mésoscopiques fixés** centrés sur les point $M_1, M_2, \dots, M_n$, etc. On enregistre alors les caractéristiques des PF qui y passent au cours du temps.



Les grandeurs physiques sont des champs dépendant des coordonnées d'espace et du temps :

- champ des vitesses du fluides $\vec{v}(M, t)$
- champ de pression $P(M, t)$
- champ de température $T(M, t)$
- champ de masse volumique $\rho(M, t)$

Description d'un écoulement

Description eulérienne

Afin de décrire les écoulements de fluide, nous choisissons le **point de vue eulérien**. Elle consiste à diviser l'espace en plusieurs **volumes mésoscopiques fixés** centrés sur les point $M_1, M_2, \dots, M_n$, etc. On enregistre alors les caractéristiques des PF qui y passent au cours du temps.



Les grandeurs physiques sont des champs dépendant des coordonnées d'espace et du temps :

- champ des vitesses du fluides $\vec{v}(M, t)$
- champ de pression $P(M, t)$
- champ de température $T(M, t)$
- champ de masse volumique $\rho(M, t)$
- ...

Description d'un écoulement

Écoulement stationnaire

Dans cette leçon nous nous restreindrons aux écoulements en régime permanent.

Description d'un écoulement

Écoulement stationnaire

Dans cette leçon nous nous restreindrons aux écoulements en régime permanent.

Un écoulement est dit **permanent** ou **stationnaire** si les champs eulériens sont indépendants du temps. ❤️

$$\begin{aligned}\vec{v}(M, t) &\rightarrow \vec{v}(M) & ; & & P(M, t) &\rightarrow P(M) & ; & & T(M, t) &\rightarrow T(M) \\ \rho(M, t) &\rightarrow \rho(M) & \text{etc.}\end{aligned}$$

Description d'un écoulement

Champ de vitesses d'un écoulement

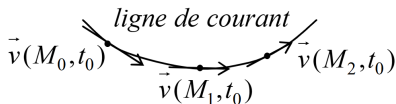
Comme on l'a fait avec les champs électrique et magnétiques, on peut représenter le champ de vitesse d'un écoulement stationnaire $\vec{v}(M)$ à l'aide d'une carte de champ.

Description d'un écoulement

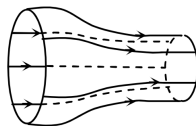
Champ de vitesses d'un écoulement

Comme on l'a fait avec les champs électrique et magnétiques, on peut représenter le champ de vitesse d'un écoulement stationnaire $\vec{v}(M)$ à l'aide d'une carte de champ.

On définit une **ligne de courant** d'un écoulement comme une ligne de champ de vitesse, soit une courbe qui en tout point M est tangente au champ de vitesse $\vec{v}(M)$. De plus, une ligne de courant est orientée dans le sens du champ de vitesses. On obtient l'équation d'une ligne de courant à partir de la relation $\vec{v}(M) \wedge d\vec{\ell} = \vec{0}$ avec $d\vec{\ell}$ l'élément différentiel de cette ligne de courant. ❤️



tube de courant

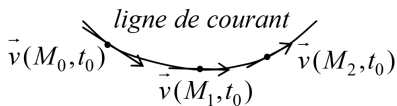


Description d'un écoulement

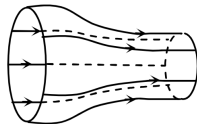
Champ de vitesses d'un écoulement

Comme on l'a fait avec les champs électrique et magnétiques, on peut représenter le champ de vitesse d'un écoulement stationnaire $\vec{v}(M)$ à l'aide d'une carte de champ.

On appelle **tube de courant** une surface fictive définie par la réunion de l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé. Le champ de vitesse est donc tangent au tube de courant en tout point du tube. ❤️



tube de courant

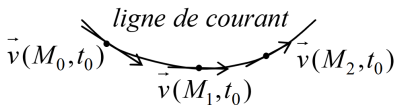


Description d'un écoulement

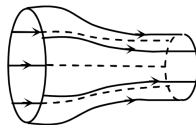
Champ de vitesses d'un écoulement

Comme on l'a fait avec les champs électrique et magnétiques, on peut représenter le champ de vitesse d'un écoulement stationnaire $\vec{v}(M)$ à l'aide d'une carte de champ.

Comme pour les champs électrique et magnétique, **la valeur du champ de vitesse** dans un zone est d'autant plus grande que les lignes de courant y sont densément représentées. Inversement, la valeur du champ de vitesses est d'autant plus faibles que les lignes dans cette zone y sont peu densément représentées.



tube de courant

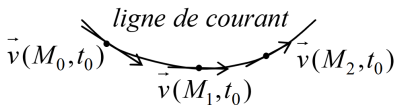


Description d'un écoulement

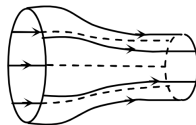
Champ de vitesses d'un écoulement

Comme on l'a fait avec les champs électrique et magnétiques, on peut représenter le champ de vitesse d'un écoulement stationnaire $\vec{v}(M)$ à l'aide d'une carte de champ.

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, **les lignes de courant sont confondues avec les trajectoires des PF**. On peut alors visualiser les lignes de courants en utilisant des traceurs : des particules (fumée, colorant, etc.) injectées dans l'écoulement.



tube de courant



Description d'un écoulement

Champ de vitesses d'un écoulement

Dans la vidéo ci-dessous on visualise l'écoulement d'air autour d'une aile d'avion. Elle est réalisée dans tunnel à fumée : des bouffées de fumée sont envoyées à intervalle régulier dans un écoulement imposé par une soufflerie. On visualise ainsi les lignes de courant (film ralenti).

how wings work? Smoke streamlines around an airfoil

Description d'un écoulement

Champ de vitesses d'un écoulement

how wings work? Smoke streamlines around an airfoil

Les vitesses sont plus importantes (lignes ressemées) au niveau de l'extrados (partie supérieure) et plus faibles (lignes distantes) au niveau de l'intrados (partie inférieure).

Plan

1 Introduction

2 Description d'un écoulement

- Description eulérienne
- Écoulement stationnaire
- Champ de vitesses d'un écoulement

3 Débits

- Débit massique
- Conservation du débit massique
- Débit volumique

4 Viscosité

- Force surfacique de viscosité
- Fluides parfait et visqueux
- Vitesse d'un fluide au contact d'une paroi

5 Théorème de Bernoulli

- Bilan d'énergie cinétique
- Interprétation énergétique et applications
- Pertes de charge

Débits

Débit massique

On appelle **débit massique** D_m au travers d'une section S la masse de fluide qui traverse S par unité de temps. Il s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Débits

Débit massique

On appelle **débit massique** D_m au travers d'une section S la masse de fluide qui traverse S par unité de temps. Il s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

On peut définir le débit massique en considérant qu'une quantité de masse infinitésimale δm traverse la section S pendant une durée infinitésimale dt avec un débit massique D_m , soit

$$\delta m = D_m dt \quad \Longleftrightarrow \quad D_m = \frac{\delta m}{dt}. \quad \text{❤}$$

Débits

Débit massique

On appelle **débit massique** D_m au travers d'une section S la masse de fluide qui traverse S par unité de temps. Il s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

On peut définir le débit massique en considérant qu'une quantité de masse infinitésimale δm traverse la section S pendant une durée infinitésimale dt avec un débit massique D_m , soit

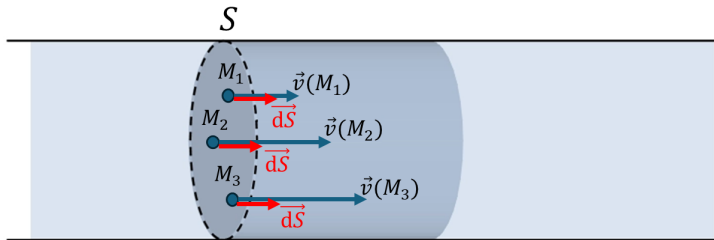
$$\delta m = D_m dt \quad \Longleftrightarrow \quad D_m = \frac{\delta m}{dt}. \quad \text{♥}$$

Pourquoi δm et pas dm ? Car on parle ici de masse qui traverse le système, ou de **quantité échangée** (analogue à δQ ou δW). Elle ne caractérise pas le système. On réserve la notation dm à une grandeur qui **caractérise un système**, comme c'est le cas pour la masse d'une PF.

Débits

Débit massique

Comment exprimer le débit massique D_m en fonction de la vitesse de l'écoulement $\vec{v}(M)$?

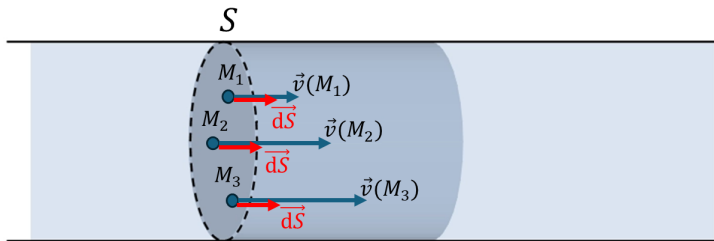


La masse δm traversant la surface S correspond à la somme de toutes les petites quantités de masses $\delta^2 m$ passant en chaque point M_1 , M_2 , etc. de la surface S , soit

Débits

Débit massique

Comment exprimer le débit massique D_m en fonction de la vitesse de l'écoulement $\vec{v}(M)$?

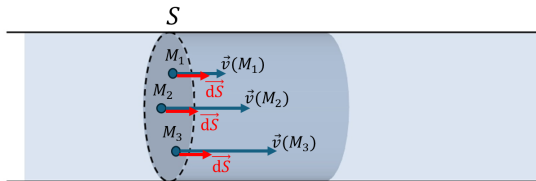


La masse δm traversant la surface S correspond à la somme de toutes les petites quantités de masses $\delta^2 m$ passant en chaque point M_1 , M_2 , etc. de la surface S , soit

$$\delta m = \sum_i \delta^2 m(M_i) \quad \Longrightarrow \quad \delta m = \iint_S \delta^2 m(M).$$

Débits

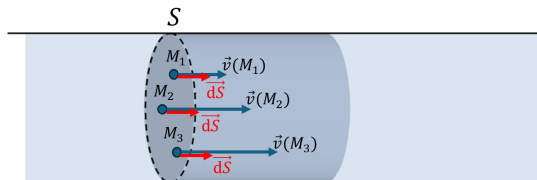
Débit massique



On exprime les petites quantités de masses $\delta^2 m(M)$ à partir de la masse volumique du fluide

Débits

Débit massique



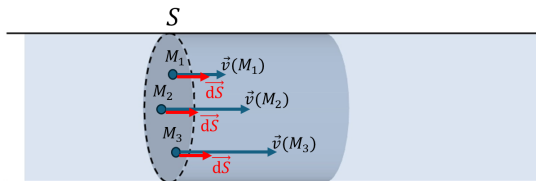
On exprime les petites quantités de masses $\delta^2 m(M)$ à partir de la masse volumique du fluide

$$\delta^2 m = \rho(M) d^2 \tau(M)$$

avec $d^2 \tau(M)$ le volume occupé par la masse $\delta^2(M)$ au point M .

Débits

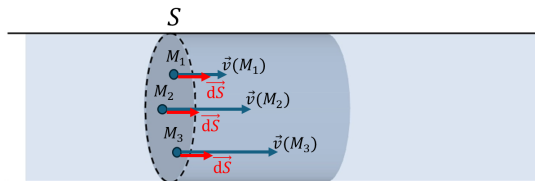
Débit massique



Ce volume $d^2\tau(M)$ correspond au produit scalaire entre l'élément de surface orientée $d\vec{S}(M)$ en M , et $d\vec{\ell}(M) = \vec{v}(M)dt$ l'élément différentiel de la trajectoire de la masse

Débits

Débit massique

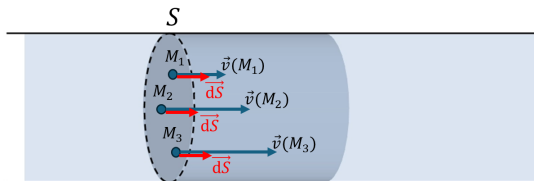


Ce volume $d^2\tau(M)$ correspond au produit scalaire entre l'élément de surface orientée $\vec{dS}(M)$ en M , et $\vec{d\ell}(M) = \vec{v}(M)dt$ l'élément différentiel de la trajectoire de la masse

$$\delta^2 m = \rho(M)d^2\tau(M) = \rho(M)\vec{v}(M) \cdot \vec{dS}(M)dt.$$

Débits

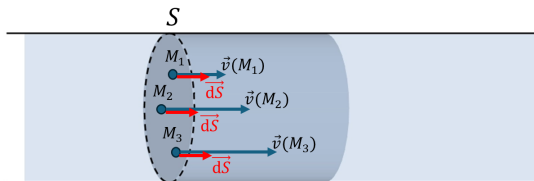
Débit massique



Ainsi la quantité de masse totale traversant S est

Débits

Débit massique

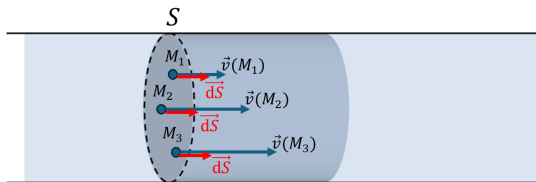


Ainsi la quantité de masse totale traversant S est

$$\delta m = \iint_S \delta^2 m(M) = \iint_S \rho(M) \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M) dt.$$

Débits

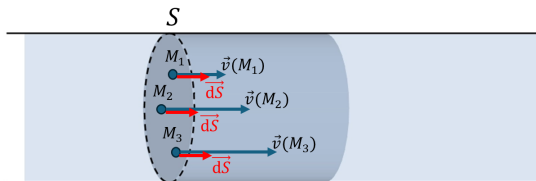
Débit massique



D'après la définition du débit massique D_m il vient que

Débits

Débit massique

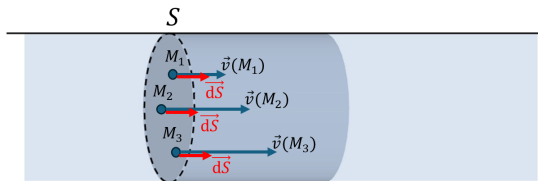


D'après la définition du débit massique D_m il vient que

$$D_m = \frac{\delta m}{dt} \quad ; \quad D_m = \iint_S \rho(M) \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M). \quad \heartsuit$$

Débits

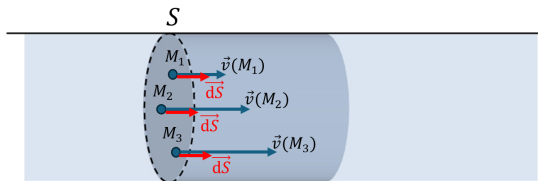
Débit massique



Par analogie avec le vecteur de densité de courant électrique $\vec{j}(M)$, on peut définir le **vecteur densité de courant de masse**

Débits

Débit massique



Par analogie avec le vecteur de densité de courant électrique $\vec{j}(M)$, on peut définir le **vecteur densité de courant de masse**

$$\vec{j}_{\text{masse}} = \rho \vec{v} \quad ; \quad D_m = \iint_S \vec{j}_{\text{masse}} \cdot d\vec{S}(M). \quad \text{❤}$$

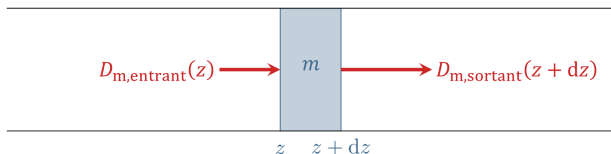
Le débit massique apparaît comme le flux du vecteur densité de courant de masse au travers de la surface S .

Débits

Conservation du débit massique

De la même manière qu'on l'a fait pour obtenir l'équation de conservation de la charge, nous allons faire le **bilan de la masse** m dans un petit volume de contrôle $d\tau$ durant une durée infinitésimale dt .

Considérons une conduite cylindrique de section S et d'axe (Oz) parcouru par un écoulement de débit massique D_v uniforme sur toute la section.



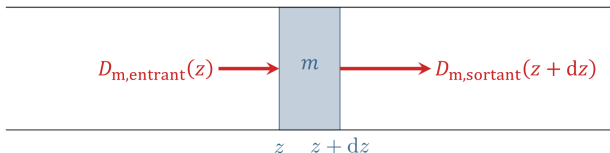
Nous allons utiliser **la méthode de bilan** que l'on a appliqué aux charges électriques, mais cette fois pour la masse dans le système.

Débits

Conservation du débit massique

On veut savoir quelle est la masse $m(t + dt)$ dans le volume de contrôle $d\tau$ après la durée d'étude dt

$$m(t + dt) = \quad + \quad - \quad .$$

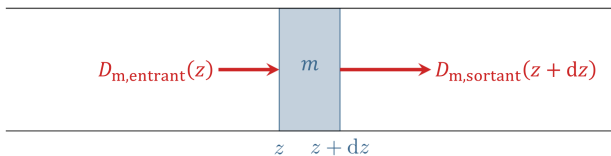


Débits

Conservation du débit massique

On veut savoir quelle est la masse $m(t + dt)$ dans le volume de contrôle $d\tau$ après la durée d'étude dt

$$m(t + dt) = m(t) + \quad - \quad .$$



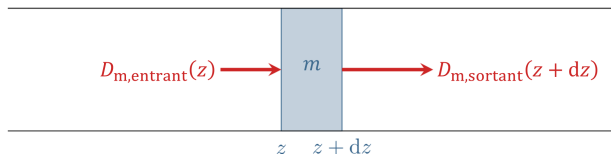
Cette masse $m(t + dt)$ dépend d'abord de la masse initiale au début de l'étude, soit $m(t)$.

Débits

Conservation du débit massique

On veut savoir quelle est la masse $m(t + dt)$ dans le volume de contrôle $d\tau$ après la durée d'étude dt

$$m(t + dt) = m(t) + \delta m_{\text{entrant}} - \quad .$$



Puis elle dépend de la quantité de masse entrante au cours de la durée dt , telle que

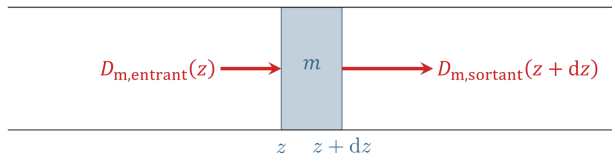
$$\delta m_{\text{entrant}} = D_{m,\text{entrant}}(z)dt.$$

Débits

Conservation du débit massique

On veut savoir quelle est la masse $m(t + dt)$ dans le volume de contrôle $d\tau$ après la durée d'étude dt

$$m(t + dt) = m(t) + \delta m_{\text{entrant}} - \delta m_{\text{sortant}}.$$



Et enfin elle dépend de la quantité de masse sortante au cours de la durée dt , telle que

$$\delta m_{\text{sortant}} = D_{m,\text{sortant}}(z + dz)dt.$$

Débits

Conservation du débit massique

On obtient l'équation bilan

$$m(t + dt) = m(t) + D_{\text{m,entrant}}(z)dt - D_{\text{m,sortant}}(z + dz)dt.$$

Débits

Conservation du débit massique

On obtient l'équation bilan

$$m(t + dt) = m(t) + D_{\text{m,entrant}}(z)dt - D_{\text{m,sortant}}(z + dz)dt.$$

$$\frac{m(t + dt) - m(t)}{dt} = D_{\text{m,entrant}}(z) - D_{\text{m,sortant}}(z + dz).$$

Débits

Conservation du débit massique

À l'ordre 1, le taux d'accroissement correspond à une dérivée

$$\frac{m(t + dt) - m(t)}{dt} = D_{\text{m,entrant}}(z) - D_{\text{m,sortant}}(z + dz).$$

Débits

Conservation du débit massique

À l'ordre 1, le taux d'accroissement correspond à une dérivée

$$\frac{m(t + dt) - m(t)}{dt} = D_{m,entrant}(z) - D_{m,sortant}(z + dz).$$
$$\frac{dm(t)}{dt} = D_{m,entrant}(z) - D_{m,sortant}(z + dz).$$

Or, en régime permanent (ou stationnaire) toutes les grandeurs caractéristiques d'un système sont constantes dans le temps, soit $\frac{dm(t)}{dt} = 0$.

Débits

Conservation du débit massique

Il vient que

$$\begin{aligned}D_{m,\text{entrant}}(z) - D_{m,\text{sortant}}(z + dz) &= 0 \\D_{m,\text{entrant}}(z) &= D_{m,\text{sortant}}(z + dz) = \text{cst.}\end{aligned}$$

Il y a **conservation du débit massique** le long d'une ligne de courant en régime stationnaire. 

Exemple : un seau troué sous un robinet. La masse d'eau dans le seau reste constante, soit $\frac{dm}{dt} = 0$, si le débit entrant du robinet $D_{m,\text{entrant}}$ est égale au débit sortant du trou $D_{m,\text{sortant}}$.

Débits

Débit volumique

On appelle **débit volumique** D_v au travers d'une section S le volume de fluide qui traverse S par unité de temps. Il s'exprime en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Débits

Débit volumique

On appelle **débit volumique** D_v au travers d'une section S le volume de fluide qui traverse S par unité de temps. Il s'exprime en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

On peut définir le débit volumique en considérant qu'une quantité de volume infinitésimale $\delta\tau$ traverse la section S pendant une durée infinitésimale dt avec un débit massique D_v , soit

$$\delta\tau = D_v dt \quad \Longleftrightarrow \quad D_v = \frac{\delta\tau}{dt}. \quad \text{♥}$$

Débits

Débit volumique

On appelle **débit volumique** D_v au travers d'une section S le volume de fluide qui traverse S par unité de temps. Il s'exprime en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

On peut définir le débit volumique en considérant qu'une quantité de volume infinitésimale $\delta\tau$ traverse la section S pendant une durée infinitésimale dt avec un débit massique D_v , soit

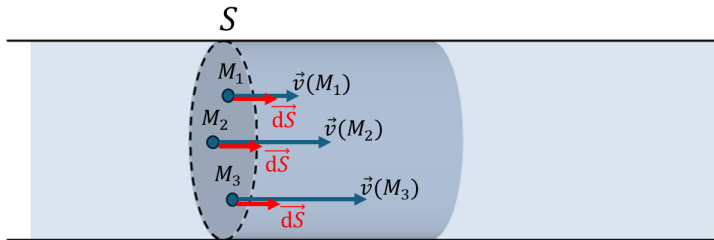
$$\delta\tau = D_v dt \quad \Longleftrightarrow \quad D_v = \frac{\delta\tau}{dt}. \quad \text{♥}$$

Pourquoi $\delta\tau$ et pas $d\tau$? Car on parle ici de volume qui traverse le système, ou de **quantité échangée** (analogue à δQ ou δW). Elle ne caractérise pas le système. On réserve la notation $d\tau$ à une grandeur qui **caractérise un système**, comme c'est le cas pour la masse d'une PF.

Débits

Débit volumique

Comment exprimer le débit volumique D_v en fonction de la vitesse de l'écoulement $\vec{v}(M)$?

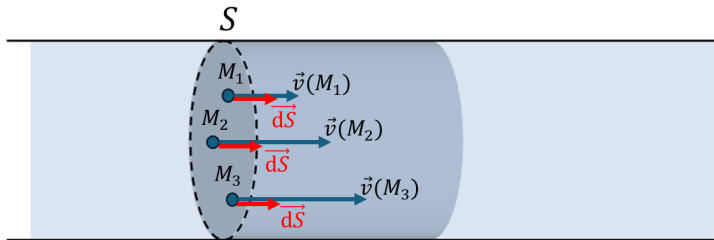


Le volume $\delta\tau$ traversant la surface S correspond à la somme de toutes les petites quantités de volume $\delta^2\tau$ passant en chaque point M_1 , M_2 , etc. de la surface S , soit

Débits

Débit volumique

Comment exprimer le débit volumique D_v en fonction de la vitesse de l'écoulement $\vec{v}(M)$?

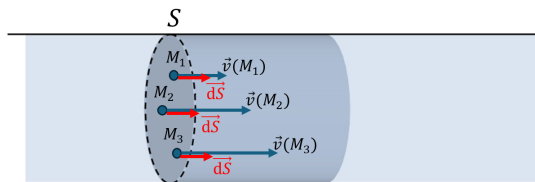


Le volume $\delta\tau$ traversant la surface S correspond à la somme de toutes les petites quantités de volume $\delta^2\tau$ passant en chaque point M_1 , M_2 , etc. de la surface S , soit

$$\delta\tau = \sum_i \delta^2\tau(M_i) \quad \Longrightarrow \quad \delta\tau = \iint_S \delta^2\tau(M).$$

Débits

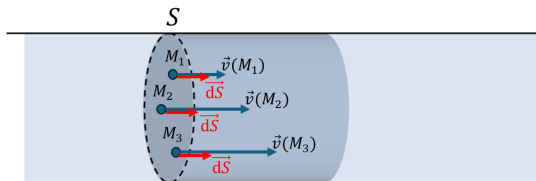
Débit volumique



Comme on l'a vu ce volume $d^2\tau(M)$ correspond au produit scalaire entre l'élément de surface orientée $\vec{dS}(M)$ en M , et $d\vec{\ell}(M) = \vec{v}(M)dt$ l'élément différentiel de la trajectoire de la masse

Débits

Débit volumique

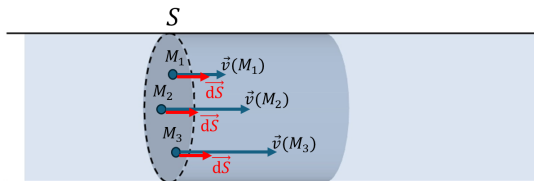


Comme on l'a vu ce volume $d^2\tau(M)$ correspond au produit scalaire entre l'élément de surface orientée $\vec{dS}(M)$ en M , et $\vec{d\ell}(M) = \vec{v}(M)dt$ l'élément différentiel de la trajectoire de la masse

$$\delta^2\tau = d^2\tau(M) = \vec{v}(M) \cdot \vec{dS}(M)dt.$$

Débits

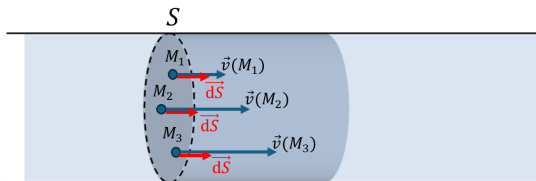
Débit volumique



Ainsi la quantité de volume totale traversant S est

Débits

Débit volumique

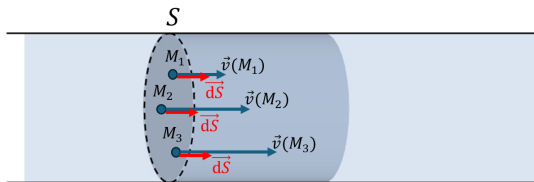


Ainsi la quantité de volume totale traversant S est

$$\delta\tau = \iint_S \delta^2\tau(M) = \iint_S \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M) dt.$$

Débits

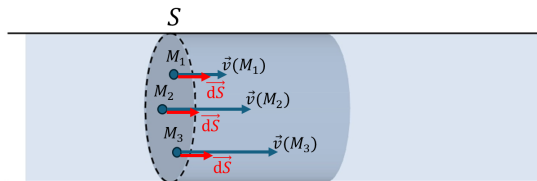
Débit volumique



D'après la définition du débit volumique D_v il vient que

Débits

Débit volumique



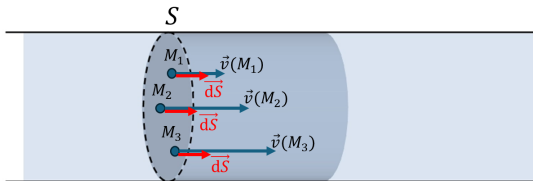
D'après la définition du débit volumique D_v il vient que

$$D_v = \frac{\delta\tau}{dt} \quad ; \quad D_v = \iint_S \vec{v}(M) \cdot \vec{dS}(M).$$



Débits

Débit volumique

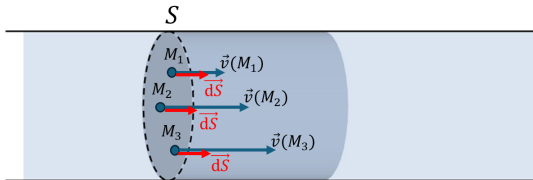


On définit la **vitesse débitante** V comme la vitesse moyenne du fluide sur une section S de la conduite. ❤️

Il vient que

Débits

Débit volumique



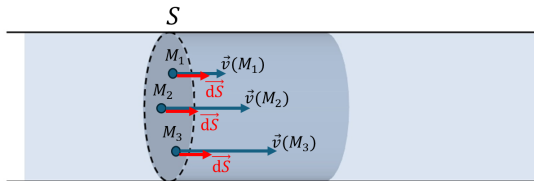
On définit la **vitesse débitante** V comme la vitesse moyenne du fluide sur une section S de la conduite. ❤️

Il vient que

$$V = \frac{1}{S} \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \frac{D_v}{S}. \quad \text{❤️}$$

Débits

Débit volumique



On peut faire le lien entre débit massique et débit volumique dans le cas des **écoulements incompressibles**.

On a vu les définitions des deux débits

Débits

Débit volumique

On peut faire le lien entre débit massique et débit volumique dans le cas des **écoulements incompressibles**.

On a vu les définitions des deux débits

$$D_m = \iint_S \rho(M) \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M) \quad \text{et} \quad D_v = \iint_S \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M).$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible

Débits

Débit volumique

On peut faire le lien entre débit massique et débit volumique dans le cas des **écoulements incompressibles**.

On a vu les définitions des deux débits

$$D_m = \iint_S \rho(M) \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M) \quad \text{et} \quad D_v = \iint_S \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M).$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible la masse volumique est constante dans le temps et dans l'espace, ainsi $\rho(M) = \rho$, soit

Débits

Débit volumique

On peut faire le lien entre débit massique et débit volumique dans le cas des **écoulements incompressibles**.

On a vu les définitions des deux débits

$$D_m = \iint_S \rho(M) \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M) \quad \text{et} \quad D_v = \iint_S \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M).$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible la masse volumique est constante dans le temps et dans l'espace, ainsi $\rho(M) = \rho$, soit

$$D_m = \rho \iint_S \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \rho D_v. \text{❤}$$

Débits

Débit volumique

On peut faire le lien entre débit massique et débit volumique dans le cas des **écoulements incompressibles**.

On a vu les définitions des deux débits

$$D_m = \iint_S \rho(M) \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M) \quad \text{et} \quad D_v = \iint_S \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M).$$

Dans le cas d'un écoulement incompressible la masse volumique est constante dans le temps et dans l'espace, ainsi $\rho(M) = \rho$, soit

$$D_m = \rho \iint_S \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \rho D_v. \text{♥}$$

Si l'écoulement est **stationnaire et incompressible**, alors il y a aussi conservation du débit volumique

$$D_m = \text{cst} \quad \text{donc} \quad D_v = \text{cst}.$$

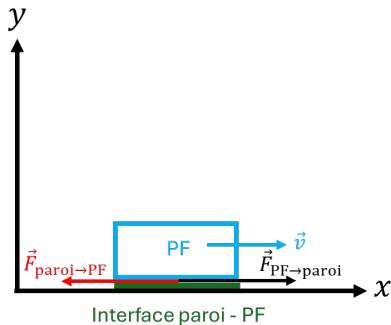
Plan

- 1 Introduction
- 2 Description d'un écoulement
 - Description eulérienne
 - Écoulement stationnaire
 - Champ de vitesses d'un écoulement
- 3 Débits
 - Débit massique
 - Conservation du débit massique
 - Débit volumique
- 4 Viscosité
 - Force surfacique de viscosité
 - Fluides parfait et visqueux
 - Vitesse d'un fluide au contact d'une paroi
- 5 Théorème de Bernoulli
 - Bilan d'énergie cinétique
 - Interprétation énergétique et applications
 - Pertes de charge

Viscosité

Force surfacique de viscosité

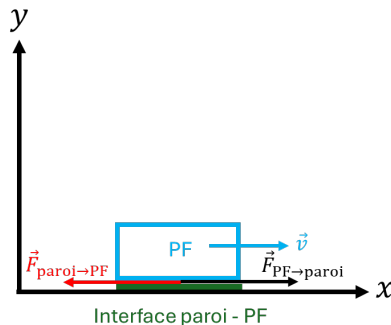
Considérons un écoulement unidirectionnel selon l'axe Ox . Du fait des frottements entre la paroi et la particule de fluide juste au dessus, la paroi exerce une force opposé au mouvement de la PF, soit



Viscosité

Force surfacique de viscosité

Considérons un écoulement unidirectionnel selon l'axe Ox . Du fait des frottements entre la paroi et la particule de fluide juste au dessus, la paroi exerce une force opposé au mouvement de la PF, soit



$$\vec{F}_{\text{paroi} \rightarrow \text{PF}} = -F\vec{u}_x.$$

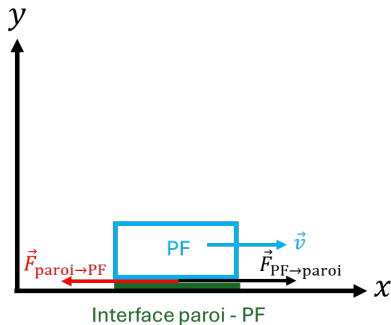
D'après la loi des actions réciproques, on peut considérer que la PF applique une force sur l'interface juste en dessous d'elle qui est dirigée selon les $x > 0$, soit

$$\vec{F}_{\text{PF} \rightarrow \text{paroi}} = F\vec{u}_x.$$

Viscosité

Force surfacique de viscosité

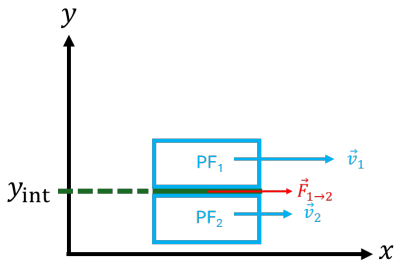
On retrouve la direction et le sens de la force surfacique tangentielle exercée par un PF sur une interface nommée **force visqueuse** : elle est dirigée selon la direction et le sens de la vitesse de la PF.



Viscosité

Force surfacique de viscosité

On peut montrer que cette force est proportionnelle au **gradient de vitesse** de l'écoulement au niveau de l'interface entre une PF et un solide, ou une PF et une autre PF, et de **la surface S de l'interface**.



Par exemple le gradient de vitesse présenté ci-dessus est positif

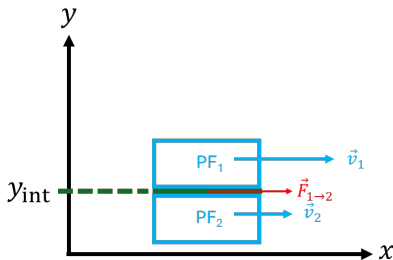
$$\left(\frac{dv_x(y)}{dy} \right)_{y_{\text{int}}} > 0.$$

La vitesse est orientée selon x mais sa valeur augmente avec l'altitude y .

Viscosité

Force surfacique de viscosité

Le coefficient de proportionnalité entre la force et le gradient de vitesse est appelé **viscosité dynamique** notée η . ❤️



Dans le cas de la force exercée par la PF₁ sur la PF₂ on peut écrire

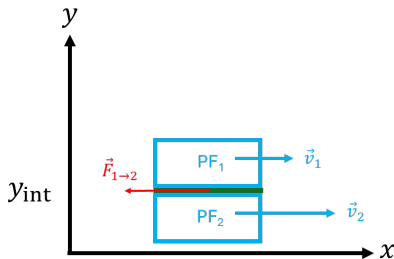
$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \eta \left(\frac{dv_x(y)}{dy} \right)_{y_{\text{int}}} dS \vec{u}_x. \quad \text{❤️}$$

Comme le gradient de vitesse, aussi appelé **taux de cisaillement**, est positif, la force est orientée vers les $x > 0$: **la PF la plus rapide tire la PF la moins rapide dans le sens de son déplacement.** ❤️

Viscosité

Force surfacique de viscosité

Prenons le cas inverse : la PF_1 est plus lente que la PF_2 . Dans ce cas le **taux de cisaillement** est négatif : la vitesse diminue lorsque y augmente.



Dans le cas de la force exercée par la PF_1 sur la PF_2 s'écrit toujours

$$d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \eta \left(\frac{dv_x(y)}{dy} \right)_{y_{\text{int}}} dS \vec{u}_x.$$

Comme le gradient de vitesse $\left(\frac{dv_x(y)}{dy} \right)_{y_{\text{int}}}$ est négatif, la force est orientée vers les $x < 0$: **la PF la moins rapide ralentit la PF la plus rapide.** ❤️

Viscosité

Force surfacique de viscosité

On peut obtenir l'unité de la **viscosité dynamique** à partir d'une étude dimensionnelle

Viscosité

Force surfacique de viscosité

On peut obtenir l'unité de la **viscosité dynamique** à partir d'une étude dimensionnelle

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \eta \left(\frac{dv_x(y)}{dy} \right)_{y_{\text{int}}} dS \vec{u}_x$$

$$N = [\eta] \frac{m \cdot s^{-1}}{m} \times m^2 = [\eta] \frac{m^2}{s}$$

$$[\eta] = N \cdot m^{-2} \cdot s = Pa \cdot s.$$

La viscosité dynamique η s'exprime donc en $Pa \cdot s$ qu'on nomme encore **poiseuille** notée Pl et tel que $1 Pl = Pa \cdot s$, en l'honneur du physicien et médecin français Jean-Léonard-Marie Poiseuille.

Viscosité

Force surfacique de viscosité

Afin d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de la viscosité dynamique, voici les valeurs de cette dernière pour différents fluides

- air à 0°C et 1 bar : $\eta = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- eau à 20°C et 1 bar : $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- huile de moteur : $\eta \simeq 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- miel : $\eta \simeq 10 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Viscosité

Force surfacique de viscosité

Afin d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de la viscosité dynamique, voici les valeurs de cette dernière pour différents fluides

- air à 0 °C et 1 bar : $\eta = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- eau à 20 °C et 1 bar : $\eta = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- huile de moteur : $\eta \simeq 0,1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$
- miel : $\eta \simeq 10 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

On peut également utiliser la **viscosité cinématique** notée ν et définie telle que

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \text{♥}$$

avec ρ la masse volumique du fluide. On peut montrer que son unité est telle que $\frac{\text{Pa} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Viscosité

Fluides parfait et visqueux

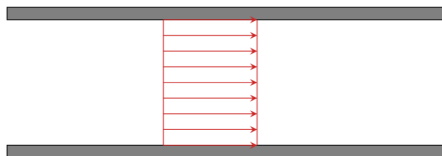
On appelle **fluide parfait** un fluide pour lequel $\eta = 0$. Il s'agit d'un cas limite théorique, qui n'existe pas en pratique. ❤️

Viscosité

Fluides parfait et visqueux

On appelle **fluide parfait** un fluide pour lequel $\eta = 0$. Il s'agit d'un cas limite théorique, qui n'existe pas en pratique. ❤️

Dans le cas d'un fluide parfait, il n'y a pas de gradient de vitesse : la valeur de vitesse est constante dans la direction perpendiculaire à l'écoulement. On parle de **profil de vitesses uniforme**, impossible à atteindre en pratique mais utile pour certaines approximations. ❤️



Viscosité

Fluides parfait et visqueux

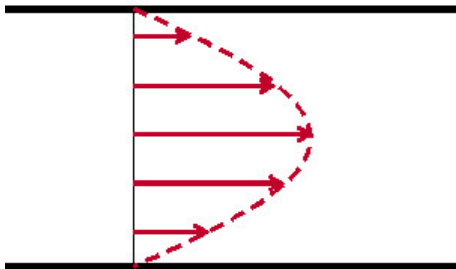
On appelle **fluide visqueux** ou **fluide newtonien** un fluide qui présente des pertes par frottements lors de l'écoulement. Ces forces de frottements ou forces visqueuses sont associées à des **mécanismes irréversibles** créateurs d'entropie et à une **dissipation d'énergie** sous forme thermique. ❤️

Viscosité

Fluides parfait et visqueux

On appelle **fluide visqueux** ou **fluide newtonien** un fluide qui présente des pertes par frottements lors de l'écoulement. Ces forces de frottements ou forces visqueuses sont associées à des **mécanismes irréversibles** créateurs d'entropie et à une **dissipation d'énergie** sous forme thermique. ❤️

Dans le cas d'un fluide newtonien s'écoulant dans une conduite, il y a un gradient de vitesse. On parle de **profil de vitesses non uniforme**



Viscosité

Vitesse d'un fluide au contact d'une paroi

Considérons un fluide s'écoulant dans une conduite. Comme le fluide ne peut pas traverser les parois, en tout point P d'une paroi de normale $\vec{n}$, **la vitesse du fluide est tangente à la paroi**

$$\vec{v}(P) \cdot \vec{n} = 0.$$



Viscosité

Vitesse d'un fluide au contact d'une paroi

Considérons un fluide s'écoulant dans une conduite. Comme le fluide ne peut pas traverser les parois, en tout point P d'une paroi de normale $\vec{n}$, **la vitesse du fluide est tangente à la paroi**

$$\vec{v}(P) \cdot \vec{n} = 0.$$



De plus, si le **fluide est visqueux**, la force visqueuse exercée par le fluide sur la paroi doit rester finie, c'est-à-dire que le gradient de vitesse doit être fini, c'est-à-dire qu'il y a **continuité de la vitesse du fluide à la paroi** : en tout point P d'une paroi, **la vitesse d'un fluide visqueux est égale à la vitesse de la paroi**

$$\vec{v}(P) = \vec{V}_{\text{paroi}}.$$



Cela n'est pas valable pour fluide parfait.

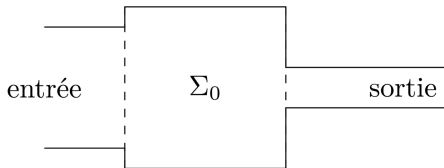
Plan

- 1 Introduction
- 2 Description d'un écoulement
 - Description eulérienne
 - Écoulement stationnaire
 - Champ de vitesses d'un écoulement
- 3 Débits
 - Débit massique
 - Conservation du débit massique
 - Débit volumique
- 4 Viscosité
 - Force surfacique de viscosité
 - Fluides parfait et visqueux
 - Vitesse d'un fluide au contact d'une paroi
- 5 Théorème de Bernoulli
 - Bilan d'énergie cinétique
 - Interprétation énergétique et applications
 - Pertes de charge

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

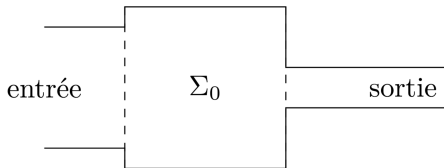
On considère un fluide en écoulement **stationnaire, incompressible et parfait** dans une conduite. Comme nous l'avons fait auparavant, nous allons établir une **surface de contrôle** Σ_0 délimitant le système pour lequel nous allons faire le **bilan d'énergie cinétique**.



Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

On considère un fluide en écoulement **stationnaire, incompressible et parfait** dans une conduite. Comme nous l'avons fait auparavant, nous allons établir une **surface de contrôle** Σ_0 délimitant le système pour lequel nous allons faire le **bilan d'énergie cinétique**.



Problème : Σ_0 délimite un **système ouvert**, son énergie peut donc varier car il échange de la matière (qui entre à l'entrée et sort à la sortie...). Or, tous les **théorèmes énergétiques** que nous avons utilisés jusqu'à présent ne s'appliquent qu'à des **systèmes fermés** !

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Solution : nous allons effectivement étudier un **système fermé** en étudiant **les mêmes PF** passant par Σ_0 à t mais aussi à $t + dt$. Pour cela, il faut en fait étudier un système un peu plus grand que Σ_0 .

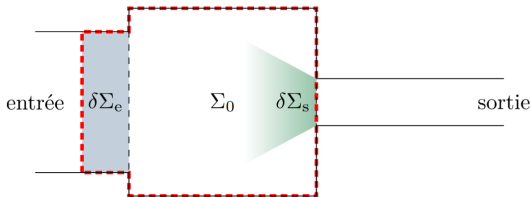
Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Solution : nous allons effectivement étudier un **système fermé** en étudiant **les mêmes PF** passant par Σ_0 à t mais aussi à $t + dt$. Pour cela, il faut en fait étudier un système un peu plus grand que Σ_0 .

À l'instant initial de l'étude t , nous considérons les PF dans Σ_0 , noté $\Sigma_0(t)$ **ainsi que les PF de la petite part de fluide qui va entrer dans Σ_0 durant dt** notée $\delta\Sigma_e$. Le système totale à t est donc

$$\Sigma_{\text{tot}}(t) = \Sigma_0(t) + \delta\Sigma_e.$$



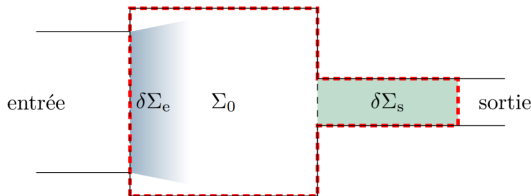
Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Solution : nous allons effectivement étudier un **système fermé** en étudiant **les mêmes PF** passant par Σ_0 à t mais aussi à $t + dt$. Pour cela, il faut en fait étudier un système un peu plus grand que Σ_0 .

À l'instant final de l'étude $t + dt$, nous étudions les mêmes PF que précédemment : les PF de $\delta\Sigma_e$ sont maintenant dans Σ_0 et **une petite partie des PF qui étaient dans Σ_0 sont sorties de Σ_0 durant dt** pour former le système $\delta\Sigma_s$, soit

$$\Sigma_{\text{tot}}(t + dt) = \Sigma_0(t + dt) + \delta\Sigma_s.$$



Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Solution : nous allons effectivement étudier un **système fermé** en étudiant **les mêmes PF** passant par Σ_0 à t mais aussi à $t + dt$. Pour cela, il faut en fait étudier un système un peu plus grand que Σ_0 .

Au final le système Σ_{tot} est bien un **système fermé** car on n'étudie les mêmes PF à t et $t + dt$: on peut appliquer les **théorèmes énergétiques** à Σ_{tot} .

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Appliquons le **théorème de l'énergie cinétique** au système entre les instants t et $t + dt$.

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Appliquons le **théorème de l'énergie cinétique** au système entre les instants t et $t + dt$.

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = E_c(\Sigma_{\text{tot}}(t + dt)) - E_c(\Sigma_{\text{tot}}(t)) = \sum_i \delta W(\vec{F}_i)$$

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Appliquons le **théorème de l'énergie cinétique** au système entre les instants t et $t + dt$.

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = E_c(\Sigma_{\text{tot}}(t + dt)) - E_c(\Sigma_{\text{tot}}(t)) = \sum_i \delta W(\vec{F}_i)$$

$$E_c(\Sigma_0(t + dt)) + E_c(\delta\Sigma_s) - E_c(\Sigma_0(t)) - E_c(\delta\Sigma_e) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P) + \delta W(\vec{F}_{\text{vis}}).$$

On peut simplifier la relation précédente car :

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Appliquons le **théorème de l'énergie cinétique** au système entre les instants t et $t + dt$.

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = E_c(\Sigma_{\text{tot}}(t + dt)) - E_c(\Sigma_{\text{tot}}(t)) = \sum_i \delta W(\vec{F}_i)$$

$$E_c(\Sigma_0(t + dt)) + E_c(\delta\Sigma_s) - E_c(\Sigma_0(t)) - E_c(\delta\Sigma_e) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P) + \delta W(\vec{F}_{\text{vis}}).$$

On peut simplifier la relation précédente car :

- le fluide est parfait donc $\eta = 0$ donc $\vec{F}_{\text{vis}} = \vec{0}$

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Appliquons le **théorème de l'énergie cinétique** au système entre les instants t et $t + dt$.

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = E_c(\Sigma_{\text{tot}}(t + dt)) - E_c(\Sigma_{\text{tot}}(t)) = \sum_i \delta W(\vec{F}_i)$$

$$E_c(\Sigma_0(t + dt)) + E_c(\delta\Sigma_s) - E_c(\Sigma_0(t)) - E_c(\delta\Sigma_e) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P) + \delta W(\vec{F}_{\text{vis}}).$$

On peut simplifier la relation précédente car :

- le fluide est parfait donc $\eta = 0$ donc $\vec{F}_{\text{vis}} = \vec{0}$
- l'écoulement est stationnaire donc $E_c(\Sigma_0(t + dt)) = E_c(\Sigma_0(t))$.

Ainsi

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Appliquons le **théorème de l'énergie cinétique** au système entre les instants t et $t + dt$.

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = E_c(\Sigma_{\text{tot}}(t + dt)) - E_c(\Sigma_{\text{tot}}(t)) = \sum_i \delta W(\vec{F}_i)$$

$$E_c(\Sigma_0(t + dt)) + E_c(\delta\Sigma_s) - E_c(\Sigma_0(t)) - E_c(\delta\Sigma_e) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P) + \delta W(\vec{F}_{\text{vis}}).$$

On peut simplifier la relation précédente car :

- le fluide est parfait donc $\eta = 0$ donc $\vec{F}_{\text{vis}} = \vec{0}$
- l'écoulement est stationnaire donc $E_c(\Sigma_0(t + dt)) = E_c(\Sigma_0(t))$.

Ainsi

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = E_c(\delta\Sigma_s) - E_c(\delta\Sigma_e) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P).$$

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = E_c(\delta\Sigma_s) - E_c(\delta\Sigma_e) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P).$$

Exprimons l'énergie cinétique des deux systèmes entrant et sortant

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = E_c(\delta\Sigma_s) - E_c(\delta\Sigma_e) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P).$$

Exprimons l'énergie cinétique des deux systèmes entrant et sortant

$$E_c(\delta\Sigma_e) = \frac{1}{2}\delta m_e v_e^2 \quad \text{et} \quad E_c(\delta\Sigma_s) = \frac{1}{2}\delta m_s v_s^2.$$

Comparons les deux masses transférées δm_e et δm_s à partir des débits massiques

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = E_c(\delta\Sigma_s) - E_c(\delta\Sigma_e) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P).$$

Exprimons l'énergie cinétique des deux systèmes entrant et sortant

$$E_c(\delta\Sigma_e) = \frac{1}{2}\delta m_e v_e^2 \quad \text{et} \quad E_c(\delta\Sigma_s) = \frac{1}{2}\delta m_s v_s^2.$$

Comparons les deux masses transférées δm_e et δm_s à partir des débits massiques

$$\delta m_e = D_{m,e} dt \quad \text{et} \quad \delta m_s = D_{m,s} dt.$$

Comme **le débit massique se conserve** pour un **écoulement stationnaire** il vient que

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = E_c(\delta\Sigma_s) - E_c(\delta\Sigma_e) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P).$$

Exprimons l'énergie cinétique des deux systèmes entrant et sortant

$$E_c(\delta\Sigma_e) = \frac{1}{2}\delta m_e v_e^2 \quad \text{et} \quad E_c(\delta\Sigma_s) = \frac{1}{2}\delta m_s v_s^2.$$

Comparons les deux masses transférées δm_e et δm_s à partir des débits massiques

$$\delta m_e = D_{m,e} dt \quad \text{et} \quad \delta m_s = D_{m,s} dt.$$

Comme **le débit massique se conserve** pour un **écoulement stationnaire** il vient que

$$D_{m,e} = D_{m,s} \equiv D_m \quad \Longleftrightarrow \quad \delta m_e = \delta m_s \equiv \delta m.$$

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

$$\text{Ainsi } dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = \frac{1}{2}\delta m (v_s^2 - v_e^2) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P)$$

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = \frac{1}{2}D_m dt (v_s^2 - v_e^2) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P)$$

Concernant le travail élémentaire de la force de pesanteur, on sait que

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

$$\text{Ainsi } dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = \frac{1}{2} \delta m (v_s^2 - v_e^2) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P)$$

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = \frac{1}{2} D_m dt (v_s^2 - v_e^2) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P)$$

Concernant le travail élémentaire de la force de pesanteur, on sait que

$$\delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) = -dE_p(\Sigma_{\text{tot}}).$$

Comme on l'a montré pour la différentielle d'énergie cinétique, on peut écrire

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

$$\text{Ainsi } dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = \frac{1}{2}\delta m (v_s^2 - v_e^2) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P)$$

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) = \frac{1}{2}D_m dt (v_s^2 - v_e^2) = \delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) + \delta W(\vec{F}_P)$$

Concernant le travail élémentaire de la force de pesanteur, on sait que

$$\delta W(\vec{F}_{\text{pes}}) = -dE_p(\Sigma_{\text{tot}}).$$

Comme on l'a montré pour la différentielle d'énergie cinétique, on peut écrire

$$dE_p(\Sigma_{\text{tot}}) = E_p(\Sigma_{\text{tot}}(t + dt)) - E_p(\Sigma_{\text{tot}}(t))$$

$$dE_p(\Sigma_{\text{tot}}) = E_p(\Sigma_0(t + dt)) + E_p(\delta\Sigma_s) - E_p(\Sigma_0(t)) - E_p(\delta\Sigma_e)$$

$$dE_p(\Sigma_{\text{tot}}) = E_p(\delta\Sigma_s) - E_p(\delta\Sigma_e)$$

$$dE_p(\Sigma_{\text{tot}}) = \delta mg(z_s - z_e) = D_m dt g(z_s - z_e).$$

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Ainsi

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) + dE_p(\Sigma_{\text{tot}}) = \frac{1}{2}D_m dt (v_s^2 - v_e^2) + D_m dt g (z_s - z_e) = \delta W(\vec{F}_P).$$

Si le fluide avance, c'est qu'il est poussé par des forces qui sont les forces de pression. On distingue les **forces de pression d'admission** côté entrée, qui sont dans le sens de l'écoulement, et les **forces de pression de refoulement** côté sortie, qui s'opposent à l'écoulement.

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Ainsi

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) + dE_p(\Sigma_{\text{tot}}) = \frac{1}{2}D_m dt (v_s^2 - v_e^2) + D_m dt g (z_s - z_e) = \delta W(\vec{F}_P).$$

Si le fluide avance, c'est qu'il est poussé par des forces qui sont les forces de pression. On distingue les **forces de pression d'admission** côté entrée, qui sont dans le sens de l'écoulement, et les **forces de pression de refoulement** côté sortie, qui s'opposent à l'écoulement.

- Le travail des force de pression d'admission est positif défini tel que

$$\delta W(\vec{F}_{P,e}) = P_e \delta V_e \quad \text{♥}$$

avec P_e la pression d'entrée et δV_e le volume entrant durant dt .

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Ainsi

$$dE_c(\Sigma_{\text{tot}}) + dE_p(\Sigma_{\text{tot}}) = \frac{1}{2} D_m dt (v_s^2 - v_e^2) + D_m dt g (z_s - z_e) = \delta W \left(\vec{F}_P \right).$$

Si le fluide avance, c'est qu'il est poussé par des forces qui sont les forces de pression. On distingue les **forces de pression d'admission** côté entrée, qui sont dans le sens de l'écoulement, et les **forces de pression de refoulement** côté sortie, qui s'opposent à l'écoulement.

- Le travail des force de pression d'admission est positif défini tel que

$$\delta W \left(\vec{F}_{P,e} \right) = P_e \delta V_e \quad \text{♥}$$

avec P_e la pression d'entrée et δV_e le volume entrant durant dt .

- Le travail des force de pression de refoulement est négatif défini tel que

$$\delta W \left(\vec{F}_{P,s} \right) = P_s \delta V_s \quad \text{♥}$$

avec P_s la pression de sortie et δV_s le volume sortant durant dt .

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Le travail élémentaire des force de pression est donc

$$\delta W \left(\vec{F}_P \right) = W \left(\vec{F}_{P,e} \right) - W \left(\vec{F}_{P,s} \right) = P_e \delta V_e - P_s \delta V_s$$

$$\delta W \left(\vec{F}_P \right) = (P_e D_{v,e} - P_s D_{v,s}) dt.$$

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Le travail élémentaire des force de pression est donc

$$\delta W \left(\vec{F}_P \right) = W \left(\vec{F}_{P,e} \right) - W \left(\vec{F}_{P,s} \right) = P_e \delta V_e - P_s \delta V_s$$

$$\delta W \left(\vec{F}_P \right) = (P_e D_{v,e} - P_s D_{v,s}) dt.$$

Comme l'écoulement est stationnaire **et incompressible**
 $D_{v,e} = D_{v,s} = \frac{D_m}{\rho}$. Ainsi

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

Le travail élémentaire des force de pression est donc

$$\begin{aligned}\delta W \left(\vec{F}_P \right) &= W \left(\vec{F}_{P,e} \right) - W \left(\vec{F}_{P,s} \right) = P_e \delta V_e - P_s \delta V_s \\ \delta W \left(\vec{F}_P \right) &= (P_e D_{v,e} - P_s D_{v,s}) dt.\end{aligned}$$

Comme l'écoulement est stationnaire **et incompressible**
 $D_{v,e} = D_{v,s} = \frac{D_m}{\rho}$. Ainsi

$$\begin{aligned}dE_c (\Sigma_{\text{tot}}) + dE_p (\Sigma_{\text{tot}}) &= \frac{1}{2} D_m dt (v_s^2 - v_e^2) + D_m dt g (z_s - z_e) = \delta W \left(\vec{F}_P \right) \\ \frac{1}{2} D_m dt (v_s^2 - v_e^2) + D_m dt g (z_s - z_e) &= \frac{D_m dt}{\rho} (P_e - P_s) \\ \frac{1}{2} (v_s^2 - v_e^2) + g (z_s - z_e) &= \frac{1}{\rho} (P_e - P_s) \\ \frac{P_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + g z_s &= \frac{P_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} + g z_e.\end{aligned}$$

Théorème de Bernoulli

Bilan d'énergie cinétique

La relation que nous venons de trouver nous permet d'énoncer le **théorème de Bernoulli** : pour un **écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide parfait** l'équation de Bernoulli ci-dessous est conservée **le long d'une ligne de courant**. ❤️

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cst} \quad \text{❤️}.$$

Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

L'équation de Bernoulli traduit en fait la conservation de l'énergie lors de d'un écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide parfait

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cst.}$$

Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

L'équation de Bernoulli traduit en fait la conservation de l'énergie lors de d'un écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide parfait

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cst.}$$

- Le terme $\frac{P}{\rho}$ correspond à une énergie massique associée aux forces de pression.

Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

L'équation de Bernoulli traduit en fait la conservation de l'énergie lors de d'un écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide parfait

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cst.}$$

- Le terme $\frac{P}{\rho}$ correspond à une énergie massique associée aux forces de pression.
- Le terme $\frac{v^2}{2}$ représente l'énergie cinétique massique du fluide.

Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

L'équation de Bernoulli traduit en fait la conservation de l'énergie lors de d'un écoulement incompressible et stationnaire d'un fluide parfait

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cst.}$$

- Le terme $\frac{P}{\rho}$ correspond à une énergie massique associée aux forces de pression.
- Le terme $\frac{v^2}{2}$ représente l'énergie cinétique massique du fluide.
- Le terme gz est l'énergie potentielle massique associée aux forces de pesanteur.

Théorème de Bernoulli

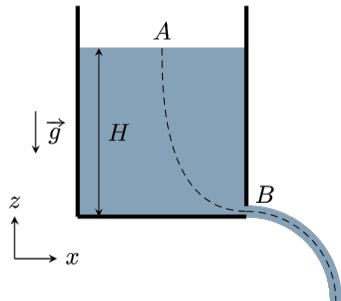
Interprétation énergétique et applications

Application 1 : relation de Toricelli

La relation de Torricelli donne la vitesse à laquelle se vidange un réservoir de section S_A rempli d'une hauteur d'eau H et percé au fond d'un petit orifice de section $S_B \ll S_A$. Elle a été établie en 1643 par Evangelista Torricelli, probablement expérimentalement. La démonstration rigoureuse est due à Daniel Bernoulli en 1738.

On raisonne sur la ligne de courant AB .

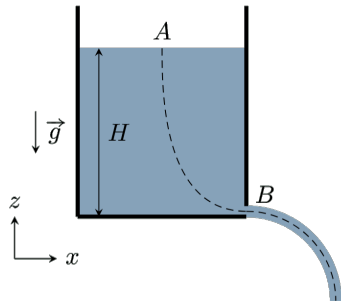
- 1 Exprimer la conservation du débit entre la surface libre du réservoir et sa section de sortie. Quelle approximation peut-on faire sur les vitesses v_A et v_B ?
- 2 Exprimer et simplifier le théorème de Bernoulli entre A et B .
- 3 Conclure sur l'expression de v_B en fonction de H .



Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

- 1 Exprimer la conservation du débit entre la surface libre du réservoir et sa section de sortie. Quelle approximation peut-on faire sur les vitesses v_A et v_B ?

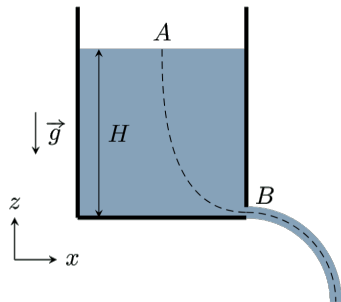


Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

- 1 Exprimer la conservation du débit entre la surface libre du réservoir et sa section de sortie. Quelle approximation peut-on faire sur les vitesses v_A et v_B ?

Pour un écoulement stationnaire et incompressible $D_v = \text{cst}$. Donc



$$\iint_{S_A} \vec{v}_A \cdot d\vec{S} = \iint_{S_B} \vec{v}_B \cdot d\vec{S}.$$

On considérons que les vitesses sont uniformes sur les surfaces S_A et S_B , alors

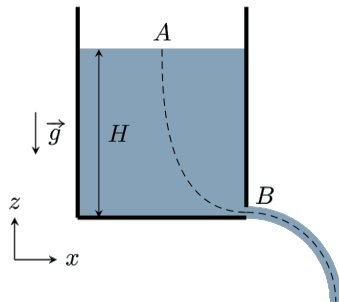
$$v_A S_A = v_B S_B \quad \Longleftrightarrow \quad v_A = v_B \frac{S_B}{S_A}.$$

Or $S_B \gg S_A$ donc $v_A \ll v_B$.

Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

- Exprimer et simplifier le théorème de Bernoulli entre A et B .

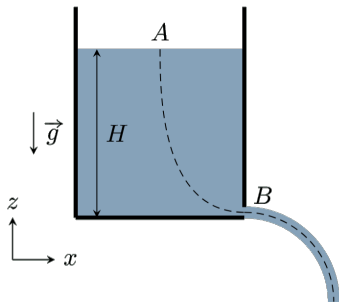


Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

- ② Exprimer et simplifier le théorème de Bernoulli entre A et B .

Le long d'une ligne de courant d'un écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide parfait, il vient que



$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cst} \quad \text{donc} \quad \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B.$$

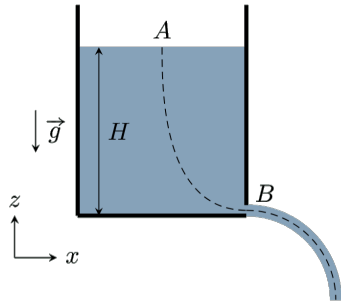
Ici $P_A = P_B = P_{\text{atm}}$ et v_A^2 négligeable, ainsi

$$\frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + gz_A = \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B \quad \text{donc} \quad \frac{v_B^2}{2} = g(z_A - z_B).$$

Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

- ③ Conclure sur l'expression de v_B en fonction de H .



Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

- 3 Conclure sur l'expression de v_B en fonction de H .

L'expression de la vitesse de sortie de l'écoulement est donc

$$\frac{v_B^2}{2} = g(z_A - z_B) \quad \text{donc} \quad v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}.$$

Plus l'orifice est bas, plus la hauteur d'eau qui le surmonte est élevée, plus le jet semble puissant et aller loin, signe que la vitesse à laquelle le fluide s'écoule est d'autant plus élevée.



Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

Application 2 : le planeur

Utiliser le théorème de Bernoulli pour justifier que l'aile d'un avion ou d'un planeur subit une force vers le haut : la portance.



Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

On choisit une première ligne de courant passant au dessus de l'aile d'un point $-\infty$ bien avant l'aile jusqu'à un point A au niveau du dessus de l'aile. D'après le théorème de Bernoulli



Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

On choisit une première ligne de courant passant au dessus de l'aile d'un point $-\infty$ bien avant l'aile jusqu'à un point A au niveau du dessus de l'aile. D'après le théorème de Bernoulli



$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cst} \quad \text{donc} \quad \frac{P_{-\infty}}{\rho} + \frac{v_{-\infty}^2}{2} + gz_{-\infty} = \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A.$$

Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

On choisit une deuxième ligne de courant passant au dessous de l'aile du même point $-\infty$ (il est tellement loin que les lignes de courant s'y rejoignent) bien avant l'aile jusqu'à un point B au niveau du dessous de l'aile. D'après le théorème de Bernoulli



Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

On choisit une deuxième ligne de courant passant au dessous de l'aile du même point $-\infty$ (il est tellement loin que les lignes de courant s'y rejoignent) bien avant l'aile jusqu'à un point B au niveau du dessous de l'aile. D'après le théorème de Bernoulli



$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cst} \quad \text{donc} \quad \frac{P_{-\infty}}{\rho} + \frac{v_{-\infty}^2}{2} + gz_{-\infty} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B.$$

Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

Ainsi, en négligeant la différence d'altitudes entre A et B , il vient que



Théorème de Bernoulli

Interprétation énergétique et applications

Ainsi, en négligeant la différence d'altitudes entre A et B , il vient que



$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B \quad \text{donc} \quad \frac{P_B - P_A}{\rho} = \frac{v_A^2 - v_B^2}{2} > 0.$$

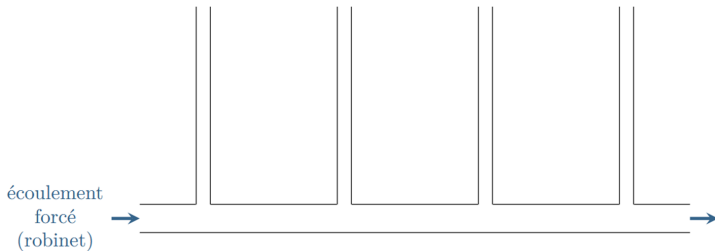
Comme expérimentalement on constate que $v_A > v_B$, d'après Bernoulli cela implique que $P_B > P_A$. La force de pression globale que subit l'aile est orienté du bas vers le haut : c'est **la portance**.

Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

Considérons la situation suivante : un fluide réel subit un écoulement stationnaire et incompressible dans une conduite de faible diamètre. Cette conduite est parsemée de cheminée en contact avec l'atmosphère.

Qu'observe-t-on au niveau de ces cheminées ?



Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

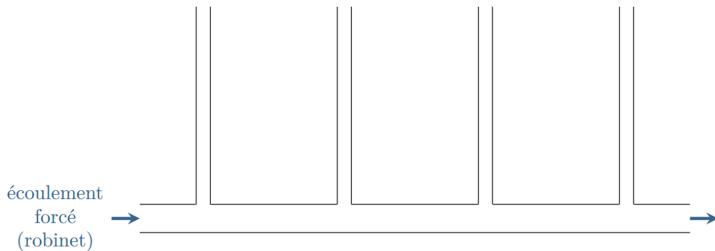
Hydraulique 06 : Écoulements en charge : l'équation de Bernoulli est-elle toujours valable ?!

Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

Considérons la situation suivante : un fluide réel subit un écoulement stationnaire et incompressible dans une conduite de faible diamètre. Cette conduite est parsemée de cheminée en contact avec l'atmosphère.

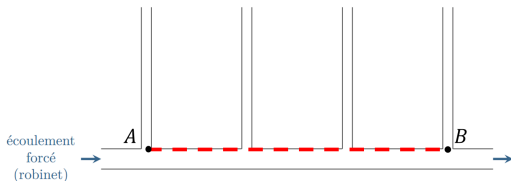
Qu'observe-t-on au niveau de ces cheminées ? La pression au bas des cheminées est différente. Utilisons la relation de Bernoulli pour vérifier ce résultat.



Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

On considère deux points A et B de même altitude z . Comme l'écoulement est stationnaire et incompressible, le débit volumique se conserve et donc $v_A S_A = v_B S_B$. Comme le conduit a une section S constante, il vient que $v_A = v_B$. D'après le théorème de Bernoulli

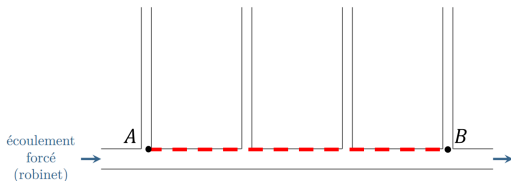


Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

On considère deux points A et B de même altitude z . Comme l'écoulement est stationnaire et incompressible, le débit volumique se conserve et donc $v_A S_A = v_B S_B$. Comme le conduit a une section S constante, il vient que $v_A = v_B$. D'après le théorème de Bernoulli

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B \quad ; \quad P_A = P_B.$$



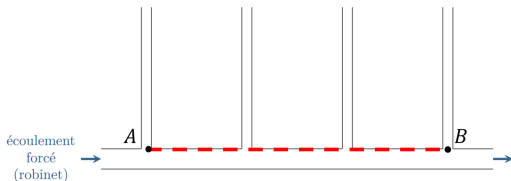
Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

On considère deux points A et B de même altitude z . Comme l'écoulement est stationnaire et incompressible, le débit volumique se conserve et donc $v_A S_A = v_B S_B$. Comme le conduit a une section S constante, il vient que $v_A = v_B$. D'après le théorème de Bernoulli

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} + gz_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2} + gz_B \quad ; \quad P_A = P_B.$$

Les pressions en bas des cheminées devraient être égales, donc la hauteur de fluide au dessus de ces points devraient aussi être égales...ce n'est pas le cas. **D'où vient l'erreur ?**



Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

Nous avons considéré un **fluide réel** alors que le théorème de Bernoulli ne s'applique qu'à un **fluide parfait**. Or les viscosités provoquent des pertes énergétiques.

Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

Nous avons considéré un **fluide réel** alors que le théorème de Bernoulli ne s'applique qu'à un **fluide parfait**. Or les viscosités provoquent des pertes énergétiques.

Dans le cas de l'écoulement stationnaire et incompressible d'un fluide réel, les pertes d'énergie par viscosité diminuent la charge hydraulique : ce phénomène est nommé **pertes de charge**. ❤️

$$\text{Soit } \frac{P_e}{\rho} + \frac{v_e^2}{2} + gz_e > \frac{P_s}{\rho} + \frac{v_s^2}{2} + gz_s. \text{ ❤️}$$

Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

On peut exprimer **la pertes de charge** entre une entrée et une sortie comme **une différence de pressions** Δp^* ou une **différence de hauteur** Δh^* en récrivant l'équation de Bernoulli :

$$\text{Homogène à une pression} \quad P_e + \rho \frac{v_e^2}{2} + \rho g z_e > P_s + \rho \frac{v_s^2}{2} + \rho g z_s$$

$$\Delta p^* = \left(P_e + \rho \frac{v_e^2}{2} + \rho g z_e \right) - \left(P_s + \rho \frac{v_s^2}{2} + \rho g z_s \right).$$

$$\text{Homogène à une hauteur} \quad \frac{P_e}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} + z_e > \frac{P_s}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} + z_s$$

$$\Delta h^* = \left(\frac{P_e}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} + z_e \right) - \left(\frac{P_s}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} + z_s \right).$$

Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

On distingue deux types de pertes de charge.

Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

On distingue deux types de pertes de charge.

- Quand la conduite subit de **Brusques variations de section ou de direction**, il se produit des **pertes de charge dites singulières**. ❤️

Théorème de Bernoulli

Pertes de charge

On distingue deux types de pertes de charge.

- Quand la conduite subit de **brusques variations de section ou de direction**, il se produit des **pertes de charge dites singulières**. ❤️
- Les **pertes de charge régulières ou linéaires** sont réparties de façon régulière le long de la conduite. Elles sont proportionnelles à la longueur de la conduite et à la vitesse du fluide, et inversement proportionnelles au diamètre de la conduite. ❤️