



Lycée Charles Coëffin — Sciences physique

Fiche de travaux dirigés — CPGE TSI2

TD 16 : Fluides en écoulement stationnaire dans une conduite

Objectifs

- Décrire localement les propriétés thermodynamiques et mécaniques d'un fluide à l'aide des grandeurs intensives pertinentes.
- Exprimer le débit massique en fonction de la vitesse d'écoulement. Exploiter la conservation du débit massique le long d'un tube de courant.
- Justifier l'intérêt d'utiliser le débit volumique pour l'étude d'un fluide incompressible en écoulement.
- Citer des ordres de grandeur de viscosité de gaz et de liquides (air, eau et lubrifiant). Exploiter les conditions aux limites du champ de vitesse d'un fluide dans une conduite. Relier qualitativement l'irréversibilité d'un écoulement à la viscosité.
- Définir un volume et une surface de contrôle. Établir et exploiter la relation de Bernoulli pour un fluide parfait, incompressible en écoulement stationnaire.
- Modifier la relation de Bernoulli en tenant compte d'un terme de dissipation d'énergie fourni.

Pré-requis : lois de Newton.

1 Exercices

Profondeur de la Seine à Rouen ★

Le débit moyen de la Seine à Rouen est de l'ordre de $300 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ pour une vitesse de courant typique de $3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. La largeur du fleuve est d'environ 200 m . Estimer sa profondeur.

Robinet ★

Lorsque de l'eau coule d'un robinet ouvert, on constate que le diamètre du filet d'eau rétrécit à mesure qu'il s'éloigne du robinet.

1. Expliquer qualitativement le phénomène.
2. Des mesures sur une photographie montrent qu'après une chute de 20 cm , le diamètre du jet passe de $d_1 = 78 \text{ pixels}$ à $d_2 = 45 \text{ pixels}$. En quelle proportion la vitesse a-t-elle varié ?

Vitesse et débit volumique ★

On plonge entièrement une paille d'une longueur de 15 cm dans un verre d'eau. On scelle le haut de la paille avec un doigt, puis on sort la paille de l'eau. On constate que l'eau ne coule pas.

1. Dans une conduite cylindrique de rayon R , le champ des vitesses d'un écoulement laminaire est

donné par le profil de Poiseuille :

$$\vec{v}(r) = V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad V_0 > 0.$$

Représenter le profil de vitesse sur une section droite de l'écoulement, et calculer le débit volumique.

2. Considérons un écoulement au dessus d'une surface solide définissant le plan $y = 0$. Le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

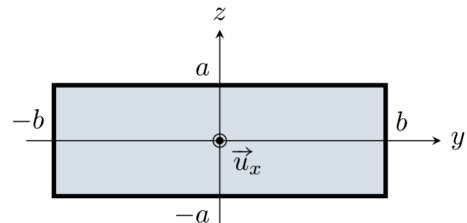
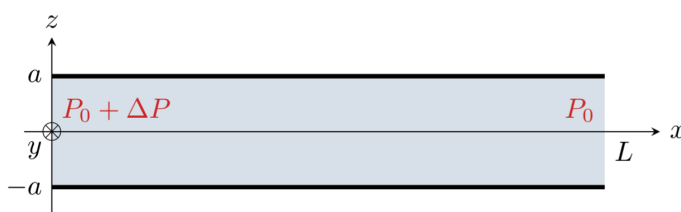
$$v(y) = V_0 \frac{y}{h} \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad V_0 > 0.$$

Représenter la situation sur un schéma, en y indiquant la force exercée par le fluide sur une surface S du solide, puis exprimer cette force.

Écoulement de Poiseuille plan ★ ★

Considérons un fluide en écoulement au travers d'une fine conduite rectangulaire de hauteur $2a$ selon (Oz) , de largeur $2b \gg 2a$ selon (Oy) et de longueur $L \gg 2a, 2b$ selon (Ox) . Une surpression ΔP est imposée en $x = 0$, ce qui entraîne un écoulement de fluide. Suffisamment loin de l'entrée de la canalisation, le champ de vitesse de l'écoulement est donné par

$$\vec{v} = V_{\max} \left(1 - \frac{z^2}{a^2} \right) \vec{u}_x.$$

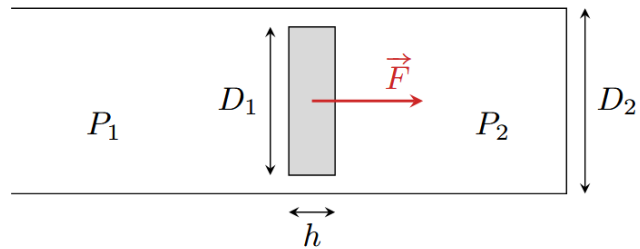


1. Représenter l'allure du champ de vitesse. Indiquer les lignes de courant.
2. L'écoulement considéré est-il parfait ou visqueux ?
3. Calculer le débit volumique au travers d'une section droite de la conduite.
4. Montrer que la résultante des forces de viscosité exercées par le fluide sur la conduite vaut

$$\vec{F} = \frac{3\eta L}{a^2} D_v \vec{u}_x.$$

Déplacement d'un piston à huile ★ ★

On considère un piston formé d'un cylindre plein (diamètre D_1 , épaisseur h) coulissant dans un cylindre creux (diamètre $D_2 > D_1$). Le fluide à l'intérieur du piston est de l'huile de masse volumique μ et de viscosité η . On suppose $P_2 = 2P_1$. Un opérateur appuie de manière quasi-statique sur le piston avec une force $\vec{F}$.



1. Estimer simplement le gradient de pression GP dans l'interstice.
2. On admet que la vitesse débitante du fluide dans l'interstice s'écrit $V_d = \alpha \frac{GP}{\eta}$, où α est une constante dépendant uniquement des diamètres. Déterminer le débit volumique de fuite.
3. Estimer la force de frottement visqueux sur le piston.
4. En déduire la force que doit exercer l'opérateur pour pouvoir pousser le piston.

Transfusion sanguine ★ ★ ★

Cet exercice s'intéresse à une transfusion sanguine, au cours de laquelle du sang stocké dans une poche de 200 mL issue d'un don est injecté en intraveineuse à un patient en une heure. Le sang s'écoule au travers d'un tuyau souple de rayon $b = 2,5$ mm au bout duquel se trouve une aiguille horizontale de longueur $\ell = 2,0$ cm et de rayon $a = 0,15$ mm. Le haut de la poche est supposé à pression atmosphérique P_0 alors que la pression dans la veine est supérieure de $\Delta P = 7$ mbar à la pression atmosphérique. On modélise le sang se comporte comme un fluide newtonien de viscosité $\eta = 1,6$ mPa · s et de masse volumique $\rho = 1,1$ kg · L⁻¹.

1. Déterminer le débit volumique Q au travers du dispositif.
2. Calculer la vitesse débitante dans le tuyau souple et l'aiguille. En déduire une approximation raisonnable à propos du sang se trouvant dans le tuyau, et la nature de l'écoulement dans l'aiguille.

Compte tenu de la question précédente, l'écoulement dans l'aiguille peut être décrit par un profil de Poiseuille en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \frac{a^2}{4\eta\ell} (P_e - P_s) (1 - \alpha r^2) \vec{u}_z$$

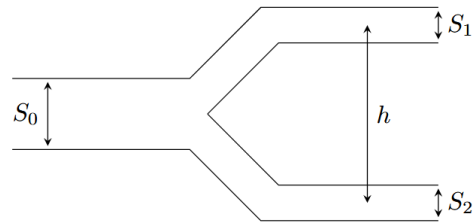
avec P_e et P_s les pressions à l'entrée et la sortie de l'aiguille.

3. Montrer que $\alpha = 1/a^2$.
4. Déterminer $P_e - P_s$ nécessaire pour que la transfusion ait le débit voulu.
5. À quelle hauteur H au dessus du bras du patient la poche doit-elle se trouver ?

Effet Venturi ★

On considère une conduite d'eau avec un Y de séparation telle que $S_1 = S_2 = S_0/2$. Le système n'est pas horizontal : on note h la dénivellation entre les deux sorties, supposées toutes les deux à l'air libre.

Exprimer les vitesses v_1 et v_2 en fonction de h et de la vitesse d'entrée v_0 .



On a deux inconnues v_1 et v_2 . Il nous faut donc deux relations indépendantes pour les exprimer.

Commençons par la condition d'écoulement stationnaire. Elle implique que le débit massique est constant $D_m = \text{cst}$.

De plus, si on considère le fluide comme incompressible, alors sa masse volumique est constante $\rho = \text{cst}$. Cela implique que $D_m = \rho D_v = \text{cst}$, donc que le débit volumique est constant $D_v = \text{cst}$.

Si on applique cette condition sur l'écoulement il vient que

$$D_{v,e} = D_{v,s} \iff S_0 v_0 = S_1 v_1 + S_2 v_2 \iff S_0 v_0 = \frac{S_0}{2} (v_1 + v_2)$$

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (1)$$

Cherchons une deuxième relation à l'aide du théorème de Bernoulli. Pour ce faire on ajoute comme condition que le fluide est parfait. Dans ce cas, en considérant une ligne de courant d'un point A à l'entrée jusqu'à un point B au niveau de la fourche du eau, il vient que

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + g \frac{h}{2} = \frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gh \iff v_1^2 = 2 \frac{P_A - P_{atm}}{\rho} + v_0^2 - gh. \quad (2)$$

En considérant cette fois une ligne de courant d'un point A à l'entrée jusqu'à un point B au niveau de la fourche du eau, il vient que

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{v_0^2}{2} + g \frac{h}{2} = \frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \iff v_2^2 = 2 \frac{P_A - P_{atm}}{\rho} + v_0^2 + gh. \quad (2)$$

En soustrayant (2) par (1), il vient que

$$v_2^2 - v_1^2 = 2gh. \quad (4)$$

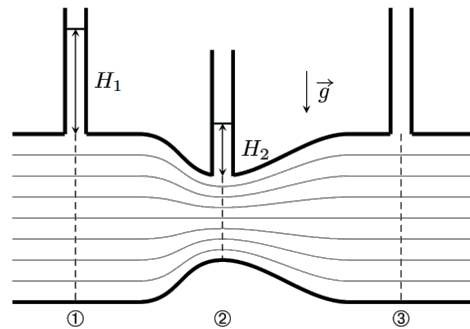
À partir des deux relations indépendante (1) et (4) on obtient le système suivant

$$\begin{cases} v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2} \\ v_2^2 - v_1^2 = 2gh \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = 2v_0 - v_2 \\ v_2^2 - (4v_0^2 - 4v_0 v_2 + v_2^2) = 2gh \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = 2v_0 - v_2 \\ 4v_2 = \frac{2gh + 4v_0^2}{v_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = v_0 - \frac{gh}{2v_0} \\ v_2 = v_0 + \frac{gh}{2v_0} \end{cases}.$$

Effet Venturi ★ ★

On étudie un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible de masse volumique ρ dans une conduite horizontale de section variable. On suppose l'écoulement parfait. Trois tubes piézométriques, aussi appelés prises de pression, sont placés sur trois sections de la conduite pour mesurer la pression au sein du fluide.



1. Exprimer la vitesse V_2 en fonction de V_1 et des sections S_1 et S_2 . Est-ce cohérent avec les lignes de courant tracées ?

Pour un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible, il y a conservation du débit volumique, soit $D_v = \text{cst.}$ Si on applique cette condition au problème, il vient que

$$D_{v,1} = D_{v,2} \iff V_1 S_1 = V_2 S_2$$

$$V_2 = V_1 \frac{S_1}{S_2} \quad \text{or } S_1 > S_2 \text{ donc } V_2 > V_1.$$

Ce résultat est cohérent avec les lignes de courant tracées qui se resserrent au niveau de la section 2 par rapport à la section 1.

2. Relier la hauteur H du fluide dans un tube piézométrique à la pression P qui règne dans l'écoulement en dessous de ce tube. D'après la figure, comment évolue la pression lors du resserrement de section ?

L'expression de la variation de pression dans un fluide incompressible avec un axe descendant, il vient que

$$P(z) = P_{atm} + \rho g (z - z_s).$$

En considérant la hauteur de la surface du fluide dans le tube égale à 0, soit $z_s = 0$, alors

$$P(z) = P_{atm} + \rho g z.$$

D'après la figure lors du resserrement de la section la profondeur de liquide diminue témoignant d'une baisse de pression.

3. Interpréter ce résultat en utilisant le théorème de Bernoulli.

Considérons ce fluide comme parfait. On peut appliquer le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant passant par le milieu du conduit soit à une profondeur constante z , de telle manière que

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz = \frac{P_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz$$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho_0} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}.$$

Comme $v_2 > v_1$, alors d'après Bernoulli $P_1 > P_2$.

4. Quelle devrait être la hauteur H_3 ?

Si on néglige les pertes de charges, comme la section $S_3 = S_1$, alors, comme le débit volumique est conservé, $v_3 = v_1$. D'après Bernoulli, cela implique que $P_3 = P_1$, soit, d'après l'expression de la variation de pression dans un liquide incompressible $H_3 = H_1$.

2 Annale

Partie II - Choix de la pompe du toboggan

La pompe qui renvoie l'eau de la piscine sur le haut du toboggan est vieillissante et doit être changée. On donne le schéma d'implantation en **figure 3**.

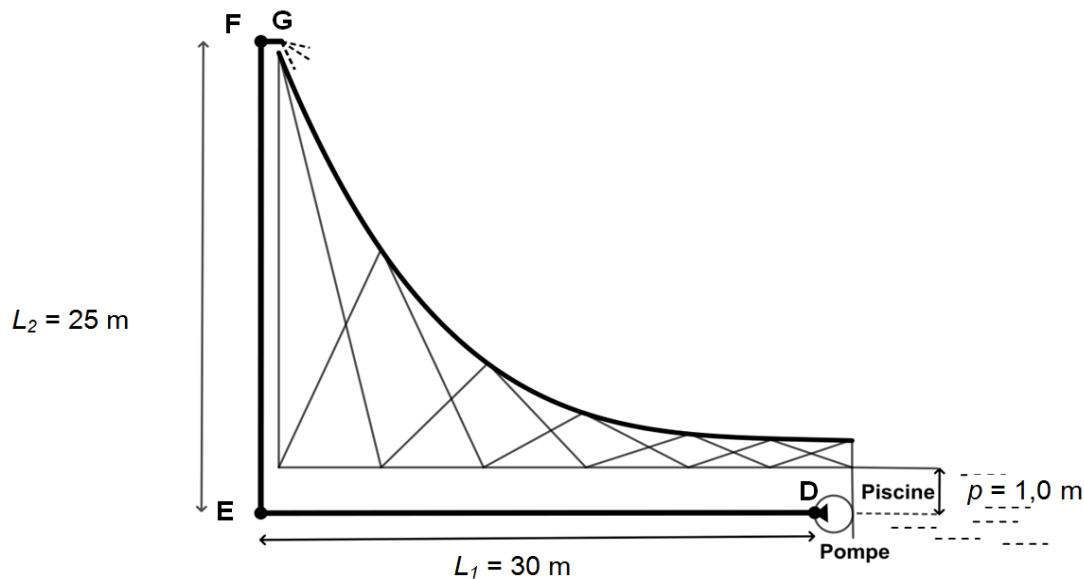


Figure 3 - Schéma des tuyauteries et de positionnement de la pompe

La pompe prélève directement l'eau de la piscine à une profondeur $p = 1,0$ m avec une longueur de tuyau d'aspiration négligeable. Le tronçon horizontal DE, le tronçon vertical EF et le tronçon FG du tuyau de refoulement sont en PVC de section utile $S = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Au point G, point de refoulement à pression atmosphérique, la section est aussi de $S = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Le débit volumique D_v souhaité est égal à $3,6 \cdot 10^4 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1}$.

La pression en D (sortie de pompe) est mesurée : $P_D = 5,5 \text{ bar}$.
On rappelle les données suivantes :

- intensité de la pesanteur : $g = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- masse volumique de l'eau : $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Q14. Écrire la relation de Bernoulli dans le cas d'un fluide parfait en précisant les hypothèses de son utilisation.

On admet que les conditions d'utilisation de la relation de Bernoulli sont effectivement réunies. De plus, la vitesse de l'écoulement est supposée uniforme sur la section des tuyaux.

Q15. Justifier que la valeur de la vitesse d'écoulement du fluide est identique en D et en F.

14. On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et parfait. Dans ce cas, on peut appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cst.}$$

15. Dans le cas d'un écoulement stationnaire le débit massique est conservé $D_m = \text{cst.}$ Si le fluide est incompressible alors $\rho = \text{cst.}$ Ainsi le débit volumique est conservé $D_v = \frac{D_m}{\rho} = \text{cst.}$ Ainsi

$$D_{v,D} = D_{v,F}.$$

Comme la vitesse d'écoulement est uniforme sur la section des conduits, il vient que

$$v_D S_D = v_F S_F \quad \Longleftrightarrow \quad v_D = v_F$$

car $S_D = S_F$.

Q16. Calculer (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) la vitesse d'éjection de l'eau au point G.

Q17. Calculer la pression P_F au point F dans le cadre des hypothèses précédentes.

En réalité, du fait des pertes de charge, on a mesuré au point E une pression $P_E = 5,2$ bar.

Q18. Calculer la pression P'_F à laquelle on peut s'attendre au point F si on néglige les pertes de charge singulières au coude E et si on considère les pertes de charge régulières proportionnelles à la longueur de tuyau.

On suppose maintenant que les pertes de charge totales (régulières et singulières) entre l'entrée de la pompe et le point de sortie G sont $\Delta P_{\text{pertes}} = 2$ bar.

Q19. Montrer que la quantité $D_V \Delta P_{\text{pertes}}$ est homogène à une puissance.

Q20. Exprimer la puissance utile P_u de la pompe à l'aide d'un bilan de puissance entre un point de la surface libre de l'eau de la piscine et le point de refoulement G.

Q21. Vérifier que cette puissance utile P_u vaut 4,4 kW.

En réalité, le rendement global de l'ensemble {moteur + pompe} est de 60 %.

Q22. Calculer la puissance électrique P_{elec} nécessaire au moteur de la pompe.

Pour une pompe, on évoque souvent la Hauteur Manométrique Totale HMT telle que :

$$P_u = \rho D_V g (HMT). \quad (2)$$

Q23. Calculer la hauteur manométrique totale HMT , exprimée en mCE (mètre de Colonne d'Eau).

Parmi toutes les pompes disponibles sur le marché, le choix s'est arrêté sur une pompe d'un fabricant qui propose un corps de pompe avec plusieurs diamètres possibles. Le document technique du fabricant est donné en **annexe**.

Q24. Proposer un choix de diamètre pour le remplacement de la pompe.

Q25. Préciser, avec justification, si la pompe fonctionnera à son régime optimal.

16. On exprime le débit volumique au point G dans le cas d'une vitesse uniforme, ainsi

$$D_v = S_G v_G = S v_G \iff v_G = \frac{D_v}{S}.$$

A.N. $v_G = \frac{3,6 \times 10^4 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1}}{5,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = \frac{10^{-3} \times 3,6 \times 10^4 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{3,6 \times 10^3 \times 5,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = \frac{10}{5,0} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$

17. Si on applique le théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant entre les points D et F , en tenant compte du fait que les vitesses en D , E , F et G sont les mêmes, il vient que

$$\frac{P_D}{\rho} + \frac{v_D^2}{2} + gz_D = \frac{P_F}{\rho} + \frac{v_F^2}{2} + gz_F \iff P_F = P_D + \rho \frac{v_D^2 - v_F^2}{2} + \rho g(z_D - z_F)$$

$$P_F = P_D - \rho g L_2.$$

A.N. $P_F = 5,5 \times 10^5 \text{ Pa} - 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 25 \text{ m} = 3,0 \times 10^5 \text{ Pa} = 3,0 \text{ bar}.$

18. Calculons la pertes de charges régulières par unité de longueur du tuyau. On sait que sur la longueur $L_1 = DE$, les pertes de charges sont

$$\Delta P^* = P_D - P_E. \quad \textbf{A.N.} \quad \Delta P^* = 5,5 \text{ bar} - 5,2 \text{ bar} = 0,3 \text{ bar}.$$

Ainsi par unité de longueur, la perte de charge régulière est

$$\Delta p^* = \frac{\Delta P^*}{L_1}. \quad \textbf{A.N.} \quad \Delta p^* = \frac{3 \times 10^4 \text{ Pa}}{30 \text{ m}} = 1 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}.$$

D'après le théorème de Bernoulli exprimé en terme de pression et adapté au fluide réel sur la ligne de courant entre les points E et F , il vient que

$$P_F + \rho \frac{v_F^2}{2} + \rho g z_F = P_E + \rho \frac{v_E^2}{2} + \rho g z_E - \Delta p^* L_2$$

$$P_F = P_E - \rho g L_2 - \Delta p^* L_2.$$

A.N. $P_F = 5,2 \times 10^5 \text{ Pa} - 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 25 \text{ m} - 1 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} \times 25 \text{ m}$
 $P_F = 5,2 \times 10^5 \text{ Pa} - 2,5 \times 10^5 \text{ Pa} - 0,25 \times 10^5 \text{ Pa} = 2,45 \times 10^5 \text{ Pa}.$

19. Faisons l'étude des unités du terme

$$[D_v \Delta P_{\text{pertes}}] = [D_v] \times [P_{\text{pertes}}] = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \times \text{Pa} = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \times \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{N} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

or la puissance d'une force est définie telle que $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Le terme étudié est donc bien homogène à une puissance.

20. Faisons le bilan de puissance entre un point de la surface libre de l'eau de la piscine noté C et le point de refoulement G à l'aide du théorème de Bernoulli exprimé en terme de pression et adapté au fluide réel

$$P_G + \rho \frac{v_G^2}{2} + \rho g z_G = P_C + \rho \frac{v_C^2}{2} + \rho g z_C - \Delta P_{\text{pertes}} + \Delta P_{\text{pompe}}$$

avec ΔP_{pompe} la surpression due à la pompe et liée à la puissance utile de la pompe telle que $\mathcal{P}_u = D_v \Delta P_{\text{pompe}}$ d'après la question précédente. Ainsi en multipliant la dernière équation par D_v il vient que

$$D_v \left(P_G + \rho \frac{v_G^2}{2} + \rho g z_G \right) = \left(P_C + \rho \frac{v_C^2}{2} + \rho g z_C - \Delta P_{\text{pertes}} \right) + \mathcal{P}_u$$

$$\mathcal{P}_u = D_v \left(P_G - P_C + \rho \frac{v_G^2 - v_C^2}{2} + \rho g (z_G - z_C) + \Delta P_{\text{pertes}} \right).$$

Les pressions en G et en C correspondent à la pression atmosphérique car ces deux points sont en contact avec l'atmosphère, ainsi $P_G - P_C = 0$. Comme le niveau de la piscine ne change pas, la vitesse de l'écoulement au point C est nul, ainsi

$$\mathcal{P}_u = D_v \rho \left(\rho \frac{v_G^2}{2} + \rho g (z_G - z_C) + \Delta P_{\text{pertes}} \right).$$

21. **A.N.**

$$\mathcal{P}_u = \frac{10^{-3} \times 3,6 \times 10^4 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}}{3600} \times \left(10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \frac{(2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2} + 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times (25 - 1) \text{ m} + 2 \times 10^5 \text{ Pa} \right)$$

$$= 10^{-2} \times (2 \times 10^3 + 2,4 \times 10^5 + 2 \times 10^5) \text{ W} = 4,42 \times 10^3 \text{ W} = 4,4 \text{ kW}.$$

22. La puissance électrique fournie au moteur est convertie en puissance utile avec le rendement donné η , ainsi

$$\mathcal{P}_{\text{elec}} = \frac{\mathcal{P}_u}{\eta}. \quad \text{A.N.} \quad \mathcal{P}_{\text{elec}} = \frac{4,4 \text{ kW}}{0,6} = 7,3 \text{ kW}.$$

23. D'après l'expression fournie

$$HMT = \frac{\mathcal{P}_u}{\rho D_v g}.$$

$$\text{A.N.} \quad HMT = \frac{4,4 \times 10^3 \text{ W} \times 3600}{10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 10^{-3} \times 3,6 \times 10^4 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1} \times 10 \text{ m s}^{-2}} = 44 \text{ mCE}.$$

24. Sur le premier graphe en annexe, on repère le point de fonctionnement recherché soit une HMT de 44 mCE pour un débit de $D_v = 3,6 \times 10^4 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1} = 36 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$. Ce point de fonctionnement se rapproche de la deuxième courbe en partant du bas correspond au diamètre 180 mm, on prendra donc ce diamètre pour la pompe de remplacement.

25. Toujours d'après le premier graphe, le point de fonctionnement correspondant à la HMT et le débit D_v étudiés présente un rendement $\eta \approx 60\%$. Or on voit que le rendement maximum pour ce diamètre est de 78,1%. Comme la pompe ne fonctionnera pas à son rendement maximal est **elle ne fonctionnera pas à son régime optimal**.