



Lycée Charles Coëffin — Sciences physique

Fiche de travaux dirigés — CPGE TSI2

TD 11 : Électrostatique

Objectifs

- Exprimer le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.
- Décomposer une distribution en des distributions plus simples dans le but de calculer un champ électrostatique par superposition ; choisir un type de distribution continue adaptée à la situation modélisée ; justifier qualitativement le choix d'une modélisation d'une distribution de charges par une distribution infinie ; évaluer la charge totale d'une distribution continue dans des situations à géométrie simple.
- Identifier les plans de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de charges ; identifier les invariances d'une distribution de charges ; exploiter les symétries et les invariances d'une distribution de charges pour caractériser le champ électrostatique créé.
- Relier le champ électrostatique au potentiel ; exprimer le potentiel créé par une charge ponctuelle ; calculer un champ électrostatique à partir du potentiel, l'expression de l'opérateur gradient étant fournie dans le cas des coordonnées sphériques et cylindriques ; exprimer une différence de potentiel comme une circulation du champ électrostatique.
- Utiliser le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrostatique créé par une distribution présentant un haut degré de symétrie.
- Établir l'expression de la capacité d'un condensateur plan dans le vide en négligeant les effets de bords.
- Orienter les lignes de champ électrostatique créées par une distribution de charges ; représenter les surfaces équipotentielles connaissant les lignes de champ et inversement ; associer, en dehors des sources, les variations de l'intensité du champ électrostatique à la position relative des lignes de champ ; vérifier qu'une carte de lignes de champ est compatible avec les symétries et les invariances d'une distribution.

Pré-requis : systèmes de coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques. Force conservative et énergie potentielle.

1 Cahier d'entraînement

EMP1

Fiche d'entraînement n° 3

Électromagnétisme en régime permanent

Électrostatique

Prérequis

Repérages cartésien, cylindrique et sphérique.
Intégrales curvilignes, de surface et de volume.
Champs scalaires et vectoriels. Gradient. Théorème de Gauss.

Constantes utiles

- Charge élémentaire : $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$;
- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

Distributions de charge : symétries, invariances, charge totale



Entraînement 3.1 — Calculs intégraux de longueurs, surfaces et volumes.



On rappelle les déplacements élémentaires dans chacun des trois systèmes de coordonnées :

- en coordonnées cartésiennes : $d\vec{\ell} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$
- en coordonnées cylindriques (ou cylindro-polaires) : $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$
- en coordonnées sphériques : $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi$

a) Exprimer l'élément de circonférence dC d'un disque de rayon R

b) Grâce à un calcul intégral, retrouver la circonférence d'un cercle de rayon R .

.....

c) En coordonnées cylindriques, exprimer l'aire dS de l'élément de surface orthogonal à $\vec{e}_z$.

.....

d) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver la surface d'un disque de rayon R .

e) Grâce à un calcul d'intégrale, retrouver le volume d'une boule de rayon R .

Entraînement 3.2 — Charge totale d'une distribution linéique.



Dans chacun des cas suivants, déterminer la charge totale des distributions linéiques suivantes à l'aide de la relation : $Q = \int \lambda(M) d\ell_M$.

a) Pour une tige de longueur ℓ chargée avec une densité linéique de charge uniforme λ_0 .

.....

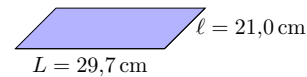
b) Pour un anneau de rayon a dont la densité linéique de charge, non uniforme, est $\lambda(M) = q_0 \theta / a$ avec q_0 une constante et θ l'angle qui repère le point M sur l'anneau.

.....

 Entraînement 3.3 — Feuille d'aluminium chargée.



Soit une feuille d'aluminium de format A4 à laquelle 1 000 électrons ont été arrachés. La feuille porte alors la charge électrique Q .

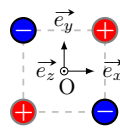


- a) Exprimer la charge Q en fonction de la charge électrique élémentaire e
- b) Exprimer la surface S de la feuille en fonction des longueurs L et ℓ
- c) En déduire la valeur de la charge surfacique moyenne $\sigma = Q/S$ portée par la feuille

 Entraînement 3.4 — Quadrupôle électrostatique.



On considère la distribution de charges ci-dessous.



- a) Quels sont les trois plans de symétrie de la distribution ?

.....

- b) Quels sont les deux plans d'antisymétrie de la distribution ?

.....

 Entraînement 3.5 — Autour d'une sphère chargée.

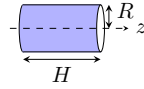


Tous les résultats devront être donnés en écriture scientifique.

- a) Quel est le volume en m^3 d'une sphère de rayon $R = 25 \text{ cm}$?
- b) Que vaut la charge totale de la sphère, en coulomb, si celle-ci est chargée avec une densité volumique uniforme de $\rho_0 = 50,0 \text{ nC} \cdot \text{m}^{-3}$?
- c) Quelle est l'aire de la surface de la sphère en m^2 ?
- d) Que vaut la charge totale de la sphère, en coulomb, si celle-ci est chargée avec une densité surfacique uniforme $\sigma = 8 \text{ } \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$?

Entraînement 3.6 — Tube chargé localement.

Un tube conducteur d'axe (Oz) possède une densité surfacique de charge $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(\theta)$, avec σ_0 une constante et θ l'angle des coordonnées cylindriques (r, θ, z) .



a) Comment s'exprime l'aire d'un élément de surface dS du tube ?

(a) $dr dz$

(b) $R d\theta dz$

(c) $R \sin(\theta) d\theta dz$

(d) $R dr d\theta$

.....

b) Comment s'exprime la charge totale Q portée par le tube ?

(a) $Q = \int_{r=0}^R \int_{z=0}^H \sigma(\theta) dr dz$

(c) $Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^H \sigma(\theta) R d\theta dz$

(b) $Q = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^H \sigma(\theta) R \sin(\theta) d\theta dz$

(d) $Q = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \sigma(\theta) R dr d\theta$

.....

c) À l'aide du calcul d'une intégrale, déterminer la charge totale Q

**Entraînement 3.7 — Autour d'un cylindre chargé.**

Soit un câble cylindrique d'axe (Oz) , de hauteur h et de rayon R , doté d'une densité volumique de charge ρ .

a) Laquelle de ces formules permet de calculer l'aire de la surface latérale du cylindre ?

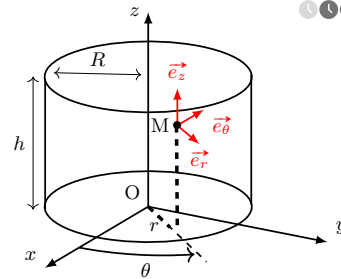
(a) $\pi R^2 h$

(c) $4\pi R^2 h$

(b) $2\pi R h$

(d) $4\pi R h$

.....



b) Sans négliger les effets de bords, déterminer les invariances de cette distribution de charge si,

$$\text{pour } 0 \leq z \leq h, \rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R} \right)^3,$$

avec ρ_0 une constante homogène à une charge volumique.

(a) invariance par translation parallèlement à $\vec{e}_x$

(c) invariance par translation parallèlement à $\vec{e}_z$

(b) invariance par rotation autour de l'axe (Oz)

(d) aucune invariance

.....

c) Même question si, pour $0 \leq z \leq h$, $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R} \right)^3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

d) Même question si le cylindre est de hauteur infinie avec $\rho = \rho_0 \left(\frac{r}{R} \right)^3$

De la distribution de charge au champ électrostatique

Entraînement 3.8 — Superpositions et symétries.



Sur le schéma ci-contre figurent, en M_1 et M_2 , les champs électrostatiques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ respectivement générés par les deux charges $q_1 = +e$ et $q_2 = +e$.

a) Exprimer le champ électrostatique total $\vec{E}$ au point M_1 en fonction des vecteurs de la base.

.....

b) Exprimer le champ électrostatique total $\vec{E}$ au point M_2 en fonction des vecteurs de la base.

.....

Le plan $(M_2, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, nommé $\mathcal{P}$, est un plan de symétrie de la distribution de charge.

c) Quelles propositions sont correctes ?

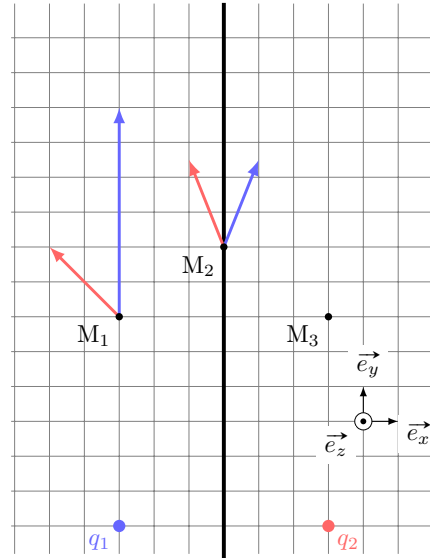
(a) $\vec{E}(M_3) = -2\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$

(c) $\vec{E}(M_2) \in \mathcal{P}$

(b) $\vec{E}(M_3) = 2\vec{e}_x + 8\vec{e}_y$

(d) $\vec{E}(M_2) \perp \mathcal{P}$

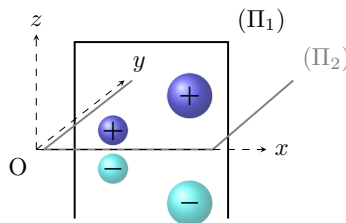
.....



Entraînement 3.9 — Symétrie d'une distribution volumique de charge.



Le champ électrostatique créé par la distribution volumique ci-contre est noté $\vec{E}$. Le plan (Π_1) est un plan de symétrie de la distribution. Le plan (Π_2) est un plan d'antisymétrie de la distribution.



On rappelle qu'en tout point d'un plan de symétrie (resp. antisymétrie) de la distribution, le champ électrostatique appartient (resp. est perpendiculaire) à ce plan.

a) Quel vecteur unitaire est normal au plan (Π_1) ?

b) Quel vecteur unitaire est normal au plan (Π_2) ?

c) En un point $M(x, 0, 0)$ de l'axe (Ox) , identifier l'expression correcte parmi celles proposées.

(a) $\vec{E}(M) = \vec{0}$

(b) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_x$

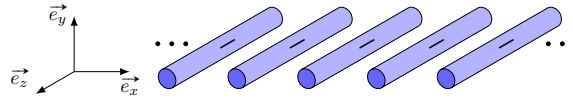
(c) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_y$

(d) $\vec{E}(M) = E(M)\vec{e}_z$

.....

Entraînement 3.10 — Invariances d'une distribution volumique de charge.

La grille infinie représentée ci-dessous est constituée de tiges infinies selon $\vec{e}_z$ et est chargée uniformément négativement.



Soit M un point de l'espace repéré par (x, y, z) .

Sachant que les composantes du champ électrique $\vec{E}$ possèdent les mêmes invariances que celles de la distribution de charges, lesquelles de ces expressions sont valides si l'étude des symétries a déjà été menée ?

(a) $\vec{E}(x, y, z) = E_x(y)\vec{e}_x + E_y(y)\vec{e}_y$

(c) $\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y)\vec{e}_x + E_y(x, y)\vec{e}_y$

(b) $\vec{E}(x, y, z) = E_x(x, y)\vec{e}_x + E_y(x, y)\vec{e}_y$

(d) $\|\vec{E}\|(x, y, z) = \|\vec{E}\|(x, y, 0)$

.....

**Entraînement 3.11 — Homogénéités.**

Dans les expressions suivantes, ρ , σ et λ sont des densités de charge volumique, surfacique et linéique. Le potentiel électrostatique est noté V et a , ℓ , h et r sont des longueurs.

a) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à une charge électrique.

(a) $4\pi a^2 \rho$

(b) $\lambda \pi a^2$

(c) $\rho \pi a^2 h$

(d) $\frac{\sigma \ell^3}{a}$

.....

b) Parmi les expressions suivantes, identifier celles qui sont homogènes à un champ électrostatique.

(a) $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

(b) $(V_2 - V_1)e$

(c) $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

(d) $\frac{\rho r}{\varepsilon_0}$

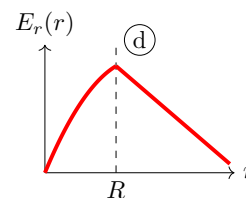
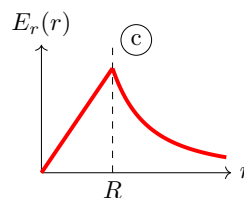
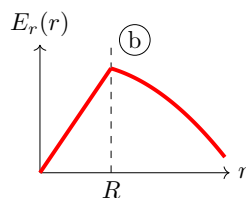
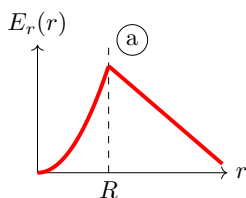
.....

**Entraînement 3.12 — Tracé d'une composante du champ.**

La composante radiale du champ électrostatique créé au point M par une sphère de centre O, de rayon R , dotée d'une densité volumique de charge ρ_0 , est donnée en fonction de la distance $r = OM$ par

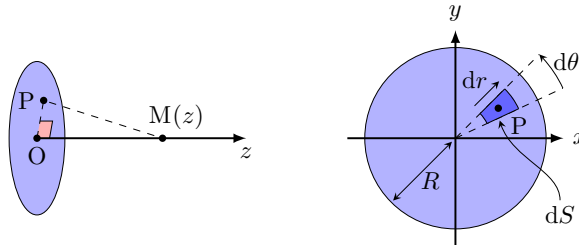
$$E_r(r < R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad E_r(r > R) = \frac{3\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Laquelle de ces courbes décrit l'évolution de E_r en fonction de r ?



Entraînement 3.13 — Calcul d'un champ électrostatique par intégration.

Un disque, d'axe (Oz) et de rayon R , possède une charge surfacique uniforme σ . On note P un point du disque tandis que M est un point de l'espace qui appartient à l'axe (Oz) .



a) Comment s'exprime l'aire élémentaire dS centrée sur $P(r, \theta)$?

(a) $dS = r dr dz$

(c) $dS = dx dz$

(b) $dS = r \sin(\theta) dr d\theta$

(d) $dS = r dr d\theta$

.....

b) Quelle est l'expression du produit scalaire $\vec{PM} \cdot \vec{e}_z$?

(a) $\vec{PM} \cdot \vec{e}_z = PM$

(c) $\vec{PM} \cdot \vec{e}_z = z$

(b) $\vec{PM} \cdot \vec{e}_z = dz$

(d) $\vec{PM} \cdot \vec{e}_z = r$

.....

c) Quelle est l'expression de la distance $PM = \|\vec{PM}\|$?

(a) $PM = z^2 + r^2$

(c) $PM = \sqrt{dz^2 + dr^2}$

(b) $PM = \sqrt{z^2 + r^2}$

(d) $PM = dr + dz$

.....

Le principe de superposition énonce que le champ électrostatique en M est la somme des champs électrostatiques créés par chaque élément de surface d'aire dS et de charge $dQ = \sigma dS$. L'expression du champ créé par une source ponctuelle permet alors d'exprimer la composante axiale $E_z = \vec{E} \cdot \vec{e}_z$ du champ créé par le disque sur l'axe (Oz) par :

$$E_z = \iint_P \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM} \cdot \vec{e}_z}{PM^3} = \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{\sigma r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

d) Calculer l'intégrale précédente à l'aide du changement de variable $u = r^2$.

.....

e) Simplifier l'expression obtenue en d) si $z \ll R$ afin de retrouver l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé.

.....

f) Sachant que $(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ à l'ordre 1 en ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$, simplifier l'expression obtenue en d) si $z \gg R$ afin de retrouver l'expression du champ créé par une charge ponctuelle $Q_0 = \pi R^2 \sigma$.

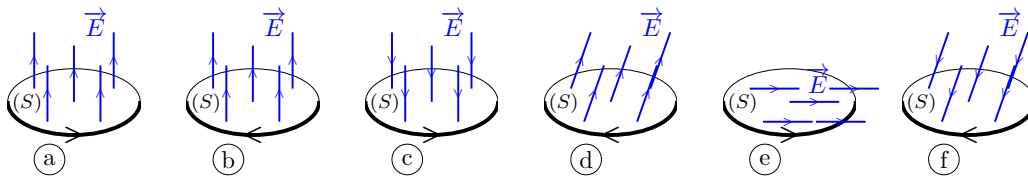
.....

Flux électrostatique

Entraînement 3.14 — Signe d'un flux électrostatique à travers une surface.



Le flux $\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface orientée (S) dépend de l'orientation de cette surface (voir ci-dessous la flèche sur chaque contour).



a) Quels sont les cas pour lesquels $\phi > 0$?

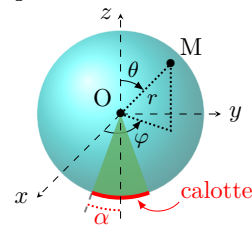
b) Que vaut ϕ dans le cas (e) ?

Entraînement 3.15 — Flux électrostatique à travers une calotte sphérique.



Une charge ponctuelle q , placée au centre O d'un repère sphérique, crée le champ électrostatique $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r$ avec (r, θ, φ) les coordonnées sphériques du point M.

La calotte sphérique représentée ci-contre (en deux dimensions) est la portion de sphère de rayon R qui intersecte le demi-cône d'axe de révolution (Oz) et de demi-angle $\alpha > 0$.



a) Comment s'exprime un élément de surface dS de la calotte sphérique ?

(a) $dS = R^2 \cos(\varphi) d\varphi d\theta$

(c) $dS = R \cos(\theta) d\theta d\varphi$

(b) $dS = R \sin(\varphi) d\varphi d\theta$

(d) $dS = R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$

.....

b) Comment s'exprime le flux ϕ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers la calotte sphérique ?

(a) $\phi = \int_{\varphi=\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \int_{\theta=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot R^2 \cos(\varphi) d\varphi d\theta \vec{e}_r$

(c) $\phi = \int_{\theta=\pi-\alpha}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{e}_r$

(b) $\phi = \int_{\varphi=-\alpha}^{\alpha} \int_{\theta=0}^{\pi} \vec{E} \cdot R^2 \cos(\varphi) d\varphi d\theta \vec{e}_r$

(d) $\phi = \int_{\theta=-\alpha}^{\alpha} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \vec{E} \cdot R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \vec{e}_r$

.....

c) Calculer la double intégrale. Écrire le résultat obtenu sous la forme $\phi = K(1 - \cos \alpha)$, avec K une constante à exprimer en fonction de q et ϵ_0

d) Réaliser l'application numérique de ϕ dans le cas où $\alpha = \pi$ et $q = e$

Entraînement 3.16 — Avec le théorème de Gauss.

Une distribution volumique, de charge volumique inconnue, crée un champ électrostatique dont l'expression en repérage sphérique est $\vec{E}(\mathbf{M}) = E_r \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a} \vec{e}_r$, où q et a sont des constantes positives.

a) Exprimer le flux électrostatique $\phi(\vec{E})$ à travers une sphère de rayon r en fonction de $E(r)$ et r .

.....

b) Exprimer la charge $Q = \epsilon_0 \phi(\vec{E})$ (théorème de Gauss) située à l'intérieur de la sphère de rayon r .

(a) $\frac{q}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$

(c) $q \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$

(b) $q \left(a + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$

(d) $-q e^{-r/a}$

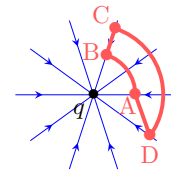
.....

c) Quelles sont les valeurs limites de Q pour $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow +\infty$?

Circulation du champ électrostatique – Potentiel électrostatique

**Entraînement 3.17 — Signe d'une circulation électrostatique le long d'un chemin.**

Les lignes du champ électrostatique $\vec{E}$ produit par une charge ponctuelle q négative convergent vers cette charge. La circulation $\mathcal{C} = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ le long d'un chemin orienté dépend de l'orientation de ce chemin.



Pour chaque chemin orienté, indiquer si la circulation $\mathcal{C}$ est positive, négative ou nulle.

a) A→B . b) B→C . c) C→D . d) D→A .

Entraînement 3.18 — Orientation du champ au sein d'un condensateur plan.

Le schéma ci-contre représente un condensateur plan dont les armatures sont portées aux potentiels $V_1 = -6 \text{ V}$ et $V_2 = 3 \text{ V}$. Deux surfaces équipotentielles sont représentées en pointillés.

a) Donner l'orientation du vecteur $\vec{\text{grad}} V$?

(a) $\vec{e}_x$

(b) $-\vec{e}_y$

(c) $-\vec{e}_x$

(d) $\vec{e}_z$

.....

b) Donner l'orientation du vecteur champ électrostatique $\vec{E}$?

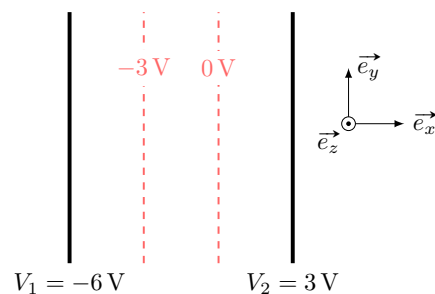
(a) $\vec{e}_x$

(b) $-\vec{e}_y$

(c) $-\vec{e}_x$

(d) $\vec{e}_z$

.....



Entraînement 3.19 — Circulation et différence de potentiel.

Soit un segment orienté allant d'un point A à un point B de coordonnées cartésiennes respectives $(a, 0)$ et $(2a, 2a)$. Le vecteur-déplacement élémentaire en repérage cartésien s'exprime comme $\vec{dl} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$.

a) Laquelle des relations suivantes est valable le long du segment AB ?

- (a) $dy = dx$ (b) $dy = 2 dx$ (c) $dx = 0$ (d) $dy = 0$

.....

Soit un champ $\vec{E} = E_0(1 - e^{-x/a})\vec{e}_x$, avec $a > 0$.

b) Sachant que le champ électrostatique est orienté dans le sens des potentiels électriques V décroissants, déterminer sans calcul lequel de $V(x = a)$ ou $V(x = 2a)$ est le potentiel le plus élevé

c) La circulation électrostatique sur le segment AB est reliée à la différence de potentiel électrique par

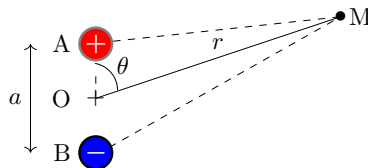
$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}.$$

Exprimer $V(A) - V(B)$ en fonction de E_0 et a

Entraînement 3.20 — Approximation dipolaire.

Soit un dipôle électrostatique constitué de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$, séparées par une distance $AB = a$. D'après le principe de superposition, le potentiel créé par ce doublet en un point M s'écrit

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} \right).$$



a) Laquelle de ces propositions donne l'expression de $AM = \|\vec{AM}\|$ au carré en fonction de a et θ ?

- (a) $AM^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar \sin(\theta)$ (c) $AM^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar \cos(\theta)$
 (b) $AM^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ar \cos(\theta)$

.....

On se place dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire loin du doublet de charges : $r \gg a$.

b) Réaliser un développement limité de $1/AM$ à l'ordre 1 en a/r

c) Même question pour $1/BM$

d) En déduire l'expression du potentiel $V(M)$ dans l'approximation dipolaire.

.....

 Entraînement 3.21 — Effet de pointe.



Un individu porte une charge négative, ce qui modifie localement les propriétés du champ électrostatique. La figure ci-dessous représente qualitativement les lignes de champ en trait plein tandis que les (surfaces) équipotentielles sont illustrées en pontillés. L'échelle du schéma est 1 division $\leftrightarrow$ 40 cm.

a) Comment sont orientées les lignes de champ électrostatique ?

(a) vers l'individu

(b) sortant de l'individu

b) Quel est le signe des valeurs de potentiel électrostatique des équipotentielles représentées ?

c) Évaluer l'ordre de grandeur du champ en A .

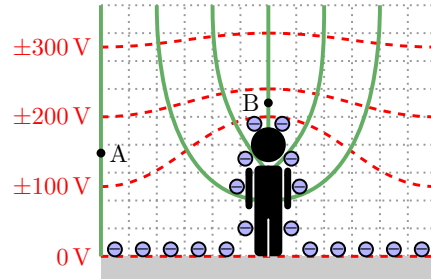
d) Indiquer par une analyse de la carte de champ, et sans aucun calcul, laquelle de ces propositions est vraisemblable :

(a) $\vec{E}(B) > \vec{E}(A)$

(c) $\vec{E}(B) = \vec{E}(A)$

(b) $\|\vec{E}(B)\| > \|\vec{E}(A)\|$

(d) $\|\vec{E}(B)\| < \|\vec{E}(A)\|$



Toujours plus d'électrostatique

Entraînement 3.22 — Charge totale et charge moyenne.



La charge totale d'une distribution occupant un volume V s'exprime comme $Q = \iiint_{(V)} \rho dV$ avec ρ la charge volumique et dV le volume élémentaire dont les expressions en repérages cartésien, cylindrique et sphérique sont respectivement $dV = dx dy dz$, $dV = r dr d\theta dz$ et $dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$.

Déterminer la charge totale et la charge volumique moyenne $\rho_m = Q/V$ des distributions ci-dessous.

On notera que ρ_0 est une constante homogène à une charge volumique.

a) Un pavé, d'épaisseur $2H$ selon la direction $\vec{e}_z$ ($-H \leq z \leq +H$) et de base d'aire $\mathcal{A}$ a une charge volumique $\rho(x, y, z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z^2}{H^2}\right)$.

b) Un cylindre, de rayon R et de hauteur H , a une charge volumique $\rho(r, \theta, z) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$.

c) L'espace (infini) a une charge volumique $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \frac{R^2}{r^2} \exp\left(-\frac{r}{R}\right)$ où R est une constante homogène à une distance.

Annale



EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE TSI

PHYSIQUE

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit.

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Données mathématiques :

Opérateurs mathématiques en coordonnées cartésiennes dans le repère cartésien orthonormé direct $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Divergence :
$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel :
$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

Laplacien d'un champ scalaire :
$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Laplacien d'un champ vectoriel :
$$\Delta \vec{A} = \begin{cases} \Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

Relations concernant les opérateurs mathématiques :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{Z}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{Z}) - \Delta \vec{Z}$$

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} U)$$

Trigonométrie :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Troisième problème : A propos du théorème de Gauss

Dans tout le problème, ε_0 représente la permittivité diélectrique de l'air, égale à celle du vide.

Première partie : Le théorème de Gauss

1 – Énoncer le théorème de Gauss relatif au flux sortant du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une surface fermée S contenant la charge électrique Q_{int} .

Donner l'expression de l'équation de Maxwell qui permet de démontrer le théorème de Gauss.

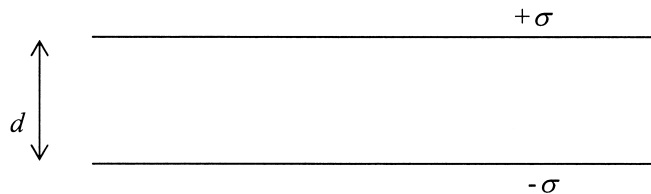
Deuxième partie : Condensateur plan

2 – On considère un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ positive.

En considérant les propriétés de symétrie de la distribution de charges, montrer que le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par un plan infini uniformément chargé avec une densité surfacique σ est orthogonal au plan.

Démontrer que $\vec{E}$ est tel que sa norme E vaut $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Représenter sur un schéma le vecteur $\vec{E}$ de part et d'autre du plan. On indiquera avec précision la surface de Gauss choisie.

3 – Soit un condensateur plan constitué par deux plans infinis, parallèles, uniformément chargés et séparés par une distance d . Le plan supérieur étant chargé avec une densité surfacique σ positive et le plan inférieur étant chargé avec une densité $-\sigma$.

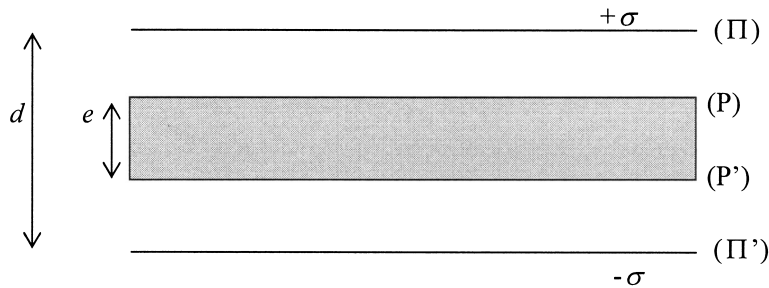


3.1 – En utilisant le théorème de superposition, déduire de la question précédente le champ électrostatique en tout point de l'espace.

3.2 – Déterminer la différence de potentiel U entre les deux plans du condensateur. On exprimera U en fonction de ε_0 , σ et d . Identifier clairement, en le justifiant, le plan dont le potentiel est le plus élevé.

3.3 – Définir et déterminer la capacité C du condensateur par unité de surface. On exprimera C en fonction de ε_0 et d .

4 – On introduit entre les deux plaques du condensateur plan précédent une plaque métallique parallélépipédique d'épaisseur $e < d$ parallèle aux armatures du condensateur. L'épaisseur e est donc une grandeur finie, mais on considère que les autres dimensions de la plaque métallique sont infinies.



On admet que le champ électrostatique est nul à l'intérieur du métal.

Justifier le fait qu'il apparaîtra des charges électriques sur les surfaces supérieure P et inférieure P' de la plaque métallique. Déterminer le signe de ces charges. On pourra s'aider d'un schéma succinct.

5 – En utilisant le théorème de Gauss sur une surface que l'on précisera, déterminer les densités surfaciques de charge σ_P et $\sigma_{P'}$, qui apparaissent sur les surfaces P et P' de la plaque métallique.

Exprimer σ_P et $\sigma_{P'}$ en fonction de σ .

6.1 – Déterminer la valeur du champ électrostatique en un point du condensateur extérieur à la plaque métallique (entre P et Π d'une part et entre P' et Π' d'autre part).

En déduire la différence de potentiel U' entre les deux armatures du condensateur. On exprimera U' en fonction de σ , e , d et ϵ_0 .

6.2 – En déduire la capacité surfacique C' du condensateur ainsi obtenu. On exprimera C' en fonction de e , d et ϵ_0 . Conclure quant à l'influence de la plaque métallique sur la capacité surfacique du condensateur.