

Leçon 19 : conduction thermique

E. Capitaine

TSI 2 - Lycée Charles Coëffin

16 mars 2026

Plan

- 1 Introduction
- 2 Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique
 - Équilibre thermodynamique local
 - Vecteur densité de flux ou de courant thermique
 - Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier
 - Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton
- 3 Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques
 - Uniformité du flux au travers du système
 - Profil de température en régime stationnaire
 - Analogies entre conduction électrique et conduction thermique
 - Calcul des résistances thermiques
 - Association de résistances thermiques
- 4 Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique
 - Équation de diffusion à une dimension cartésienne
 - Durée et distance caractéristiques de diffusion
 - Équation de diffusion à trois dimensions

Plan

1 Introduction

2 Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

- Équilibre thermodynamique local
- Vecteur densité de flux ou de courant thermique
- Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier
- Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton

3 Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

- Uniformité du flux au travers du système
- Profil de température en régime stationnaire
- Analogies entre conduction électrique et conduction thermique
- Calcul des résistances thermiques
- Association de résistances thermiques

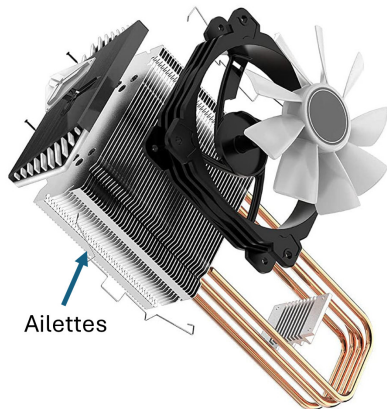
4 Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

- Équation de diffusion à une dimension cartésienne
- Durée et distance caractéristiques de diffusion
- Équation de diffusion à trois dimensions

Introduction

Cas introductif

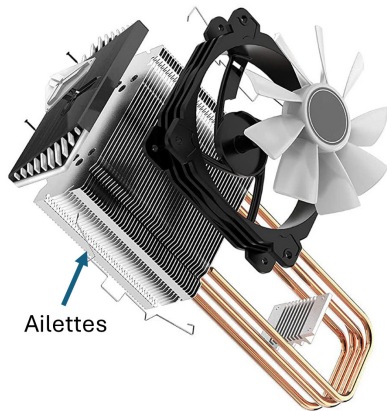
Pour améliorer le refroidissement de circuits électroniques ou de moteurs, on y ajoute des **ailettes de refroidissement** en nombre et forme variés afin d'évacuer de la chaleur vers l'air ambiant par transfert conducto-convectif.



Introduction

Cas introductif

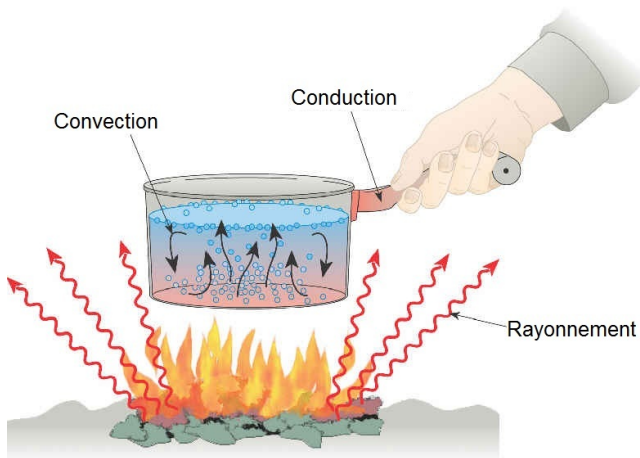
Pour améliorer le refroidissement de circuits électroniques ou de moteurs, on y ajoute des **ailettes de refroidissement** en nombre et forme variés afin d'évacuer de la chaleur vers l'air ambiant par transfert conducto-convectif.



Pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?

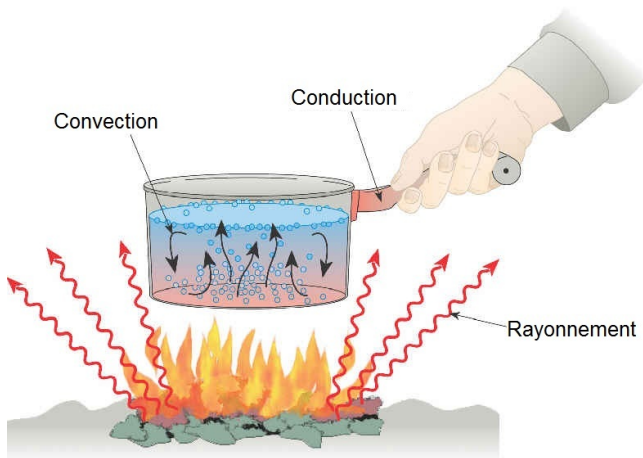
Introduction

Pour répondre à cette question nous allons étudier les **transferts thermiques** que l'on a désigné jusque là par Q . Il existe trois modes de transfert thermiques.



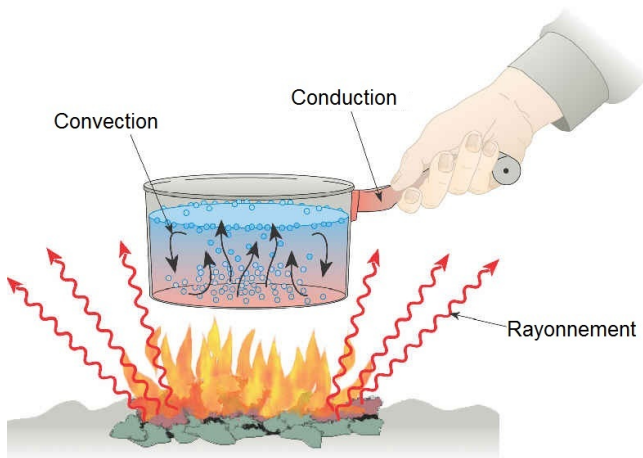
Introduction

La conduction ou diffusion thermique : dans un solide ou d'un liquide immobile, les molécules, globalement fixes, se communiquent de l'énergie de proche en proche par collisions. ❤️



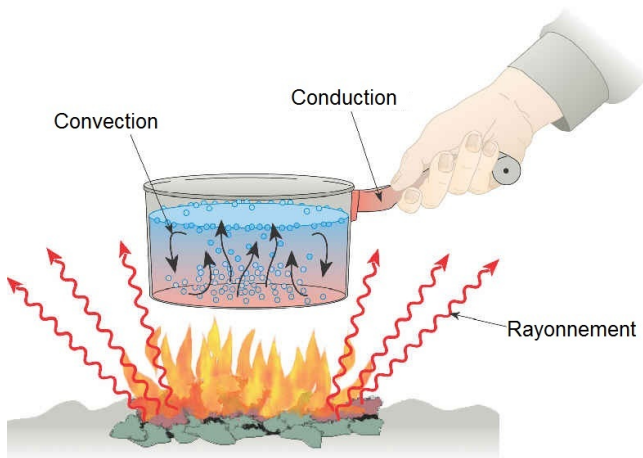
Introduction

La convection : un fluide en mouvement au niveau macroscopique reçoit de l'énergie thermique dans les zones chaudes et en cède aux zones froides. ❤️



Introduction

Le rayonnement électromagnétique : tout corps avec une température différente de zéro émet de l'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques absorbées par les autres corps. ❤️



Plan

1 Introduction

2 Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

- Équilibre thermodynamique local
- Vecteur densité de flux ou de courant thermique
- Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier
- Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton

3 Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

- Uniformité du flux au travers du système
- Profil de température en régime stationnaire
- Analogies entre conduction électrique et conduction thermique
- Calcul des résistances thermiques
- Association de résistances thermiques

4 Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

- Équation de diffusion à une dimension cartésienne
- Durée et distance caractéristiques de diffusion
- Équation de diffusion à trois dimensions

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Équilibre thermodynamique local

Échelle macroscopique : prenons pour exemple la salle de classe. Les grandeurs d'états intensives (T , P) sont-elles homogènes ?

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Équilibre thermodynamique local

Échelle macroscopique : prenons pour exemple la salle de classe. Les grandeurs d'états intensives (T , P) sont-elles homogènes ?

Non, la température est plus importante près de la porte et des fenêtre, et moins haute près de la sortie du climatiseur. Donc le système “air de la classe” **n'est pas à l'équilibre à l'échelle macroscopique** car ses variables d'états intensives ne sont pas définies à cette échelle.

Néanmoins, si on place un thermomètre en différents endroits de la pièce on pourra mesurer une température, donc cette grandeur sera définie. Pourquoi ?

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Équilibre thermodynamique local

Échelle macroscopique : prenons pour exemple la salle de classe. Les grandeurs d'états intensives (T , P) sont-elles homogènes ?

Non, la température est plus importante près de la porte et des fenêtres, et moins haute près de la sortie du climatiseur. Donc le système "air de la classe" **n'est pas à l'équilibre à l'échelle macroscopique** car ses variables d'états intensives ne sont pas définies à cette échelle.

Néanmoins, si on place un thermomètre en différents endroits de la pièce on pourra mesurer une température, donc cette grandeur sera définie. Pourquoi ?

Car le thermomètre mesurera la température d'un système mésoscopique : une petite zone par rapport à toute la pièce. Il en va de même pour les autres grandeurs intensives qui sont **définies pour un système d'échelle mésoscopique**.

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Équilibre thermodynamique local

On appelle **état d'équilibre thermodynamique local** un état du système dans lequel l'équilibre est atteint à l'échelle mésoscopique mais pas à l'échelle macroscopique. ❤️

On découpera donc un système macroscopique hors-équilibre en plusieurs sous-systèmes mésoscopique à l'équilibre : on reprend l'idée de découpage de l'espace vue dans l'approche eulérienne afin d'obtenir **des champs de grandeurs intensives** : champ de température, pression, enthalpie massique, entropie massique, etc.

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Équilibre thermodynamique local

On appelle **état d'équilibre thermodynamique local** un état du système dans lequel l'équilibre est atteint à l'échelle mésoscopique mais pas à l'échelle macroscopique. ❤️

On découpera donc un système macroscopique hors-équilibre en plusieurs sous-systèmes mésoscopique à l'équilibre : on reprend l'idée de découpage de l'espace vue dans l'approche eulérienne afin d'obtenir **des champs de grandeurs intensives** : champ de température, pression, enthalpie massique, entropie massique, etc.

Ainsi, en considérant des systèmes à l'**équilibre**, on pourra appliquer les **principes de la thermodynamique**.

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Vecteur densité de flux ou de courant thermique

Les transferts thermiques se font "du chaud vers le froid", on peut donc définir une grandeur vectoriel donnant la direction et le sens des transferts thermiques et dont la norme sera d'autant plus grand que le transfert sera important.

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Vecteur densité de flux ou de courant thermique

Les transferts thermiques se font "du chaud vers le froid", on peut donc définir une grandeur vectoriel donnant la direction et le sens des transferts thermiques et dont la norme sera d'autant plus grand que le transfert sera important.

On appelle **vecteur densité de flux thermique** ou **densité de courant thermique** $\vec{j}_{th}$ le vecteur dont le flux au travers d'une surface orientée S est égal à la puissance thermique qui la traverse 

$$\frac{Q}{\Delta t} = \mathcal{P}_{th} \equiv \Phi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$$

avec $\mathcal{P}_{th}$ le flux thermique ou la puissance thermique en W et donc $\vec{j}_{th}$ en $W \cdot m^{-2}$.

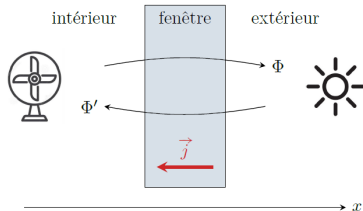
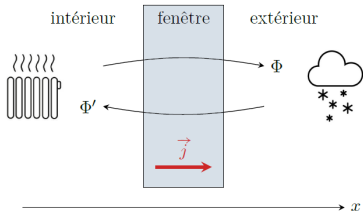
Le vecteur densité de flux thermique contient a priori les contributions de chaque mode de transfert thermique

$$\vec{j}_{th} = \vec{j}_{conduction} + \vec{j}_{convection} + \vec{j}_{rayonnement}.$$

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Vecteur densité de flux ou de courant thermique

L'orientation de $d\vec{S}$ est **orienté vers le système d'étude**.



Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

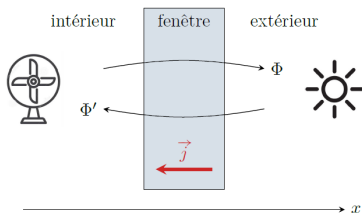
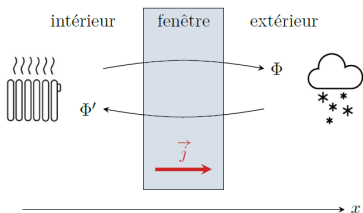
Vecteur densité de flux ou de courant thermique

L'orientation de $d\vec{S}$ est **orienté vers le système d'étude**.

Cas 1 : hiver. On considère que le système est l'intérieur. Donc

$d\vec{S} =$. Pour $\vec{j}_{th} = j_{th}\vec{u}_x$ il vient que j_{th} . Ainsi

$$\Phi' =$$



Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

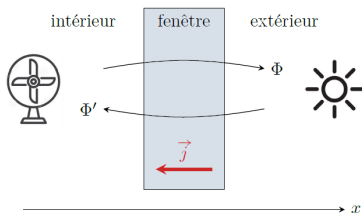
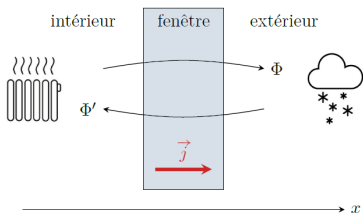
Vecteur densité de flux ou de courant thermique

L'orientation de $\vec{dS}$ est **orienté vers le système d'étude**.

Cas 1 : hiver. On considère que le système est l'intérieur. Donc

$\vec{dS} = -dS\vec{u}_x$. Pour $\vec{j}_{th} = j_{th}\vec{u}_x$ il vient que j_{th} . Ainsi

$$\Phi' =$$



Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

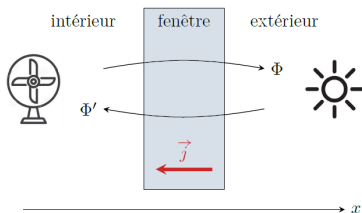
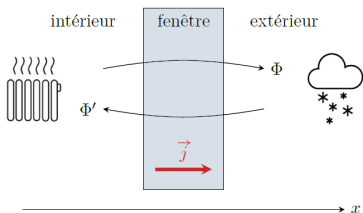
Vecteur densité de flux ou de courant thermique

L'orientation de $\vec{dS}$ est **orienté vers le système d'étude**.

Cas 1 : hiver. On considère que le système est l'intérieur. Donc

$\vec{dS} = -dS\vec{u}_x$. Pour $\vec{j}_{th} = j_{th}\vec{u}_x$ il vient que $j_{th} > 0$. Ainsi

$$\Phi' =$$



Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Vecteur densité de flux ou de courant thermique

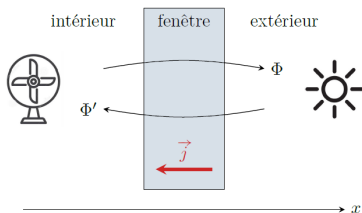
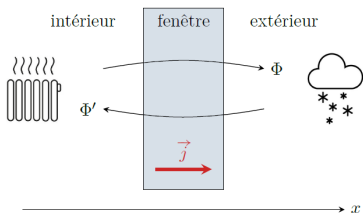
L'orientation de $d\vec{S}$ est **orienté vers le système d'étude**.

Cas 1 : hiver. On considère que le système est l'intérieur. Donc

$d\vec{S} = -dS\vec{u}_x$. Pour $\vec{j}_{th} = j_{th}\vec{u}_x$ il vient que $j_{th} > 0$. Ainsi

$$\Phi' = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = - \iint_S j_{th} dS < 0.$$

Le flux thermique allant vers l'intérieur Φ' est négatif : la chaleur va bien de l'intérieur plus chaud vers l'extérieur plus froid.



Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

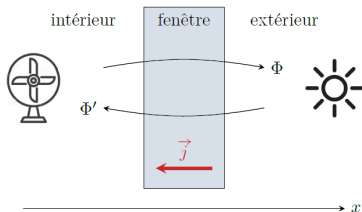
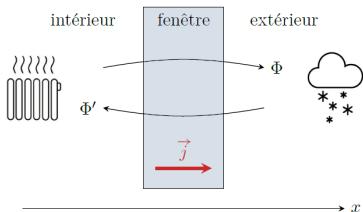
Vecteur densité de flux ou de courant thermique

L'orientation de $\vec{dS}$ est **orienté vers le système d'étude**.

Cas 2 : été. On considère que le système est l'extérieur. Donc $\vec{dS} =$.

Pour $\vec{j}_{th} = -j_{th}\vec{u}_x$ il vient que j_{th} . Ainsi

$$\Phi =$$



Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

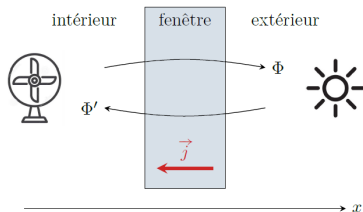
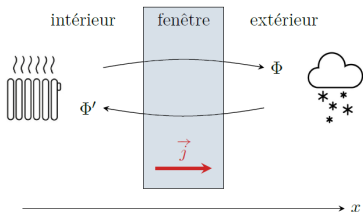
Vecteur densité de flux ou de courant thermique

L'orientation de $d\vec{S}$ est **orienté vers le système d'étude**.

Cas 2 : été. On considère que le système est l'extérieur. Donc $d\vec{S} = dS\vec{u}_x$.

Pour $\vec{j}_{th} = -j_{th}\vec{u}_x$ il vient que j_{th} . Ainsi

$$\Phi =$$



Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

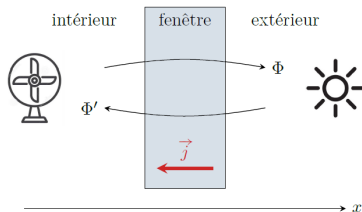
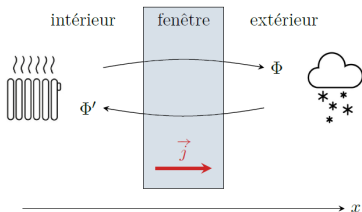
Vecteur densité de flux ou de courant thermique

L'orientation de $d\vec{S}$ est **orienté vers le système d'étude**.

Cas 2 : été. On considère que le système est l'extérieur. Donc $d\vec{S} = dS\vec{u}_x$.

Pour $\vec{j}_{th} = -j_{th}\vec{u}_x$ il vient que $j_{th} > 0$. Ainsi

$$\Phi =$$



Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

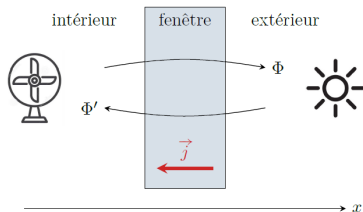
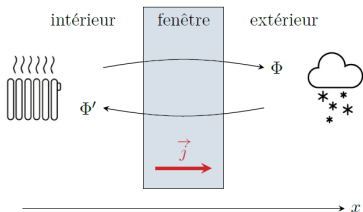
Vecteur densité de flux ou de courant thermique

L'orientation de $d\vec{S}$ est **orienté vers le système d'étude**.

Cas 2 : été. On considère que le système est l'extérieur. Donc $d\vec{S} = dS\vec{u}_x$.

Pour $\vec{j}_{th} = -j_{th}\vec{u}_x$ il vient que $j_{th} > 0$. Ainsi

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = - \iint_S j_{th} dS < 0.$$



Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Vecteur densité de flux ou de courant thermique

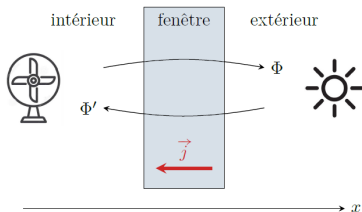
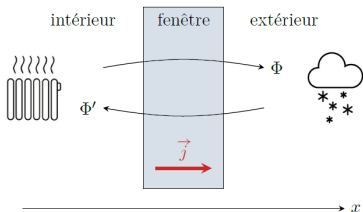
L'orientation de $d\vec{S}$ est **orienté vers le système d'étude**.

Cas 2 : été. On considère que le système est l'extérieur. Donc $d\vec{S} = dS\vec{u}_x$.

Pour $\vec{j}_{th} = -j_{th}\vec{u}_x$ il vient que $j_{th} > 0$. Ainsi

$$\Phi = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = - \iint_S j_{th} dS < 0.$$

Le flux thermique allant vers l'extérieur Φ est négatif : la chaleur va bien de l'extérieur plus chaud vers l'intérieur plus froid.



Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier

En 1807, Joseph Fourier découvre une loi phénoménologique gouvernant les **échanges thermiques par conduction**.

Loi de Fourier : le vecteur densité de flux thermique par conduction est opposé au gradient de température

$$\vec{j}_{\text{cond}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad \heartsuit$$

avec λ la **conductivité thermique** du matériau dans lequel a lieu le phénomène de conduction exprimée en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. ♥

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier

En 1807, Joseph Fourier découvre une loi phénoménologique gouvernant les **échanges thermiques par conduction**.

Loi de Fourier : le vecteur densité de flux thermique par conduction est opposé au gradient de température

$$\vec{j}_{\text{cond}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$



avec λ la **conductivité thermique** du matériau dans lequel a lieu le phénomène de conduction exprimée en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.



De même qu'un torrent s'écoule vers les altitudes les plus basses, "**la chaleur s'écoule vers les températures les plus basses**" : le gradient de température indique la direction selon laquelle la température augmente, il est donc logique que $\vec{j}_{\text{cond}}$, qui va du chaud vers le froid, lui soit opposé.

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier

- Pour un bon conducteur thermique comme les métaux
 $\lambda \simeq 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier

- Pour un bon conducteur thermique comme les métaux $\lambda \simeq 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Pour un isolant thermique comme l'air $\lambda \simeq 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton

Les échanges thermiques au sein d'un matériau sont pilotés par les **conditions aux limites** imposées aux interfaces entre le matériau et son environnement.

La **température** T n'est **pas nécessairement continue** à une interface entre deux milieux, mais le **flux thermique** Φ et le **vecteur densité de flux** $\vec{j}_{\text{th}}$ sont **toujours continus**. ❤️

Lorsque la température est continue, les deux milieux sont dits en **contact thermique parfait**. ❤️

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton

Interface solide-fluide : loi de Newton

Considérons un fluide de température T_{flu} circulant autour d'un solide de température $T_{\text{sol}} \neq T_{\text{flu}}$. Comme le fluide est en mouvement, les deux phénomènes de conduction et convection contribuent aux échanges d'énergie : ces échanges sont qualifiés de **conducto-convectifs**.

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton

Interface solide-fluide : loi de Newton

Considérons un fluide de température T_{flu} circulant autour d'un solide de température $T_{\text{sol}} \neq T_{\text{flu}}$. Comme le fluide est en mouvement, les deux phénomènes de conduction et convection contribuent aux échanges d'énergie : ces échanges sont qualifiés de **conducto-convectifs**.

Loi de Newton : le flux thermique reçu par le solide de la part du fluide est proportionnel à l'écart de température entre eux et à la surface d'échange

$$\mathcal{P}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} = \Phi_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} = hS (T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}})$$



avec h le **coefficient d'échange** ou **coefficient conducto-convectif** en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ caractéristique phénoménologique du fluide et du solide.



Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton

Interface solide-fluide : loi de Newton

Considérons un fluide de température T_{flu} circulant autour d'un solide de température $T_{\text{sol}} \neq T_{\text{flu}}$. Comme le fluide est en mouvement, les deux phénomènes de conduction et convection contribuent aux échanges d'énergie : ces échanges sont qualifiés de **conducto-convectifs**.

Loi de Newton : le flux thermique reçu par le solide de la part du fluide est proportionnel à l'écart de température entre eux et à la surface d'échange

$$\mathcal{P}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} = \Phi_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} = hS (T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}})$$



avec h le **coefficient d'échange** ou **coefficient conducto-convectif** en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ caractéristique phénoménologique du fluide et du solide.



À l'échelle mésoscopique, cela se traduit par une densité de courant thermique telle que

$$\vec{j}_{\text{th}} = h (T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}}) \vec{n}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}}.$$

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton

$$\mathcal{P}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} = hS (T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}}) \quad \text{et} \quad \vec{j}_{\text{th}} = h (T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}}) \vec{n}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}}$$

- Si $T_{\text{flu}} > T_{\text{sol}}$, $T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}} > 0$, donc $\mathcal{P}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} > 0$ et $\vec{j}$ dans le sens de $\vec{n}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}}$, la chaleur va bien du fluide plus chaud vers le solide plus froid.

Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique

Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton

$$\mathcal{P}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} = hS (T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}}) \quad \text{et} \quad \vec{j}_{\text{th}} = h (T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}}) \vec{n}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}}$$

- Si $T_{\text{flu}} > T_{\text{sol}}$, $T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}} > 0$, donc $\mathcal{P}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} > 0$ et $\vec{j}$ dans le sens de $\vec{n}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}}$, la chaleur va bien du fluide plus chaud vers le solide plus froid.
- Si $T_{\text{flu}} < T_{\text{sol}}$, $T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}} < 0$, donc $\mathcal{P}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} < 0$ et $\vec{j}$ opposé à $\vec{n}_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}}$, la chaleur va bien du solide plus chaud vers le fluide plus froid.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique
 - Équilibre thermodynamique local
 - Vecteur densité de flux ou de courant thermique
 - Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier
 - Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton
- 3 Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques
 - Uniformité du flux au travers du système
 - Profil de température en régime stationnaire
 - Analogies entre conduction électrique et conduction thermique
 - Calcul des résistances thermiques
 - Association de résistances thermiques
- 4 Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique
 - Équation de diffusion à une dimension cartésienne
 - Durée et distance caractéristiques de diffusion
 - Équation de diffusion à trois dimensions

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Uniformité du flux au travers du système

On suppose dans cette partie que le **régime permanent** (ou stationnaire) est atteint, c'est-à-dire que la température dans le système macroscopique peut-être inhomogène mais que sa valeur en chaque point est **constante dans le temps**.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Uniformité du flux au travers du système

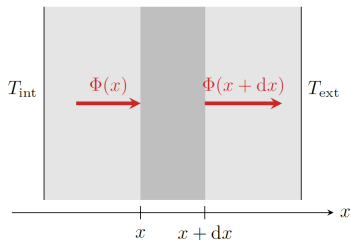
On suppose dans cette partie que le **régime permanent** (ou stationnaire) est atteint, c'est-à-dire que la température dans le système macroscopique peut-être inhomogène mais que sa valeur en chaque point est **constante dans le temps**.

On pourra étudier un système en régime permanent lorsque la durée caractéristique des conditions aux limites τ_c sera très grande par rapport à la durée de la diffusion thermique τ_{diff} que nous verrons dans la dernière partie. On nomme cette approximation l'**ARQS thermique**.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

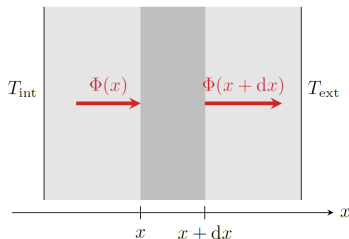
Uniformité du flux au travers du système

Considérons une plaque plane d'épaisseur e et de section S . On étudie le système à une dimension afin que la température ne varie que selon un axe : $T(x)$. On oriente tous les flux dans le sens des x croissants.



Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Uniformité du flux au travers du système



Comme la situation correspond à une transformation monobare, on effectue un bilan enthalpique sur une tranche mésoscopique de la plaque comprise entre x et $x + dx$:

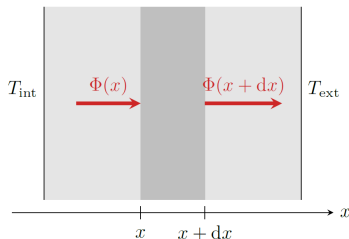
$$dH = \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} = \Phi(x)dt - \Phi(x + dx)dt \simeq -\frac{d\Phi}{dx}dt$$

En régime permanent il vient que

donc

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Uniformité du flux au travers du système



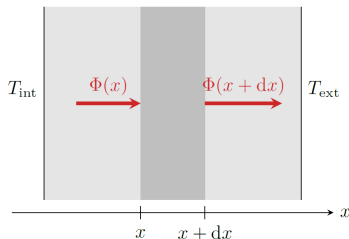
Comme la situation correspond à une transformation monobare, on effectue un bilan enthalpique sur une tranche mésoscopique de la plaque comprise entre x et $x + dx$:

$$dH = \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} = \Phi(x)dt - \Phi(x + dx)dt \simeq -\frac{d\Phi}{dx}dt$$

En régime permanent il vient que $dH = 0$ donc

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Uniformité du flux au travers du système



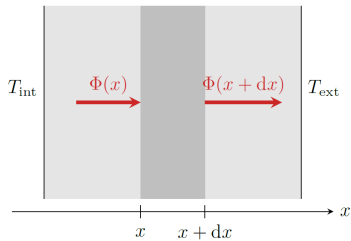
Comme la situation correspond à une transformation monobare, on effectue un bilan enthalpique sur une tranche mésoscopique de la plaque comprise entre x et $x + dx$:

$$dH = \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} = \Phi(x)dt - \Phi(x + dx)dt \simeq -\frac{d\Phi}{dx}dt$$

En régime permanent il vient que $dH = 0$ donc $d\Phi/dx = 0$.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Uniformité du flux au travers du système

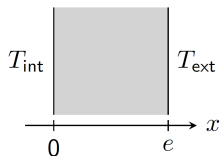


À une dimension cartésienne et en régime permanent, le flux thermique Φ est le même au travers de toute section du système, indépendamment de l'abscisse x de la section considérée. On dit que **le flux thermique est conservatif**. ❤️

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Profil de température en régime stationnaire

Application : on considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S ci-contre. On suppose le régime permanent atteint et que la température au sein du mur ne dépend que de x : $T(x)$.

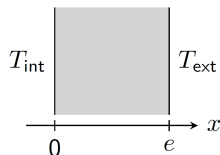


Déterminer le profil de température à l'intérieur du mur $T(x)$ en supposant un contact thermique parfait avec l'air environnant de température T_{int} et T_{ext} de part et d'autre du mur.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Profil de température en régime stationnaire

Application : on considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S ci-contre. On suppose le régime permanent atteint et que la température au sein du mur ne dépend que de x : $T(x)$.



Exprimons le flux thermique $\Phi(x)$ en un point x quelconque du mur

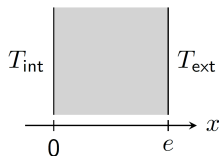
$$\Phi(x) = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} = j_{\text{th}} S$$

en considérant le vecteur densité thermique uniforme sur S . Or, en régime permanent $\Phi(x) \equiv \Phi = \text{cst}$.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Profil de température en régime stationnaire

Application : on considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S ci-contre. On suppose le régime permanent atteint et que la température au sein du mur ne dépend que de x : $T(x)$.



D'après la loi de Fourier

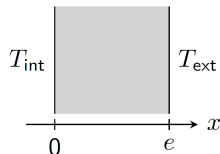
$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(x) \quad \Longleftrightarrow \quad j_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi dx = -\lambda S dT.$$

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Profil de température en régime stationnaire

Application : on considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S ci-contre. On suppose le régime permanent atteint et que la température au sein du mur ne dépend que de x : $T(x)$.



On peut alors intégrer la relation précédente avec une condition aux limites : en $x = 0$ $T(0) = T_{\text{int}}$, ainsi

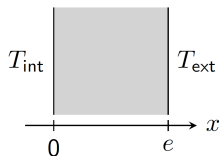
$$\Phi \int_0^x dx = -\lambda S \int_{T_{\text{int}}}^{T(x)} dT \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi x = -\lambda S (T(x) - T_{\text{int}})$$
$$T(x) = T_{\text{int}} - \frac{\Phi}{\lambda S} x.$$

Il reste à déterminer Φ qui est inconnu à partir de l'autre condition aux limites $T(x = e) = T_{\text{ext}}$.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Profil de température en régime stationnaire

Application : on considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S ci-contre. On suppose le régime permanent atteint et que la température au sein du mur ne dépend que de x : $T(x)$.



En utilisant l'expression de $T(x)$ trouvée, il vient que

$$T_{\text{ext}} = T_{\text{int}} - \frac{\Phi}{\lambda S} e \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi = \lambda S \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{e}.$$

Ainsi le profil de température est finalement

$$T(x) = T_{\text{int}} - \frac{\Phi}{\lambda S} x = T_{\text{int}} + (T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}) \frac{x}{e}.$$

En régime permanent, le profil de température à une dimension cartésienne varie de manière **linéaire**. ❤

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Analogies entre conduction électrique et conduction thermique

On peut effectuer des analogies entre la conduction électrique et la conduction thermique afin d'appliquer des lois et des propriétés électrocinétiques à la conduction thermique.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Analogies entre conduction électrique et conduction thermique

On peut effectuer des analogies entre la conduction électrique et la conduction thermique afin d'appliquer des lois et des propriétés électrocinétiques à la conduction thermique.



$$\text{Intensité électrique : } I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Flux ou puissance thermique : } \Phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S}.$$

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Analogies entre conduction électrique et conduction thermique

On peut effectuer des analogies entre la conduction électrique et la conduction thermique afin d'appliquer des lois et des propriétés électrocinétiques à la conduction thermique.



$$\text{Intensité électrique : } I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{Flux ou puissance thermique : } \Phi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S}.$$



$$\text{Loi des noeuds : } \sum_i I_e = I_s$$

$$\text{Conservation du flux : } \Phi_e = \Phi_s.$$

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Analogies entre conduction électrique et conduction thermique

On peut effectuer des analogies entre la conduction électrique et la conduction thermique afin d'appliquer des lois et des propriétés électrocinétiques à la conduction thermique.



Tension ou différence de potentiels : $U_{12} = \Delta_{12}V = V_1 - V_2$

Différence de températures : $\Delta_{12}T = T_1 - T_2$.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

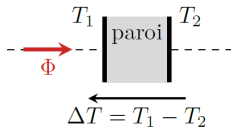
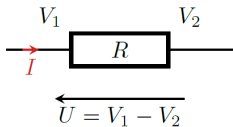
Analogies entre conduction électrique et conduction thermique

On peut effectuer des analogies entre la conduction électrique et la conduction thermique afin d'appliquer des lois et des propriétés électrocinétiques à la conduction thermique.



$$\text{Loi d'Ohm (récepteur)} : U_{12} = RI$$

$$\text{Loi d'Ohm (thermique)} : \Delta T_{12} = R_{\text{th}} \Phi.$$



Plus la résistance thermique de la paroi est importante, plus la différence de température est importante : une paroi avec une **bonne résistance** empêche le flux de passer donc maintient un **bon écart de températures**.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

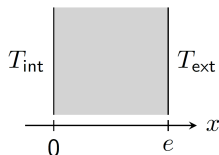
Calcul des résistances thermiques

Pour obtenir la résistance thermique d'une paroi, on effectue le même travail que celui d'obtention du profil de température $T(x)$ mais on intègre cette fois **entre les deux conditions aux limites**.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Calcul des résistances thermiques

Application : on considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S ci-contre. On suppose le régime permanent atteint et que la température au sein du mur ne dépend que de x : $T(x)$.

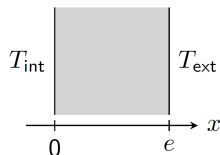


Déterminer la résistance thermique du mur R_{th} en supposant un contact thermique parfait avec l'air environnant de température T_{int} et T_{ext} de part et d'autre du mur.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Calcul des résistances thermiques

Application : on considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S ci-contre. On suppose le régime permanent atteint et que la température au sein du mur ne dépend que de x : $T(x)$.



Exprimons le flux thermique $\Phi(x)$ en un point x quelconque du mur

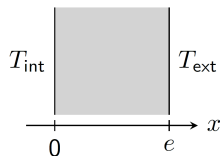
$$\Phi(x) = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} = j_{\text{th}} S$$

en considérant le vecteur densité thermique uniforme sur S . Or, en régime permanent $\Phi(x) \equiv \Phi = \text{cst}$.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Calcul des résistances thermiques

Application : on considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S ci-contre. On suppose le régime permanent atteint et que la température au sein du mur ne dépend que de x : $T(x)$.



D'après la loi de Fourier

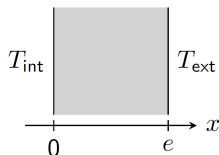
$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(x) \quad \Longleftrightarrow \quad j_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi dx = -\lambda S dT.$$

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Calcul des résistances thermiques

Application : on considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S ci-contre. On suppose le régime permanent atteint et que la température au sein du mur ne dépend que de x : $T(x)$.



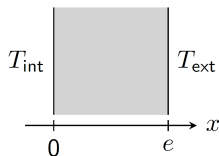
On peut alors intégrer la relation précédente avec deux conditions aux limites : en $x = 0$ $T(0) = T_{\text{int}}$ et en $x = e$ $T(e) = T_{\text{ext}}$, ainsi

$$\Phi \int_0^e dx = -\lambda S \int_{T_{\text{int}}}^{T_{\text{ext}}} dT \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi e = -\lambda S (T_{\text{ext}} - T_{\text{int}})$$
$$T_{\text{int}} - T_{\text{ext}} = \frac{e}{\lambda S} \Phi.$$

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Calcul des résistances thermiques

Application : on considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S ci-contre. On suppose le régime permanent atteint et que la température au sein du mur ne dépend que de x : $T(x)$.



On fait l'analogie avec la loi d'Ohm électrocinétique pour identifier la résistance thermique

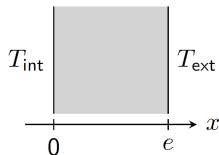
$$T_{\text{int}} - T_{\text{ext}} = \frac{e}{\lambda S} \Phi \quad \text{et} \quad U = RI$$
$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}. \quad \text{♥}$$

La résistance thermique est inversement proportionnelle à la conductivité thermique λ et à la surface S , et proportionnelle à la largeur e .

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Calcul des résistances thermiques

Application : on considère le mur d'une maison d'épaisseur e et de section S ci-contre. On suppose le régime permanent atteint et que la température au sein du mur ne dépend que de x : $T(x)$.



La résistance thermique est inversement proportionnelle à la conductivité thermique λ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et à la surface S , et proportionnelle à la largeur e : si le mur conduit bien la chaleur il n'est pas résistant ; si on augmente la surface du mur on facilite l'apport de chaleur ; si on augmente l'épaisseur du mur on empêche l'apport de chaleur.

Une étude dimensionnelle montre que l'unité de la résistance thermique est

$$[R] = \left[\frac{e}{\lambda S} \right] = \frac{\text{m}}{\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times \text{m}^2} = \text{K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Calcul des résistances thermiques

Résistance thermique d'interface : reprenons le cas de la conducto-convection, soit le transfert thermique entre une fluide et un solide

$$\Phi_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} = hS (T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}})$$
$$T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}} = \frac{1}{hS} \Phi_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} \quad \Longleftrightarrow \quad V_1 - V_2 = RI_{1 \rightarrow 2}.$$

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Calcul des résistances thermiques

Résistance thermique d'interface : reprenons le cas de la conducto-convection, soit le transfert thermique entre une fluide et un solide

$$\Phi_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} = hS (T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}})$$
$$T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}} = \frac{1}{hS} \Phi_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} \quad \Longleftrightarrow \quad V_1 - V_2 = RI_{1 \rightarrow 2}.$$

On voit apparaître une résistance thermique d'interface :

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{hS} \cdot \text{♥}$$

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Calcul des résistances thermiques

Résistance thermique d'interface : reprenons le cas de la conducto-convection, soit le transfert thermique entre une fluide et un solide

$$\Phi_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} = hS (T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}})$$
$$T_{\text{flu}} - T_{\text{sol}} = \frac{1}{hS} \Phi_{\text{flu} \rightarrow \text{sol}} \quad \Longleftrightarrow \quad V_1 - V_2 = RI_{1 \rightarrow 2}.$$

On voit apparaître une résistance thermique d'interface :

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{hS} \cdot \text{♥}$$

L'interface entre deux milieux crée à elle seule une résistance thermique, appelée **résistance d'interface** ou **résistance de contact**. ♥

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Association de résistances thermiques

On utilise les **mêmes règles d'associations** pour les résistances thermiques que celles utilisées pour les résistances électrocinétiques :

$$\text{En série : } R_{\text{eq}} = \sum_i R_i$$

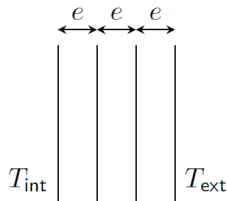
$$\text{En parallèle : } R_{\text{eq}} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{R_i}} \quad \text{ou} \quad Y_{\text{eq}} = \sum_i Y_i$$

avec $Y = 1/R$ l'admittance.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Association de résistances thermiques

Application : un double vitrage est constitué de deux vitres en verres séparées d'une couche d'air, toutes supposées de même surface S et de même épaisseur e .

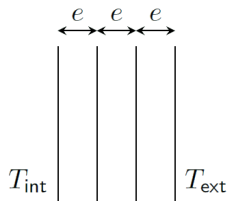


1. Justifier qu'il s'agit d'une association en série. Représenter le schéma électrique équivalent et calculer la résistance thermique.

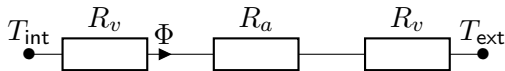
Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Association de résistances thermiques

Application : un double vitrage est constitué de deux vitres en verres séparées d'une couche d'air, toutes supposées de même surface S et de même épaisseur e .



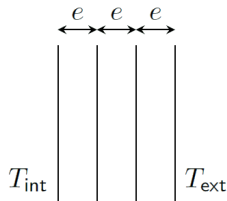
La puissance thermique doit forcément passer par les trois couches les unes après les autres : l'association est en série. Le schéma équivalent est



Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Association de résistances thermiques

Application : un double vitrage est constitué de deux vitres en verres séparées d'une couche d'air, toutes supposées de même surface S et de même épaisseur e .



En série la résistance équivalente est

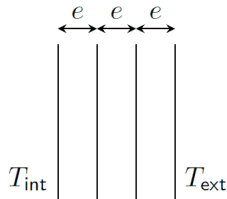
$$R_{\text{eq}} = R_v + R_a + R_v = \frac{e}{\lambda_v S} + \frac{e}{\lambda_a S} + \frac{e}{\lambda_v S}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{e}{S} \left(\frac{2}{\lambda_v} + \frac{1}{\lambda_a} \right).$$

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Association de résistances thermiques

Application : un double vitrage est constitué de deux vitres en verres séparées d'une couche d'air, toutes supposées de même surface S et de même épaisseur e .



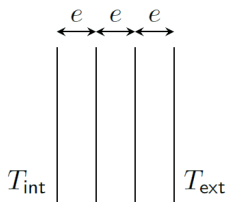
2. La comparer à celle d'un simple vitrage de même épaisseur totale $3e$. Commenter.

Données : conductivités thermiques de l'air $\lambda_a = 3 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et du verre $\lambda_v = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Association de résistances thermiques

Application : un double vitrage est constitué de deux vitres en verres séparées d'une couche d'air, toutes supposées de même surface S et de même épaisseur e .



Un simple vitrage a une résistance

$$R = \frac{3e}{\lambda_v S}.$$

Si on fait le rapport des deux résistances

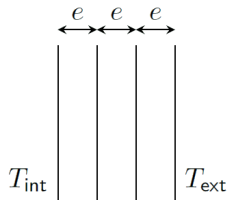
$$\frac{R_{\text{eq}}}{R} = \frac{e}{S} \left(\frac{2}{\lambda_v} + \frac{1}{\lambda_a} \right) \times \frac{\lambda_v S}{3e} = \frac{2}{3} + \frac{\lambda_v}{3\lambda_a}$$

A.N. $\frac{R_{\text{eq}}}{R} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9 \times 10^{-2}} \simeq \frac{2}{3} + \frac{100}{10} \simeq 10.$

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Association de résistances thermiques

Application : un double vitrage est constitué de deux vitres en verres séparées d'une couche d'air, toutes supposées de même surface S et de même épaisseur e .

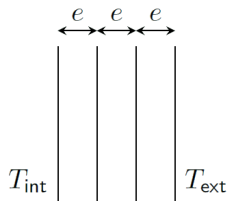


Le double vitrage est plus efficace que le simple vitrage car sa résistance thermique est plus grande (cela vient surtout de la conductivité thermique de l'air qui est très faible.)

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Association de résistances thermiques

Application : un double vitrage est constitué de deux vitres en verres séparées d'une couche d'air, toutes supposées de même surface S et de même épaisseur e .

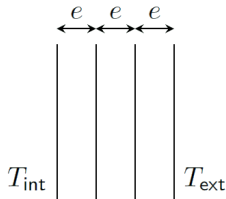


3. D'après ce modèle, comment pourrait-on améliorer simplement les performances thermiques du double vitrage ? Quel problème se pose en pratique ?

Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques

Association de résistances thermiques

Application : un double vitrage est constitué de deux vitres en verres séparées d'une couche d'air, toutes supposées de même surface S et de même épaisseur e .



On pourrait imaginer augmenter l'épaisseur de la couche d'air, mais en pratique la convection dans l'air devient très vite limitante (plus de régime permanent), et il vaut mieux augmenter le nombre de couches : c'est le rôle du triple vitrage.

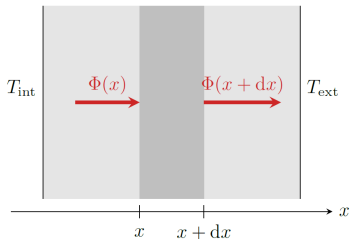
Plan

- 1 Introduction
- 2 Transferts thermiques à l'échelle mésoscopique
 - Équilibre thermodynamique local
 - Vecteur densité de flux ou de courant thermique
 - Densité de flux thermique dans un solide homogène : loi de Fourier
 - Densité de flux thermique à une interface : continuité du flux et loi de Newton
- 3 Conduction thermique en régime stationnaire : résistances thermiques
 - Uniformité du flux au travers du système
 - Profil de température en régime stationnaire
 - Analogies entre conduction électrique et conduction thermique
 - Calcul des résistances thermiques
 - Association de résistances thermiques
- 4 Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique
 - Équation de diffusion à une dimension cartésienne
 - Durée et distance caractéristiques de diffusion
 - Équation de diffusion à trois dimensions

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

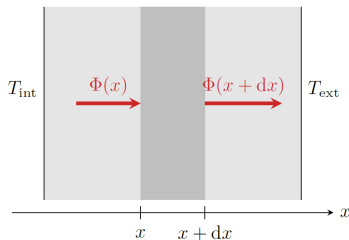
Afin d'obtenir l'**équation de diffusion** à une dimension on considère comme précédemment une plaque plane d'épaisseur e et de section S . On étudie le système à une dimension afin que la température ne varie que selon l'axe x . On oriente tous les flux dans le sens des x croissants. Le système n'a pas atteint le régime permanent.



Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

On étudie le système entre deux instants t et $t + dt$. On veut obtenir la puissance la valeur de l'enthalpie du système à $H(x, t + dt)$. Cette grandeur dépend

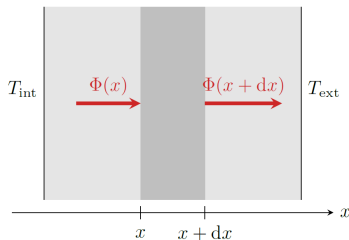


Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

On étudie le système entre deux instants t et $t + dt$. On veut obtenir la puissance la valeur de l'enthalpie du système à $H(x, t + dt)$. Cette grandeur dépend

- de l'enthalpie initiale dans le système $H(x, t)$

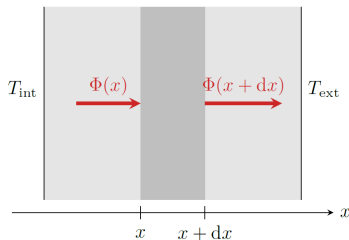


Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

On étudie le système entre deux instants t et $t + dt$. On veut obtenir la puissance la valeur de l'enthalpie du système à $H(x, t + dt)$. Cette grandeur dépend

- de l'enthalpie initiale dans le système $H(x, t)$
- du transfert thermique entrant $\delta Q(x, t)$

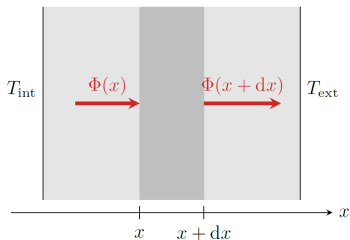


Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

On étudie le système entre deux instants t et $t + dt$. On veut obtenir la puissance la valeur de l'enthalpie du système à $H(x, t + dt)$. Cette grandeur dépend

- de l'enthalpie initiale dans le système $H(x, t)$
- du transfert thermique entrant $\delta Q(x, t)$
- du transfert thermique entrant $\delta Q(x + dx, t)$.



Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

$$\begin{aligned}H(x, t + dt) &= H(x, t) + \delta Q(x, t) - \delta Q(x + dx, t) \\H(x, t + dt) - H(x, t) &= -(\Phi(x + dx, t) - \Phi(x, t)) \delta t \\ \frac{H(x, t + dt) - H(x, t)}{dt} &= -\left(\iint_S \vec{j}_{\text{th}}(x + dx, t) \cdot d\vec{S} - \iint_S \vec{j}_{\text{th}}(x, t) \cdot d\vec{S}\right) \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} S dx\end{aligned}$$

en considérant que le vecteur densité de courant thermique est uniforme sur S . On utilise des dérivées partielles car H et j_{th} dépendent de x et de t .

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

D'après la **deuxième loi de Joule** pour un solide $dH = CdT$ ainsi

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} S dx \quad \Longleftrightarrow \quad c dm \frac{\partial T}{\partial t} = - d\tau \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}$$
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x}$$

avec c la capacité thermique massique, $d\tau = S dx$ l'élément de volume du système et $\rho = dm/d\tau$.

D'après la **loi de Fourier** $\vec{j}_{\text{th}}(x, t) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(x, t)$ soit ici $j_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$, soit

$$- \frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

À une dimension cartésienne, l'**équation de diffusion thermique** ou **équation de la chaleur** s'écrit

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{♥}$$

en posant $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ la diffusivité thermique du système qui s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. ♥

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

La diffusivité $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ d'un matériau compare ses propriétés de conduction de la chaleur (via λ) et de stockage d'énergie interne (via sa capacité thermique c) : un bon conducteur thermique peut avoir une faible diffusivité si sa capacité thermique massique est élevée, et réciproquement un bon isolant peut avoir une forte diffusivité si c est faible.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

La diffusivité $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ d'un matériau compare ses propriétés de conduction de la chaleur (via λ) et de stockage d'énergie interne (via sa capacité thermique c) : un bon conducteur thermique peut avoir une faible diffusivité si sa capacité thermique massique est élevée, et réciproquement un bon isolant peut avoir une forte diffusivité si c est faible.

La diffusivité D et la résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ ne contiennent pas les mêmes informations et ne doivent pas être confondues.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

La diffusivité $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ d'un matériau compare ses propriétés de conduction de la chaleur (via λ) et de stockage d'énergie interne (via sa capacité thermique c) : un bon conducteur thermique peut avoir une faible diffusivité si sa capacité thermique massique est élevée, et réciproquement un bon isolant peut avoir une forte diffusivité si c est faible.

La diffusivité D et la résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ ne contiennent pas les mêmes informations et ne doivent pas être confondues.

- Un bon conducteur thermique sera caractérisé par une forte diffusivité D et des faibles résistances thermiques R_{th} .

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

La diffusivité $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ d'un matériau compare ses propriétés de conduction de la chaleur (via λ) et de stockage d'énergie interne (via sa capacité thermique c) : un bon conducteur thermique peut avoir une faible diffusivité si sa capacité thermique massique est élevée, et réciproquement un bon isolant peut avoir une forte diffusivité si c est faible.

La diffusivité D et la résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ ne contiennent pas les mêmes informations et ne doivent pas être confondues.

- Un bon conducteur thermique sera caractérisé par une forte diffusivité D et des faibles résistances thermiques R_{th} .
- La résistance thermique dépend de la géométrie du système pas la diffusivité : doubler l'épaisseur d'un mur ne change pas la diffusivité mais double la résistance thermique.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

La diffusivité $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ d'un matériau compare ses propriétés de conduction de la chaleur (via λ) et de stockage d'énergie interne (via sa capacité thermique c) : un bon conducteur thermique peut avoir une faible diffusivité si sa capacité thermique massique est élevée, et réciproquement un bon isolant peut avoir une forte diffusivité si c est faible.

La diffusivité D et la résistance thermique $R_{th} = \frac{e}{\lambda S}$ ne contiennent pas les mêmes informations et ne doivent pas être confondues.

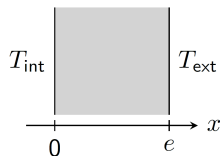
- Un bon conducteur thermique sera caractérisé par une forte diffusivité D et des faibles résistances thermiques R_{th} .
- La résistance thermique dépend de la géométrie du système pas la diffusivité : doubler l'épaisseur d'un mur ne change pas la diffusivité mais double la résistance thermique.
- La diffusivité implique la capacité thermique massique c du matériau, c'est-à-dire sa capacité à stocker de l'énergie thermique, au contraire de la résistance thermique.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

L'**équation de la chaleur** peut s'appliquer en régime stationnaire. Retrouvons le résultat précédent

$$T(x) = T_{\text{int}} + (T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}) \frac{x}{e}.$$

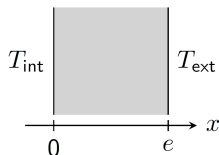


Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

L'**équation de la chaleur** peut s'appliquer en régime stationnaire. Retrouvons le résultat précédent

$$T(x) = T_{\text{int}} + (T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}) \frac{x}{e}.$$



D'après l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

En régime permanent T ne dépend pas du temps, donc

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0.$$

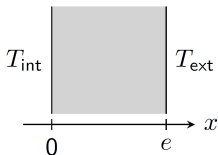
On peut intégrer cette relation.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

L'équation de la chaleur peut s'appliquer en régime stationnaire. Retrouvons le résultat précédent

$$T(x) = T_{\text{int}} + (T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}) \frac{x}{e}.$$



$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dT}{dx} = A$$

avec A une constante à déterminer à partir des conditions aux limites.

On intègre de nouveau cette relation

$$\frac{dT}{dx} = A \quad \Longleftrightarrow \quad T(x) = Ax + B$$

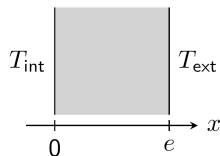
avec B une autre constante à déterminer à partir des conditions aux limites.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

L'**équation de la chaleur** peut s'appliquer en régime stationnaire. Retrouvons le résultat précédent

$$T(x) = T_{\text{int}} + (T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}) \frac{x}{e}.$$



On utilise le fait que $T(0) = T_{\text{int}}$ et $T(e) = T_{\text{ext}}$. Ainsi

$$T(0) = A \times 0 + B = T_{\text{int}} \quad \Longleftrightarrow \quad B = T_{\text{int}}$$

$$\text{or } T(e) = A \times e + T_{\text{int}} = T_{\text{ext}} \quad \Longleftrightarrow \quad A = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{e}.$$

Finalement, on retrouve bien que

$$T(x) = T_{\text{int}} + (T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}) \frac{x}{e}.$$

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

On peut reprendre l'étude précédente mais en considérant cette fois que dans le système il y a une source de chaleur (radioactivité, effet Joule, etc.) ou un puits de chaleur. On note ce transfert thermique source $\delta Q_S = \mathcal{P}_S dt$ (positif pour une source et négatif pour puits). On l'intègre dans le bilan enthalpique

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à une dimension cartésienne

On peut reprendre l'étude précédente mais en considérant cette fois que dans le système il y a une source de chaleur (radioactivité, effet Joule, etc.) ou un puits de chaleur. On note ce transfert thermique source $\delta Q_S = \mathcal{P}_S dt$ (positif pour une source et négatif pour puits). On l'intègre dans le bilan enthalpique

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} S dx + \mathcal{P}_S & \Longleftrightarrow & \quad c dm \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} d\tau + \mathcal{P}_S \\ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial j_{th}}{\partial x} + \frac{\mathcal{P}_S}{d\tau} & \Longleftrightarrow & \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\mathcal{P}_S}{d\tau} \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho c} \frac{\mathcal{P}_S}{d\tau} & \Longleftrightarrow & \quad \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\mathcal{P}_S}{C}. \quad \heartsuit\end{aligned}$$

Le terme supplémentaire $\mathcal{P}/C$ est homogène à $W/J \cdot K^{-1}$, soit $J \cdot s^{-1}/J \cdot K^{-1} = K \cdot s^{-1}$.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

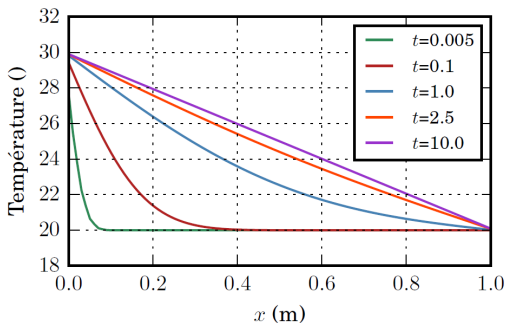
Nous verrons en TP comment **résoudre numériquement** l'équation de diffusion de la chaleur pour obtenir le profil de température dans un milieu compris entre deux thermostat de température T_g et T_d à différents instants.



Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

On constate sur la figure ci-dessous que le profil linéaire caractéristique du régime permanent apparaît après un certain temps : il s'agit de la **durée caractéristique** de diffusion de la chaleur Δt sur une certaine distance ℓ .



Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

À partir de l'étude de l'équation de la chaleur, on peut déterminer **en ordre de grandeur** cette durée caractéristique Δt .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad ;$$

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

À partir de l'étude de l'équation de la chaleur, on peut déterminer **en ordre de grandeur** cette durée caractéristique Δt .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{T}{\Delta t} \simeq D \frac{T}{\ell^2} \quad ; \quad \Delta t \simeq \frac{\ell^2}{D}.$$

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

À partir de l'étude de l'équation de la chaleur, on peut déterminer **en ordre de grandeur** cette durée caractéristique Δt .

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad ; \quad \frac{T}{\Delta t} \simeq D \frac{T}{\ell^2} \quad ; \quad \Delta t \simeq \frac{\ell^2}{D}.$$

En ordre de grandeur la diffusion thermique s'établit sur une distance ℓ au bout d'une durée $\Delta t \simeq \ell^2 / D$. ❤️

Réciproquement, la diffusion thermique au bout d'une durée Δt aura atteint une distance $\ell \simeq \sqrt{D \Delta t}$. ❤️

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

Application : vous oubliez votre cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson ?

Corollaire : risquez-vous de se brûler en la retirant quand les pâtes seront cuites au bout de dix minutes ?

Données : diffusivité de l'acier $D \simeq 1 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

Application : vous oubliez votre cuillère dans l'eau de cuisson des pâtes. Jusqu'à quelle hauteur le manche va-t-il chauffer pendant la cuisson ?
Corollaire : risquez-vous de se brûler en la retirant quand les pâtes seront cuites au bout de dix minutes ?

Données : diffusivité de l'acier $D \simeq 1 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Le temps de cuisson des pâtes est de 10 min, soit 600 s. La distance atteinte par la diffusion de la chaleur est donc

$$\ell \simeq \sqrt{D\Delta t} = \sqrt{1 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \times 36 \times 10^4 \text{ s}^2} \simeq 20 \text{ cm}.$$

La cuillère a donc bien chauffé et il y a risque de brûlure.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

Application : combien de temps faut-il pour que les variations de température se fassent ressentir dans une cave enterrée à 2 m de profondeur ?

Données : diffusivité du sol $D \simeq 2 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

Application : combien de temps faut-il pour que les variations de température se fassent ressentir dans une cave enterrée à 2 m de profondeur ?

Données : diffusivité du sol $D \simeq 2 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

On cherche à savoir la durée Δt que met la chaleur pour atteindre la cave.

$$\Delta t \simeq \frac{\ell^2}{D} = \frac{4 \text{ m}^2}{2 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = 2 \times 10^7 \text{ s} \simeq 230 \text{ jours} \simeq 7,5 \text{ mois.}$$

La chaleur de l'été en surface atteint la cave en hivers.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

L'étude de l'équation de la chaleur nous renseigne également sur une propriété fondamentale de cette dernière. Pour cela testons la **symétrie dans le temps** de cette équation : si on “rembobine” le film, le profil de température $T(x, t')$ avec $t' = -t$ vérifie-t-il toujours l'équation de la chaleur ?

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

L'étude de l'équation de la chaleur nous renseigne également sur une propriété fondamentale de cette dernière. Pour cela testons la **symétrie dans le temps** de cette équation : si on “rembobine” le film, le profil de température $T(x, t')$ avec $t' = -t$ vérifie-t-il toujours l'équation de la chaleur ?

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Si l'équation est symétrique dans le temps alors cela signifie que si on change les conditions initiales d'un système pour provoquer la diffusion de la chaleur, puis qu'on revient à ces conditions, alors le système retrouvera son état initial. On dira dans ce cas que le phénomène de diffusion de la chaleur est réversible.

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

Faisons le changement de variable $t' = -t$, soit $dt' = -dt$, ainsi

$$\frac{\partial T}{\partial t} =$$

Il vient alors que

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

Faisons le changement de variable $t' = -t$, soit $dt' = -dt$, ainsi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial T}{\partial t'}.$$

Il vient alors que

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Durée et distance caractéristiques de diffusion

Faisons le changement de variable $t' = -t$, soit $dt' = -dt$, ainsi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial T}{\partial t'}.$$

Il vient alors que

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = -D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \neq D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

L'équation de la chaleur n'est pas symétrique temporellement : **la diffusion de la chaleur est un phénomène irréversible.**

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à trois dimensions

On peut généraliser l'équation de diffusion à trois dimensions en considérant cette fois que le vecteur densité de courant $\vec{j}_{th}$ a d'autres composantes que celles selon $\vec{u}_x$. Si on ne considère pas de termes sources alors

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à trois dimensions

On peut généraliser l'équation de diffusion à trois dimensions en considérant cette fois que le vecteur densité de courant $\vec{j}_{\text{th}}$ a d'autres composantes que celles selon $\vec{u}_x$. Si on ne considère pas de termes sources alors

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} \implies \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}_{\text{th}}.$$

Conduction thermique en régime variable : diffusion thermique

Équation de diffusion à trois dimensions

On peut généraliser l'équation de diffusion à trois dimensions en considérant cette fois que le vecteur densité de courant $\vec{j}_{\text{th}}$ a d'autres composantes que celles selon $\vec{u}_x$. Si on ne considère pas de termes sources alors

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} \implies \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div } \vec{j}_{\text{th}}.$$

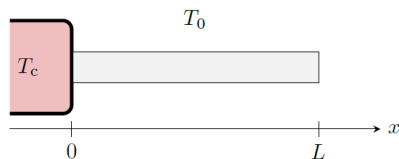
En utilisant la loi de Fourier $\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \text{div} \left(\overrightarrow{\text{grad}} T \right) \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= D \Delta T \quad \text{♥} \end{aligned}$$

avec l'opérateur laplacien scalaire $\Delta = \text{div } \overrightarrow{\text{grad}}$.

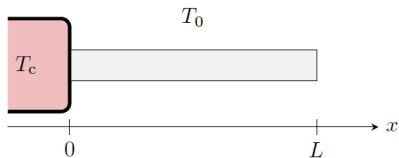
Introduction

Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



Introduction

Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



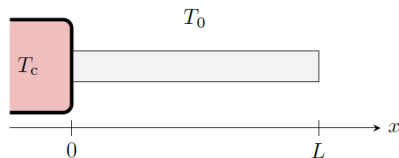
On étudie une ailette parallélépipédique de longueur L le long d'un axe x , et de côté a selon y et b selon z avec une conductivité λ . Elle est mise en **contact thermique parfait** avec le composant à refroidir de température T_c et avec l'air de température uniforme T_0 . On suppose un transfert conducto-convectif entre l'ailette et l'air. La loi de Newton donne le flux $d\varphi$ reçu par l'élément de surface dS de l'ailette par l'air

$$d\varphi = h (T_0 - T) dS.$$

On considérera que la température de l'ailette T ne dépend que de l'axe x , que le régime est permanent et que la longueur de l'ailette est assimilée à une longueur infinie.

Introduction

Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



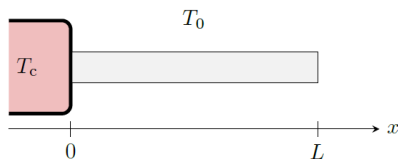
1. Montrer que la température vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_0$$

avec δ à exprimer en fonction des données. Préciser ce que signifie l'hypothèse d'ailette infinie.

Introduction

Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



On fait un bilan d'enthalpie sur un élément d'ailette de longueur dx . La surface de contact avec les autres éléments de l'ailette est ab . La surface de contact avec l'air est $2(a + b)dx$. Ainsi

$$H(x + dx) = H(x) + \iint_{S(x)} \vec{j}(x) \cdot d\vec{S} dt - \iint_{S(x+dx)} \vec{j}(x + dx) \cdot d\vec{S} dt + d\varphi dt$$

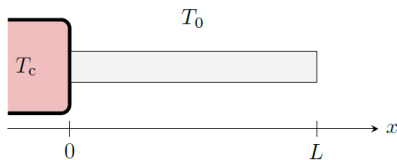
$$H(x + dx) - H(x) = - (j(x + dx) - j(x)) ab dt + h (T_0 - T) 2(a + b) dx dt$$

en considérant que le vecteur densité de courant thermique est uniforme sur ab . En régime permanent $H(x + dx) = H(x)$. Ainsi

$$0 = - \frac{dj}{dx} ab dx + 2(a + b) h (T_0 - T) dx.$$

Introduction

Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



D'après la loi de Fourier $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$, ici $\vec{j} = -\lambda \frac{dT}{dx} \vec{u}_x$. Ainsi

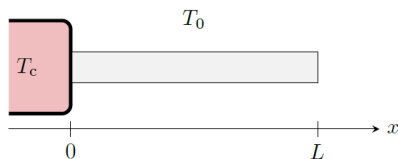
$$0 = ab\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + 2(a+b)h(T_0 - T)$$
$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2(a+b)h}{\lambda ab} T = -\frac{2(a+b)h}{\lambda ab} T_0.$$

On identifie $\delta = \sqrt{\frac{\lambda}{2h} \frac{ab}{a+b}}$. Il s'agit de la longueur caractéristique de variation de température le long de l'ailette. Considérer qu'elle est infinie signifie que $L \gg \delta$.

Introduction

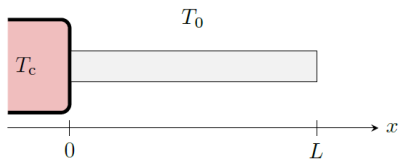
Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?

2. Résoudre cette équation différentielle.



Introduction

Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



2. Résoudre cette équation différentielle. La solution particulière de cette équation (dans ce cas $\frac{d^2 T_p}{dx^2} = 0$)

$$-\frac{1}{\delta^2} T_p = -\frac{1}{\delta^2} T_0 \quad \Longleftrightarrow \quad T_p = T_0.$$

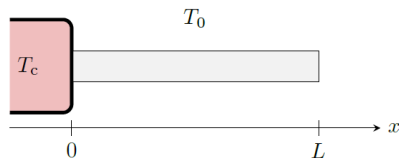
L'équation homogène (sans second membre)

$$\frac{d^2 T_h}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T_h = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d^2 T_h}{dx^2} = \frac{1}{\delta^2} T_h$$
$$T_h = A e^{\frac{x}{\delta}} + B e^{-\frac{x}{\delta}}.$$

Pour éviter une divergence de la température la constante A est nulle.

Introduction

Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



Il vient que

$$T(x) = T_p + T_h = T_0 + Be^{-\frac{x}{\delta}}.$$

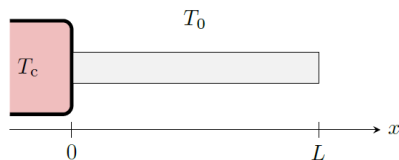
On utilise la condition initiale $T(x=0) = T_c$, ainsi

$$T_c = T_0 + B \quad \Longleftrightarrow \quad B = T_c - T_0$$

$$T(x) = T_0 + (T_c - T_0) e^{-\frac{x}{\delta}}.$$

Introduction

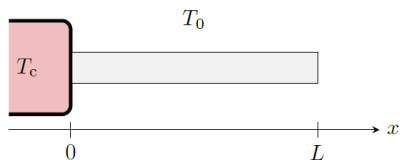
Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



3. Calculer la puissance thermique totale dissipée par l'ailette.

Introduction

Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



3. Calculer la puissance thermique totale dissipée par l'ailette.

Calculons la puissance thermique perdue par l'ailette, en considérant un élément de surface d'échange d'échange $2(a + b)dx$

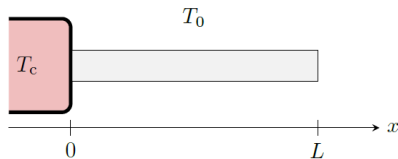
$$d\varphi_{\text{perdu}} = -d\varphi = h(T_0 - T(x))dS = 2(a + b)h(T_0 - T(x))dx$$

$$d\varphi_{\text{perdu}} = 2(a + b)h(T_c - T_0)e^{-\frac{x}{\delta}}dx.$$

Intégrons cette puissance perdue sur toute la longueur L de l'ailette.

Introduction

Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



$$\varphi_{\text{perdu}} = 2(a+b)h(T_c - T_0) \int_0^L e^{-\frac{x}{\delta}} dx$$

$$\varphi_{\text{perdu}} = 2(a+b)h(T_c - T_0) \delta \left(1 - e^{-\frac{L}{\delta}}\right).$$

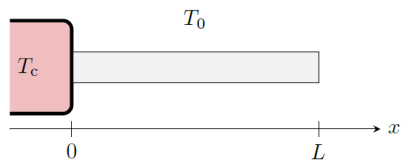
En considérant $L \gg \delta$ alors

$$\varphi_{\text{perdu}} = 2(a+b)h(T_c - T_0) \delta$$

$$\varphi_{\text{perdu}} = 2(a+b)h(T_c - T_0) \sqrt{\frac{\lambda}{2h} \frac{ab}{a+b}} = (T_c - T_0) \sqrt{2h\lambda ab(a+b)}.$$

Introduction

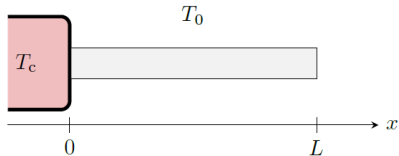
Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



Comparer la puissance dissipée par N^2 ailettes de dimension latérales $a \times b$ et une unique ailette de dimension $Na \times Nb$.

Introduction

Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



Comparer la puissance dissipée par N^2 ailettes de dimension latérales $a \times b$ et une unique ailette de dimension $Na \times Nb$.

Pour N^2 ailettes la puissance dissipée est

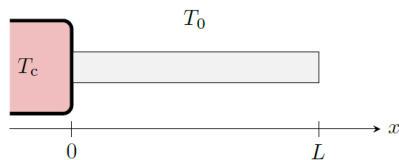
$$\varphi' = N^2 \varphi_{\text{perdu}}.$$

Pour une ailette de dimension $Na \times Nb$ la puissance dissipée est

$$\begin{aligned}\varphi'' &= (T_c - T_0) \sqrt{2h\lambda N^2 ab(Na + Nb)} \\ \varphi'' &= (T_c - T_0) \sqrt{2h\lambda N^3 ab(a + b)} = N^{3/2} \varphi_{\text{perdu}}.\end{aligned}$$

Introduction

Revenons sur la question introductive : pourquoi plusieurs petites ailettes montées les unes à côté évacuent mieux la chaleur qu'une seule ailette de plus grande dimension ?



Ainsi $\frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{N^2}{N^{3/2}} = N^{1/2} > 1$. Pour $N = 100$ ailettes, la puissance dissipée est 10 fois plus importante que dans le cas d'une seule grande ailette de même dimension que les 100 ailettes.