

DS 5 : propagation des ondes électromagnétiques et statique des fluides

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en 2 parties **indépendantes**.
- Les calculatrices **sont interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question (exemple question 5.1 de la partie B noter "B5.1", question 21 de la partie C noter "C21", etc.), aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Volume d'une coquille d'épaisseur dr et de rayon r : $dV = 4\pi r^2 dr$.
-

Partie A

IV.1 - Communication

Pour les échanges radio, il est obligatoire d'avoir une radio VHF (Very High Frequency) utilisable sur plusieurs canaux. L'**annexe** fournit les fréquences et leur utilisation.

Dans cette partie, nous nous occuperons du Canal 16 de la VHF.

On assimilera l'air au vide.

Le bateau est équipé d'une VHF RAYMARINE VHF Fixe RAY 55E dont les caractéristiques sont données dans la **figure 9** :

Modèle VHF	Caractéristiques
 RAYMARINE VHF Fixe RAY 55E	☐ Alimentation : 12 V ☐ Puissance de sortie audio : 5 W - 4 Ohms ☐ Mode de fixation : sur étrier ☐ Taille et type d'écran : LCD 52 mm ☐ Puissance en émission : 25 W ☐ Consommation en veille : < 0,5 A ☐ Consommation à 25 W : < 6 A ☐ Dimensions : L 191 mm x H 93,8 mm x P 98 mm

Figure 9 - Présentation du modèle de VHF RAYMARINE
(D'après : <http://www.discount-marine.com/raymarine-vhf-fixe-ray-55e>)

Données	
Perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$	Pulsation $\omega = 2\pi f$ en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$
Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-7} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$	Longueur d'onde λ en m
Célérité de l'onde dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	

Q57. Déterminer un ordre de grandeur de la longueur d'onde de cette fréquence associée au Canal 16 de la VHF.

L'onde émise par la radio est de la forme $\vec{E} = E_0 \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_y$ en prenant un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ tel que $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ soient parallèles au plan de la mer.

Q58. Qualifier cette onde. Plusieurs adjectifs sont attendus.

Q59. Quelle est la direction de propagation et quel est le sens de propagation de cette onde ?

Q60. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide en l'absence de charges et de courant.

On rappelle la formule suivante : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$.

Q61. Déterminer l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$.

Q62. Quelle relation doit exister entre c , ε_0 et μ_0 pour que cette onde satisfasse cette équation de propagation ?

Q63. Préciser le vecteur d'onde $\vec{k}$ de cette onde émise.

Q64. Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ associé à cette onde en fonction, entre autres paramètres et variables, de E_0 , k et de ω .

Q65. Exprimer, en fonction de E_0 , μ_0 et de c , le vecteur de Poynting $\vec{I}$ associé à cette onde. Quelle est sa signification physique ?

Q57. D'après l'énoncé le canal 16 de la VHF correspond à une fréquence $f = 156,800$ MHz. En considérant que l'onde électromagnétique (EM) se déplace dans le vide, la longueur d'onde associé est

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} \quad \text{A.N.} \quad \lambda_0 = \frac{3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{156,800 \times 10^6 \text{ s}^{-1}} \simeq \frac{3 \times 10^8 \text{ m}}{1,5 \times 10^8} = 2 \text{ m}.$$

Q58. Cette onde est **plane**, car l'amplitude E_0 est constante dans le plan d'onde ; **progressive** selon les $x > 0$, car l'argument du cosinus est $\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$; **monochromatique** car elle fonction d'une seule pulsation ; **longitudinale**, car la direction de propagation selon $\vec{u}_x$ est perpendiculaire à la direction de la perturbation $\vec{u}_y$. Soit une OPPM longitudinale.

Q59. Comme dit précédemment la direction de propagation est $\vec{u}_x$ avec un sens selon les $x > 0$.

Q60. Les équations de Maxwell sont

$$\text{Maxwell-Gauss} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{or dans le vide } \rho = 0 \text{ donc } \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{Maxwell-flux} \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{or dans le vide } \vec{j} = \vec{0} \text{ donc } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Q61. On utilise l'équation de Maxwell impliquant la structure du champ électrique, soit l'équation de Maxwell-faraday, sur laquelle on applique l'opérateur rotationnel

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{E} \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} \right) \\ \vec{\text{grad}} \left(\text{div } \vec{E} \right) - \Delta \vec{E} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation d'onde encore appelée équation de d'Alembert.

Q62. L'équation d'onde a pour forme canonique

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

avec c la célérité de l'onde, ainsi, par identification

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

Q63. On écrit l'expression générale de la composante électrique de l'onde EM

$$\vec{E} = E_0 \cos \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM} \right) \vec{u}_y.$$

Par identification avec l'argument du cosinus fourni

$$\vec{k} \cdot \vec{OM} = k_x x + k_y y + k_z z = \frac{\omega}{c} x$$

donc

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\omega}{c} \quad \text{et} \quad k_y = k_z = 0 \\ \vec{k} &= k_x \vec{u}_x = \frac{\omega}{c} \vec{u}_x. \end{aligned}$$

Q64. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday sous forme complexe

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{soit} \quad -i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega \vec{B} \\ \vec{B} &= \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} \left(\vec{u}_x \wedge E_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{u}_y \right) \\ \vec{B} &= \frac{k}{\omega} E_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{u}_z.\end{aligned}$$

Q65. Le vecteur de Poynting est défini tel que

$$\begin{aligned}\vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\omega} E_0^2 \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \frac{\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z}{\mu_0} \\ \vec{\Pi} &= \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \vec{u}_x.\end{aligned}$$

Le vecteur de Poynting correspond à la puissance électromagnétique surfacique instantanée portée par l'onde EM.

Q66. Exprimer la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting en fonction de c , E_0 et de ε_0 .

Dans la portion d'espace $x < 0$, l'onde émise ($\vec{E}_i = E_0 \cdot \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{u}_y$) par l'émetteur du bateau rencontre, sous incidence normale, le mur parfaitement plan d'un hangar, constitué d'un métal supposé parfait placé à l'abscisse $x = 0$.
Sachant que dans un métal parfait ($x > 0$), l'onde ne peut pas se propager, elle va se réfléchir totalement en opposition de phase.

Q67. Donner l'expression de cette onde réfléchie en fonction des caractéristiques de l'onde incidente.

Q68. Donner l'expression du champ électrique total (superposition du champ électrique incident et du champ électrique réfléchi).
On rappelle que $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2\sin a \sin b$.

Q69. Comment qualifie-t-on ce champ électrique total ?
Pourquoi, en certains points de l'espace que l'on nommera, la communication risque-t-elle d'être perturbée aux abords de ce hangar ?

IV.2 – Perturbation du compas

Chaque bateau est équipé d'un compas, **figure 10**, indiquant la direction suivie.



Figure 10 - Compas de type marin

Ce compas doit se situer loin des câbles électriques parcourus par un courant, afin d'éviter certaines perturbations qui pourraient fausser l'indication.

Q70. De quelles perturbations s'agit-il ?

Supposons qu'il y ait un câble relié à la batterie du bateau, parcouru par un courant continu I et assimilable à un fil rectiligne de section négligeable et de longueur infinie.

Q71. En analysant les symétries et les invariances de la distribution de courant, déterminer la direction du champ magnétique $\vec{B}$ créé par ce fil et les paramètres d'espace influents.

Q72. Représenter l'allure des lignes de champ magnétique sur un schéma.

Q73. En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique créé par le fil à une distance d de celui-ci.

Q74. Quelles solutions peuvent être envisagées pour ne plus perturber le compas ?

Q66. La valeur moyenne du vecteur de Poynting est

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \left\langle \cos^2 \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \right\rangle \vec{u}_x \quad \text{soit} \quad \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$$

avec $\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = c^2$ soit $\frac{1}{\mu_0 c} = \varepsilon_0 c$.

Q67. L'onde est réfléchiée, elle se propage donc selon les $x < 0$ soit

$$\vec{E}_r = E_r \cos \left(\omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right) \vec{u}_y.$$

Comme le métal est parfait, la somme des deux champs électrique incident et réfléchi sont nuls en $x = 0$ soit

$$\vec{E}_{\text{tot}}(x=0) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y + E_r \cos(\omega t) \vec{u}_y = 0 \quad \text{donc} \quad E_r = -E_0$$

$$\text{ainsi} \quad \vec{E}_r = -E_0 \cos \left(\omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right) \vec{u}_y.$$

Ce qui correspond bien à l'expression d'une onde en opposition de phase avec l'onde incidente.

Q68. Le champ électrique total est donc

$$\vec{E}_{\text{tot}} = E_0 \left[\cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) - \cos \left(\omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right) \right] \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_{\text{tot}} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin \left(\frac{\omega}{c} x \right) \vec{u}_y$$

en utilisant la relation trigonométrique $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$ avec $a = \omega t$ et $b = \frac{\omega}{c} x$.

Q69. Ce champ électrique total correspond à une onde stationnaire. En certains points l'amplitude du champ total s'annule, on nomme ces points des **nœuds**, et il sont tels que leur amplitude est

$$2E_0 \sin \left(\frac{\omega}{c} x_p \right) = 0 \quad \text{soit} \quad \sin(kx_p) = 0 \quad \text{soit} \quad kx_p = p\pi$$

$$x_p = p\pi \frac{\lambda_0}{2\pi} \quad \text{soit} \quad x_p = p \frac{\lambda_0}{2}$$

avec $p \in \mathbf{Z}$. En ces points l'amplitude de l'onde étant nulle, il est impossible de la détecter et donc de l'utiliser pour communiquer.

Q70. Il s'agit de perturbations magnétiques causées par la production de champ magnétique due à la circulation de courant dans les câbles électriques.

Q71. Le fil a une symétrie cylindrique, on utilise donc le système de coordonnées cylindrique en alignant le fil avec l'axe (Oz). Soit un point M quelconque, il y a symétrie de la distribution du courant dans le fil selon le plan ($M, \vec{u}_r, \vec{u}_z$) (on coupe le fil en deux dans le sens de la longueur). Le champ magnétique qui est perpendiculaire au plan de symétrie de la distribution de courant est donc

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{u}_\theta.$$

Il y a invariances par translation selon z et par rotation selon θ , la champ ne dépend donc que de la coordonnée r , donc

$$\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta.$$

Q72. Les lignes de champs sont des cercles concentriques dans le plan ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$) de plus en plus espacés plus ils s'éloignent du fil parcouru par le courant I , source du champ. Si le courant est orienté vers le haut ($z > 0$) alors les lignes de champs sont orientés dans le sens trigonométrique dans le plan ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$) d'après la règle de la main droite.

Q73. D'après le théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_i I_i$$

avec C le contour d'Ampère. Ici on choisit un contour qui encercle le fil, donc l'élément d'intégration est $d\vec{\ell} = r d\theta \vec{u}_\theta$ avec R le rayon du contour d'Ampère. Ainsi

$$rB \int_0^{2\pi} d\theta = \mu_0 I \quad \text{soit} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \text{soit} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$$

Q74. On peut envisager de faire passer un deuxième fil de même courant mais orienté dans le sens opposé. Il produira alors un champ magnétique opposé au premier et qui, ainsi, l'annulera.

ANNEXE

Tableau des canaux pour la VHF

Canal VHF	Fréquence en MHz	Commentaire
01	156,05	
02	156,100	
03	156,150	CROSS Centre Régional Opérationnel de Surveillance et de Sauvetage
04	156,200	CROSS
05	156,250	Autorités portuaires
06	156,300	Communication directe navire à navire
07	156,350	Marine Nationale
08	156,400	Communication de Navire à Navire
09	156,450	Capitainerie des ports de plaisance
10	156,500	Sémaphore de la Marine Nationale
11	156,550	Marine Nationale
12	156,600	Autorités Portuaires
13	156,650	CROSS (Interrogation des navires dans les 3 DST de la Manche) et Autorités portuaires
14	156,700	Autorités Portuaires
15	156,750	Surveillance des plages
16	156,800	CANAL D'URGENCE - APPEL DE DÉTRESSE - SÉCURITÉ
17	156,850	Marine Nationales et Autorités Portuaires
18	156,900	Écluses
19	156,950	Port : Annonces d'entrée, Régulation de trafic, Diffusion de consignes

(Source : <https://www.navicom.fr/communication-divertissement/vhf-navicom/technologies-vhf-marine/la-vhf-marine>)

Partie B

Pulsar et électromagnétisme

Le pulsar est un objet céleste compact (étoile à neutrons) en rotation sur lui-même autour d'un axe et possède un très fort champ magnétique $\vec{B}_p$. On se propose d'étudier quelques-unes de ses propriétés et leur incidence sur les particules qui se trouvent à leur voisinage.

On rappelle la formule donnant la divergence d'un vecteur $\vec{A}(r) = A(r)\vec{e}_r$ radial ne dépendant que de la distance $r=OM$ en coordonnées sphériques:

$$\text{div}(\vec{A}) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 A(r))$$

Pour les applications numériques on donnera un chiffre significatif et on utilisera les valeurs approchées suivantes:

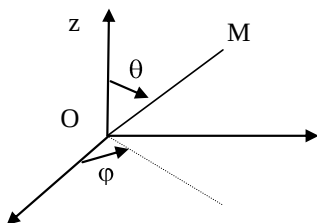
Constante de gravitation $G = 6 \cdot 10^{-11}$ SI

Charge élémentaire $e = 2 \cdot 10^{-19}$ C

Si besoin est, on pourra approcher π par 3.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,6 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1$$

Coordonnées sphériques :



A) Etude mécanique

A-1 Rappeler les expressions de la loi de Coulomb et celle de la loi de Newton concernant l'interaction de deux masses ponctuelles. Rappeler le théorème de Gauss pour le champ électrique. Considérant une distribution de masse qui crée un champ de gravitation $\vec{g}(M)$, donner la forme du théorème de Gauss.

A-2. On considère une étoile sphérique de rayon R qui est constituée de matière en auto-gravitation (en interaction avec elle-même). Un point M est repéré en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . La masse volumique est notée $\mu(r)$.

Exprimer la masse dm comprise entre les rayons r et $r+dr$ en fonction de $\mu(r)$. En déduire la masse totale sous forme intégrale.

A1. Les expressions de la loi de Coulomb et de la loi de Newton sont

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1(M) \quad \text{et} \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2} = m_2 \vec{g}_1(M)$$

avec $\vec{E}_1(M)$ et $\vec{g}_1(M)$ les champs électrique et gravitationnel respectivement créés par la charge q_1 et la masse m_1 .

Le théorème de Gauss pour le champ électrique est

$$\oiint_S \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}.$$

En utilisant les lois de Coulomb et Newton, on peut obtenir le théorème de Gauss gravitationnel à partir du théorème de Gauss pour le champ électrique

$$\vec{E}(M) \equiv \vec{g}(M) \quad \text{et} \quad q \equiv m \quad \text{et} \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \equiv -G \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \equiv 4\pi G$$

donc
$$\oiint_S \vec{g}(M) \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}}.$$

- A2. La masse dm comprise entre les r et $r + dr$ correspond à la différence de masse entre une étoile de rayon $r + dr$ et une étoile de rayon r , soit

$$dm = m(r + dr) - m(r) = \mu(r) \frac{4}{3}\pi (r + dr)^3 - \mu(r) \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Pour $dr \ll r$ on peut utiliser le développement limité $(r + dr)^3 = r^3 \left(1 + \frac{dr}{r}\right)^3 \simeq r^3 \left(1 + 3\frac{dr}{r}\right)$ ainsi

$$dm \simeq \mu(r) \frac{4}{3}\pi (r^3 + 3r^2 dr - r^3)$$

$$dm \simeq 4\pi\mu(r)r^2 dr.$$

Pour obtenir la masse totale, on intègre la quantité de masse infinitésimale

$$m = \int_{\text{étoile}} dm = \int_0^R 4\pi\mu(r)r^2 dr$$

avec R le rayon de l'étoile.

A-3. Exprimer la force de gravitation entre 2 éléments de masse m et m' situé à la distance r l'un de l'autre. Montrer que la force dérive d'une énergie potentielle E_p que l'on exprimera en fonction de m , m' , G et r . On supposera que cette énergie s'annule à l'infini.

Dans toute la suite, sauf aux questions A-10 à A13, on considère que la masse volumique est uniforme égale à celle du cœur de μ_c .

A-4 Lorsque le rayon de l'étoile est r , calculer le champ de gravitation créé à l'extérieur de l'étoile en un point M situé à une distance $r'=OM>r$. Montrer que ce champ est identique à celui qui serait créé par une masse ponctuelle $m(r)$ située au centre O de l'étoile.

A-5 On apporte ensuite de l'infini une masse élémentaire dm de sorte que le rayon devienne $r+dr$; montrer que la variation d'énergie potentielle de l'étoile s'écrit $dE_p = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^4 dr$.

On constitue ainsi l'étoile de rayon R et de masse M_o , Calculer son énergie potentielle. Montrer qu'elle se met sous la forme $E_p = -K \frac{GM_o^2}{R}$; donner la valeur de K .

A-6 Déterminer le champ de gravitation à l'intérieur de l'étoile en fonction de la masse et du rayon.

A-7 En supposant l'équilibre hydrostatique réalisé, donner la relation différentielle entre la pression $P(r)$ et $g(r)$ la composante radiale du champ de gravitation. Que peut on dire de la valeur de P en $r=R$? En déduire l'expression de la pression.

A-8. On suppose le gaz parfait. Déterminer le lien entre la température $T(r)$, la pression, masse volumique et la masse molaire M_m . En déduire que la pression peut être reliée à la densité volumique d'énergie interne par la relation $p(r) = (\gamma - 1)e(r)$. En déduire E_{int} l'énergie interne de l'étoile.

Quelle relation simple lie E_p et E_{int} ?

La question A-8 est une question bonus.

A3. La force de gravitation entre m et m' est

$$\vec{F}_{m \rightarrow m'} = -G \frac{mm'}{r^2} \vec{u}_{m \rightarrow m'}.$$

On voit que

$$-\frac{1}{r^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \vec{F}_{m \rightarrow m'} &= \frac{d}{dr} \left(G \frac{mm'}{r} \right) \vec{u}_{m \rightarrow m'} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}_{m \rightarrow m'} \\ \text{avec } E_p &= -G \frac{mm'}{r} + \text{cst.} \end{aligned}$$

Comme cette énergie s'annule à l'infini, il vient que $\text{cst} = 0$.

A4. Pour une étoile de rayon r et de masse volumique homogène μ_c , sa masse est d'après les questions précédentes,

$$m = \int_0^r 4\pi\mu_c r^2 dr = 4\pi\mu_c \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^r = \frac{4}{3}\pi\mu_c r^3.$$

La source du champ gravitationnel $\vec{g}$ est la distribution de masse de l'étoile de symétrie sphérique. Ainsi le champ a pour plans de symétrie $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$, donc le champ est dirigé selon $\vec{e}_r$. Il y a invariances de rotation selon θ et φ ainsi

$$\vec{g} = g(r)\vec{e}_r.$$

D'après le théorème de Gauss gravitationnel, en prenant une surface de Gauss sphérique de rayon $r' > r$, il vient que

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{g}(M) \cdot d\vec{S} &= -4\pi G m_{\text{int}} \quad ; \quad g(r)r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = -4\pi G m \\ g(r)4\pi r^2 &= -4\pi G m \quad ; \quad \vec{g}(r) = -G \frac{m}{r^2} \vec{e}_r. \end{aligned}$$

On constate que l'expression du champ est identique à celle du champ créé par une masse ponctuelle m que l'on avait exprimée en A1.

A5. La variation d'énergie potentielle correspond à l'énergie potentielle subie par la masse apportée dm en $r + dr$ de la part du reste de l'étoile de masse m , soit

$$dE_p = -G \frac{m dm}{r} = -G \frac{4}{3}\pi\mu_c r^2 dm = -G \frac{4}{3}\pi\mu_c r^2 \times 4\pi\mu_c r^2 dr = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^4 dr.$$

Pour obtenir l'énergie potentielle de l'étoile on intègre l'expression précédente d'un rayon nul à un rayon R , soit

$$E_p = \int_{\text{étoile}} dE_p = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 \int_0^R r^4 dr = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 \frac{R^5}{5} = -G \left(\frac{4}{3}\pi\mu_c R^3 \right)^2 \frac{1}{15R} = -\frac{1}{15} \frac{GM_0^2}{R}.$$

avec $M_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu_c$ la masse totale de l'étoile. Ainsi $K = \frac{1}{15}$.

A6. L'étude du champ gravitationnel à l'intérieur de l'étoile est similaire à celle menée à l'extérieurs, seule masse intérieure change, elle est telle que

$$m_{\text{int}} = \mu_c \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4}{3}\pi r^3 = M_0 \frac{r^3}{R^3}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{g}(M) \cdot d\vec{S} &= -4\pi G M_0 \frac{r^3}{R^3} \quad ; \quad g(r)r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = -4\pi G M_0 \frac{r^3}{R^3} \\ g(r)4\pi r^2 &= -4\pi G M_0 \frac{r^3}{R^3} \quad ; \quad \vec{g}(r) = -G \frac{M_0 r}{R^3} \vec{e}_r. \end{aligned}$$

- A7. On étudie une particule fluide de l'étoile de hauteur dr et de surface S , donc de volume $d\tau = Sdr$, dans le système de coordonnées sphériques. Les forces exercées sur elle sont son poids : $d\vec{P} = dm\vec{g}$, la force de pression sous-elle $d\vec{F}_{P1} = P(r)S\vec{e}_r$ et la force de pression au-dessus d'elle $d\vec{F}_{P2} = -P(r+dr)S\vec{e}_r$. À l'équilibre son accélération est nulle donc le principe fondamental de la dynamique donne

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i \iff \vec{0} = dm\vec{g} + P(r)S\vec{e}_r - P(r+dr)S\vec{e}_r$$

$$\vec{0} = -\mu_c S dr G \frac{M_0 r}{R^3} \vec{e}_r + P(r)S\vec{e}_r - P(r+dr)S\vec{e}_r$$

$$\frac{P(r+dr) - P(r)}{dr} = -\mu_c G \frac{M_0 r}{R^3}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\mu_c G \frac{M_0 r}{R^3}.$$

La pression P en R correspond à la pression hors de l'étoile, soit une pression nulle.

On peut alors intégrer la relation précédente entre les rayons r et R

$$\int_{P(r)}^0 dP = -\mu_c G \int_r^R \frac{M_0 r}{R^3} dr \quad ; \quad -P(r) = -\mu_c G \frac{M_0}{2R^3} (R^2 - r^2)$$

$$P(r) = \mu_c G \frac{M_0}{2R^3} (R^2 - r^2).$$

- A8. D'après la relation des gaz parfaits

$$PV = nRT \iff P d\tau = \frac{dm}{M_m} RT \iff P(r) = \mu_c \frac{R}{M_m} T(r).$$

Or l'énergie interne d'un petit élément d'étoile δU de volume $d\tau$ suit la première loi de Joule

$$d(\delta U) \equiv d(\delta E_{\text{int}}) = C_V dT.$$

D'après la relation de Mayer $C_P - C_V = nR$, or $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$, donc

$$\gamma C_V - C_V = nR \iff C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}.$$

Ainsi

$$d\delta E_{\text{int}} = \frac{nR}{\gamma - 1} dT \iff dT = \frac{\gamma - 1}{nR} \delta E_{\text{int}}.$$

On intègre cette relation depuis la température 0 K, soit énergie interne nulle, jusqu'à une température et énergie interne non nulle

$$\int_0^T dT = \frac{\gamma - 1}{nR} \int_0^{\delta E_{\text{int}}} d\delta E_{\text{int}}$$

$$T(r) = \frac{\gamma - 1}{nR} \delta E_{\text{int}}(r).$$

Ainsi, on peut écrire que

$$P(r) = \mu_c \frac{R}{M_m} \frac{\gamma - 1}{nR} \delta E_{\text{int}}(r) = \mu_c \frac{\gamma - 1}{nM_m} \delta E_{\text{int}}(r) = \frac{\mu_c}{dm} (\gamma - 1) \delta E_{\text{int}}(r).$$

La densité d'énergie interne $e(r)$ est définie telle que

$$e(r) = \frac{\delta E_{\text{int}}(r)}{d\tau}$$

ainsi

$$P(r) = \frac{\mu_c}{dm} (\gamma - 1) e(r) d\tau = \frac{\mu_c}{\mu_c} (\gamma - 1) e(r)$$

$$P(r) = (\gamma - 1) e(r).$$

À partir de l'expression de $P(r)$, on en déduit celle de $E_{\text{int}}(r)$

$$E_{\text{int}}(r) = \iiint_{\text{étoile}} e(r) d\tau = \iiint_{\text{étoile}} \frac{P(r)}{\gamma - 1} d\tau = \iiint_{\text{étoile}} \frac{\mu_c G}{\gamma - 1} \frac{M_0}{2R^3} (R^2 - r^2) d\tau$$

$$E_{\text{int}}(r) = 4\pi \frac{\mu_c G}{\gamma - 1} \frac{M_0}{2R^3} \left[R^2 \int_0^R r^2 dr - \int_0^R r^4 dr \right] = 2\pi \frac{\mu_c G}{\gamma - 1} \frac{M_0}{R^3} \left[\frac{R^5}{3} - \frac{R^5}{5} \right] = 2\pi \frac{\mu_c G}{\gamma - 1} \frac{M_0}{R^3} \frac{2R^5}{15}$$

$$= 4\pi \frac{\mu_c G M_0}{\gamma - 1} \frac{R^2}{15} = \frac{1}{5} \frac{G M_0^2}{R(\gamma - 1)}$$

$$E_c = -3(\gamma - 1) E_p.$$