



Lycée Charles Coëffin — Sciences physique

Fiche de travaux dirigés — CPGE TSI2

TD 19 : Transfert thermique

Objectifs

- Définir et algébriser le flux thermique échangée à travers une interface.
- Relier la non-uniformité de la température à l'existence d'un flux thermique et interpréter son sens. Utiliser la loi de Fourier.
- Établir la relation entre la température et le vecteur densité de flux thermique.
- Établir l'équation de la diffusion thermique. Interpréter qualitativement l'irréversibilité du phénomène. Relier le temps et la longueur caractéristiques d'un phénomène de diffusion au coefficient de diffusion par une analyse dimensionnelle.
- Définir la résistance thermique. Exploiter l'analogie électrique lors d'un bilan thermique.
- Exploiter la loi de Newton fournie pour prendre en compte les échanges conducto-convectifs.

Pré-requis : thermodynamique TSI 1.

1 Exercices

Double vitrage ★

On cherche à estimer la puissance perdue au travers d'une fenêtre en double vitrage à montant en bois. Cette vitre a pour largeur $L = 80\text{ cm}$ et pour hauteur $H = 1\text{ m}$. On adopte pour le vitrage un modèle à trois couches : une première couche de verre, d'épaisseur $e_v = 4\text{ mm}$; une couche d'air, d'épaisseur $e_a = 16\text{ mm}$; une seconde couche de verre identique à la première.

Le montant en bois a une surface totale $S_b = 0,2\text{ m}^2$ et une épaisseur $e_a = 60\text{ mm}$. On prend également en compte le phénomène de conducto-convection à l'interface entre la seconde couche de verre et l'air extérieur, décrite par la loi de Newton de coefficient conducto-convectif $h = 10\text{ W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^{-1}$.

Données : conductivités thermiques du verre $\lambda_v = 1,0\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ de l'air $\lambda_a = 2,7 \times 10^{-2}\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et du bois $\lambda_b = 0,15\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1. Représenter le schéma électrique équivalent à la fenêtre.
2. Calculer la résistance thermique totale des trois couches constituant le vitrage. En déduire la résistance thermique de la fenêtre.
3. En plein hiver, la température de l'habitation est $T_{\text{int}} = 20^\circ\text{C}$ et la température extérieure $T_{\text{ext}} = 5^\circ\text{C}$. Quelle est la puissance thermique perdue au travers de la fenêtre ?
4. Déterminer la température de surface de la fenêtre, côté extérieur.

Barre connectée à deux thermostats ★

On s'intéresse aux transferts thermiques dans une barre homogène de section S , de longueur L , dont la surface est calorifugée. La barre est faite d'un matériau de conductivité thermique κ , de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c . On note $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire colinéaire à l'axe de la barre. Les extrémités $x = 0$ et $x = L$ sont mises en contact thermique parfait avec des thermostats aux températures T_1 et T_2 . On admet que le champ de température dans la barre ne dépend que de x et de t .

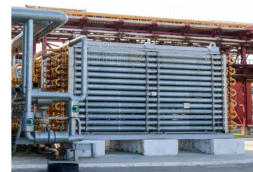
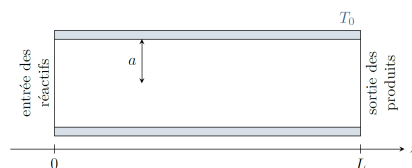
1. Établir l'équation de la chaleur. Définir le coefficient de diffusion thermique D .
2. En supposant la barre initialement à une température uniforme, estimer la durée du régime transitoire. Commenter le résultat. Quelle est l'influence des températures T_1 et T_2 ?
3. Déterminer le profil de température $T(x)$ en régime permanent. Le tracer.
4. Montrer que le flux thermique dans la barre ne dépend pas de x . En déduire la résistance thermique R_{th} de la barre.
5. En appliquant le second principe de la thermodynamique à la barre en régime permanent, montrer que le taux de production d'entropie (quantité d'entropie créée par unité de temps) vaut

$$\frac{\delta S_c}{dt} = \frac{1}{R_{th}} \frac{(T_1 - T_2)^2}{T_1 T_2}.$$

Commenter le résultat.

Température dans un réacteur piston ★ ★

Un réacteur piston est un type de réacteur chimique cylindrique sans agitation, dans lequel les réactifs sont injectés d'un côté, les produits récupérés de l'autre, et l'écoulement suffisamment lent pour que les différentes tranches de fluide ne se mélangent pas. Ce type de réacteur est par exemple utilisé pour réaliser en flux continu une réaction à la cinétique lente.



Étudions un tel réacteur de rayon a , voir figure, dans lequel a lieu une réaction exothermique libérant une puissance volumique α . La conductivité thermique λ du milieu réactionnel est supposée indépendante de l'avancement de la réaction. Le réacteur est refroidi par un écoulement d'eau à température uniforme T_0 tout autour du réacteur, le flux thermique surfacique échangé à l'abscisse z entre le réacteur et le système de refroidissement étant donné par la loi de Newton :

$$\phi(z) = h(T(z) - T_0).$$

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la température $T(z)$ en régime permanent.

On effectue un bilan enthalpique sur une tranche de solution cylindrique de longueur dz et de base S entre les instants t et $t + dt$

$$H(z, t + dt) = H(z, t) + \varphi_e dt - \varphi_s dt + \alpha S dz dt - \varphi(z) S_{lat} dr$$

avec φ_e la puissance thermique entrant par la surface $S(z)$ de la solution, φ_s celle sortant par la surface $S(z + dz)$, α la puissance volumique produite par la réaction et $\phi(z)$ le transfert thermique perdu par la solution par conducto-convection au travers de la surface latérale du cylindre soit $S_{lat} = 2\pi a dz$. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z, t)}{\partial t} &= \iint_{S(z)} \vec{j}(z, t) \cdot d\vec{S} - \iint_{S(z+dz)} \vec{j}(z + dz, t) \cdot d\vec{S} + \alpha S dz - 2\pi a \varphi(z) dz \\ \frac{\partial H(z, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial j(z, t)}{\partial z} S dz + \alpha S dz - 2\pi a \varphi(z) dz \end{aligned}$$

en considérant que le vecteur densité de flux thermique $\vec{j}(z, t)$ est uniforme sur $S(z)$ et $S(z + dz)$.

En régime permanent la variation de l'enthalpie, comme tout autre grandeur, est nulle, ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{dj(z)}{dz} S + \alpha S - 2\pi a \varphi(z) \\ 0 &= \lambda \frac{d^2 T(z)}{dz^2} S + \alpha S - 2\pi a \varphi(z) \end{aligned}$$

en utilisant la loi de Fourier $\vec{j}(z) = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T(z) = -\lambda \frac{dT(z)}{dz} \vec{u}_z$. Ainsi

$$\frac{d^2 T(z)}{dz^2} = \frac{2\pi a h}{\lambda S} T(z) - \frac{2\pi a h}{\lambda S} T_0 - \frac{\alpha}{\lambda}.$$

2. Identifier une longueur caractéristique ℓ de l'évolution de la température dans le réacteur.

La dimension du terme $\frac{d^2 T(z)}{dz^2}$ correspond à une température par unité de surface, ainsi le terme $\frac{2\pi a h}{\lambda S} T(z)$ correspond aussi à une température par unité de surface ainsi le terme $\frac{\lambda S}{2\pi a h}$ correspond à une surface donc

$$\ell = \sqrt{\frac{\lambda S}{2\pi a h}}.$$

3. Résoudre cette équation, sachant que les réactifs sont introduits à la température T_0 et en notant T_s leur température de sortie.

L'équation correspondant à la solution particulière T_p est

$$0 = \frac{2\pi a h}{\lambda S} T_p - \frac{2\pi a h}{\lambda S} T_0 - \frac{\alpha}{\lambda} \quad ; \quad T_p = T_0 + \frac{\alpha S}{2\pi a h} = T_0 + \frac{\alpha \ell^2}{\lambda}.$$

L'équation homogène est

$$\frac{d^2 T_h(z)}{dz^2} = \frac{1}{\ell^2} T_h(z) \quad ; \quad T_h(z) = A e^{\frac{z}{\ell}} + B e^{-\frac{z}{\ell}}.$$

La solution générale est donc

$$T(z) = T_p + Ae^{\frac{z}{\ell}} + Be^{-\frac{z}{\ell}} \quad ; \quad T(z) = T_p + Ae^{\frac{z}{\ell}} + Be^{-\frac{z}{\ell}}.$$

On détermine les constantes d'intégrations A et B à partir des conditions aux limites fournies

$$T(z=0) = T_p + A + B = T_0 \quad \Longleftrightarrow \quad A + B = T_0 - T_p \quad \Longleftrightarrow \quad B = T_0 - T_p - A$$

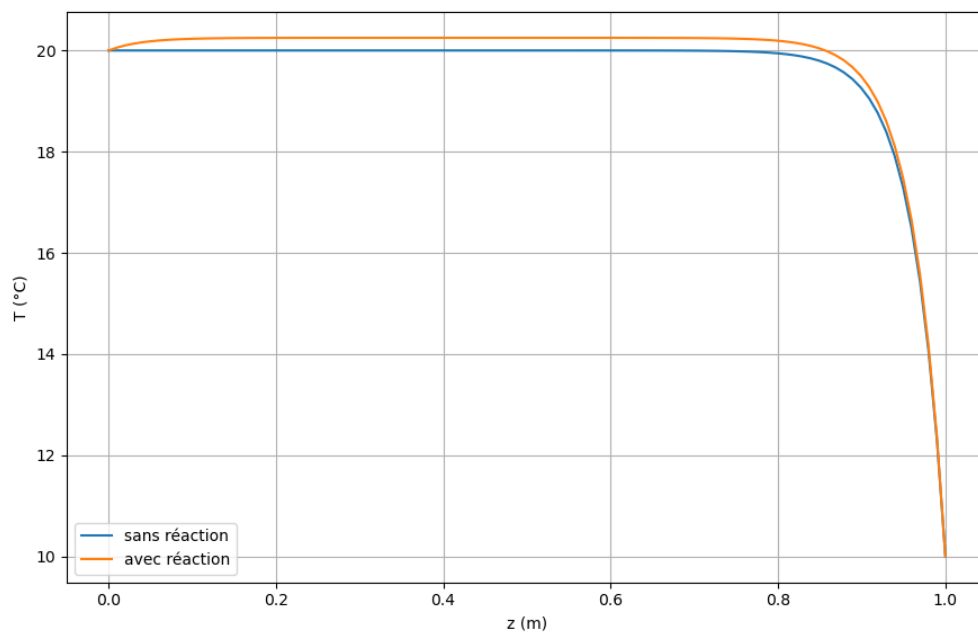
$$T(z) = T_p + Ae^{\frac{z}{\ell}} + T_0e^{-\frac{z}{\ell}} - T_0e^{-\frac{z}{\ell}} - Ae^{-\frac{z}{\ell}} \quad ; \quad T(z) = T_0e^{-\frac{z}{\ell}} + T_p \left(1 - e^{-\frac{z}{\ell}}\right) + 2A \sinh\left(\frac{z}{\ell}\right).$$

$$T(z=L) = T_0e^{-\frac{L}{\ell}} + T_p \left(1 - e^{-\frac{L}{\ell}}\right) + 2A \sinh\left(\frac{L}{\ell}\right) = T_s$$

$$A = \frac{T_s - T_0e^{-\frac{L}{\ell}} - T_p \left(1 - e^{-\frac{L}{\ell}}\right)}{2 \sinh\left(\frac{L}{\ell}\right)}$$

$$T(z) = T_0e^{-\frac{z}{\ell}} + T_p \left(1 - e^{-\frac{z}{\ell}}\right) + \left(T_s - T_0e^{-\frac{L}{\ell}} - T_p \left(1 - e^{-\frac{L}{\ell}}\right)\right) \frac{\sinh\left(\frac{z}{\ell}\right)}{\sinh\left(\frac{L}{\ell}\right)}.$$

Ci-dessous on a tracé ce type de profil dans le cas où la puissance volumique fournie par la réaction est $\alpha = 100 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ et lorsqu'il n'y a pas de puissance fournie par la réaction.



Plancher chauffant ★ ★

Un plancher chauffant est un système de chauffage des bâtiments par le sol dans lequel l'énergie de chauffage est transmise au plancher via un réseau hydraulique circulant sous le plancher (des systèmes de chauffage électrique existent également). Dans les constructions modernes, bien isolées, la température de l'eau peut être relativement basse, entre 21 °C et 24 °C, ce qui rend le plancher chauffant particulièrement adapté aux chauffages écologiques de nouvelle génération comme la géothermie et le chauffage solaire. Cet exercice a pour but d'étudier l'installation schématisée ci-dessous, destinée à chauffer une salle de vie

de 40 m^2 au sol. Pour simplifier, on suppose que le réseau hydraulique impose la température $T = T_{\text{eau}}$ à l'interface entre l'isolant et le mortier.

air de la pièce ($T_{\text{air}} = 19^\circ\text{C}$)		
④ carrelage		
③ chape de mortier		
② isolant		
① dalle en béton		
sol de fondation ($T_{\text{sol}} = 7^\circ\text{C}$)		

Matériau	Conductivité λ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	Épaisseur e (cm)
④ Carrelage	1,3	1
③ Mortier	1,1	3
② Isolant	0,02	2
① Béton	1,4	10

On donne le coefficient de transfert thermique de surface entre le carrelage et l'air $h = 10 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$.

1. Montrer que la loi de Newton se traduit par une résistance thermique d'interface R_i , dont on établira l'expression en fonction de h et S .
2. Donner le schéma électrique équivalent de l'installation. En déduire la résistance thermique totale R entre la "couche" d'eau et l'air de la pièce. La calculer numériquement.

Dans une région au climat est assez doux, une pièce de 40 m^2 bien isolée nécessite en hiver une puissance de chauffe de l'ordre de 1 kW , alors qu'une maison mal isolée consomme quatre fois plus.

3. En déduire la température T_{eau} à laquelle se trouve l'eau du circuit de chauffage pour chauffer la maison bien isolée.
4. Les normes d'installation d'un plancher chauffant imposent que la température de surface du carrelage T_s n'excède pas 28°C , ce qui correspond à la température de la plante des pieds. Quelle puissance maximale l'installation peut-elle fournir à l'habitation ? Commenter.
5. Bien qu'une couche isolante soit placée sous les tuyaux de chauffage, une partie de l'énergie fournie par le plancher chauffant est perdue car cédée aux fondations. Calculer le rendement du plancher, c'est-à-dire le rapport entre la puissance Φ réellement fournie à l'habitation et la puissance totale fournie par l'eau chaude.
6. Le choix du revêtement de sol est essentiel pour une bonne efficacité du plancher chauffant. En particulier, il est déconseillé d'utiliser un parquet en bois (conductivité de l'ordre de $0,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Proposer une explication.

2 Annale

Dans le cadre de la transition énergétique et écologique, l'État a fait de la rénovation énergétique des logements une priorité. Les propriétaires sont ainsi accompagnés, au moyen de subventions, à entreprendre des projets de rénovation énergétique dans leur logement : isolation thermique (toit, murs, combles...), installation d'une chaudière plus performante, de fenêtres à double vitrage, de panneaux solaires... Autant de solutions permettant de réduire les factures d'électricité, en particulier pour les logements les plus énergivores souvent qualifiés de « passoires thermiques ». Ce sujet aborde certains aspects liés au confort énergétique d'un logement.

Partie I – Isolation thermique d'un toit

Données pour la partie I

Caractéristiques de deux isolants thermiques :

	$\lambda \text{ (W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}\text{)}$	$\rho \text{ (kg} \cdot \text{m}^{-3}\text{)}$	$c \text{ (J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$
laine de verre	0,032	20	1 030
ouate de cellulose	0,040	35	2 000

Parmi les différentes fuites thermiques d'un logement, les déperditions à travers le toit représentent généralement une part importante. Beaucoup de maisons modernes présentent une architecture à toit plat, comme le montre la figure 1. On s'intéresse à l'isolation thermique du toit.

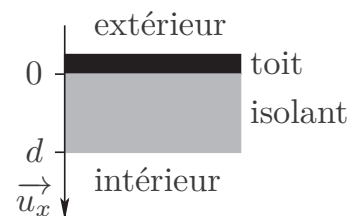


Figure 1 – À gauche : maison à toit plat. À droite : schéma de principe, notations utilisées.

On considère un toit horizontal plat isolé par une couche isolante plane d'aire S , d'épaisseur d , de conductivité thermique λ , de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c . Le plan d'équation $x = 0$ correspond à l'interface toit/isolant ; le plan d'équation $x = d$ correspond au plafond (voir figure 1).

La conduction thermique est supposée unidimensionnelle : le vecteur densité de courant thermique au sein de la couche isolante est de la forme $\vec{j} = j(x, t)\vec{u}_x$, $\vec{u}_x$ étant le vecteur unitaire orienté selon la verticale descendante, de l'extérieur vers l'intérieur de la maison, et le champ de température est de la forme $T(x, t)$.

- Q1.** Rappeler la loi de Fourier exprimant le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}$ en fonction de la température T . Justifier la présence du signe "–" apparaissant dans cette loi.
- Q2.** Établir, dans le cas unidimensionnel étudié, l'équation de la diffusion thermique (ou équation de la chaleur) liant les dérivées spatiale et temporelle de la température $T(x, t)$.
- Q3.** On se place en régime stationnaire. Définir la résistance thermique R_{th} de la couche isolante, puis déterminer son expression littérale en fonction de S , d et de λ .

1. La loi de Fourier est

$$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

avec λ la conductivité de l'isolant.

Le moins signifie que le transfert thermique, lié à $\vec{j}$, est orienté des hautes vers les basses températures (du "chaud" vers le "froid") : donc de sens opposé au gradient de température.

2. Le système étudié est un élément de l'isolant d'épaisseur infinitésimale dx et de surface S , donc de volume $d\tau = Sdx$. On fait le bilan enthalpique de ce système entre les instants t et $t + dt$

$$H(t + dt, t) = H(t, t) + Q(x, t) - Q(x + dx, t)$$

avec $Q(x, t)$ et $Q(x + dx, t)$ les transferts thermiques entrant et sortant respectivement en x et $x + dx$. Ainsi

$$\begin{aligned} H(x + dx, t) - H(x, t) &= -(\Phi(x + dx, t) - \Phi(x, t)) dt \\ \frac{H(x + dx, t) - H(x, t)}{dt} &= -\left[\iint_{S(x+dx)} \vec{j}(x + dx, t) \cdot d\vec{S} - \iint_{S(x)} \vec{j}(x, t) \cdot d\vec{S} \right] \\ \frac{\partial H(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} S dx \end{aligned}$$

en considérant que $S(x + dx) = S(x)$ et $\vec{j}$ est uniforme sur S . Comme on l'a fait pour l'enthalpie on peut écrire que $\frac{j(x+dx, t) - j(x, t)}{dx} = \frac{\partial j}{\partial x}$. D'après la deuxième loi de Joule

$$dH = C dT = c dm dT.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} c dm \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x} d\tau \\ \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}. \end{aligned}$$

En utilisant la loi de Fourier ici $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \vec{u}_x$

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right) \\ \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

avec D la diffusivité de l'isolant.

3. En régime stationnaire le flux thermique se conserve, soit

$$\Phi = \text{cst} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS$$

en considérant que la densité de courant est uniforme sur S . D'après la loi de Fourier

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT(x)}{dx} \quad ; \quad dT(x) = -\frac{\Phi}{\lambda S} dx$$
$$T(x=d) - T(x=0) = -\Phi \frac{d}{\lambda S} \quad ; \quad T(x=0) - T(x=d) = \frac{d}{\lambda S} \Phi.$$

Par analogie avec la loi d'Ohm $R = \frac{\Delta V}{I}$ on identifie la résistance thermique $R_{\text{th}} = \frac{T(x=0) - T(x=d)}{\Phi}$

$$R_{\text{th}} = \frac{d}{\lambda S}.$$

Pour estimer quelques ordres de grandeur, on considère un toit plat de surface $S = 100 \text{ m}^2$. Sans isolation, sa résistance thermique vaut $R_{\text{th,toit}} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

Q4. Exprimer littéralement la résistance thermique d'isolant permettant de diviser les pertes thermiques à travers le toit par 10.

Q5. En déduire l'épaisseur d'isolant d correspondante. Faire l'application numérique pour la laine de verre puis pour l'ouate de cellulose (épaisseurs respectivement notées d_ℓ et d_o).

La résistance thermique n'est pas le seul critère à prendre en compte au moment de choisir son isolation thermique. On étudie le comportement thermique de la couche isolante en été. La toiture est exposée de telle sorte que l'évolution journalière de température imposée à la surface de l'isolant en $x = 0$, suive la loi :

$$T(x = 0, t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t) \quad (1)$$

On considère une température maximale de 37°C et une température minimale de 13°C .

Q6. Calculer les valeurs de T_0 et T_1 en $^\circ\text{C}$, et de ω en $\text{rad} \cdot \text{h}^{-1}$.

On cherche la solution de l'équation obtenue à la **question Q2**. Pour ce faire, on travaille dans l'espace des complexes en posant :

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{f}(x) e^{i\omega t} \quad (2)$$

avec $i^2 = -1$. Ainsi, $T(x, t)$ correspond à la partie réelle de $\underline{T}(x, t)$.

Q7. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la fonction $\underline{f}(x)$.

Les solutions de cette équation différentielle s'écrivent sous la forme :

$$\underline{f}(x) = \underline{A} e^{(1+i)x/\delta} + \underline{B} e^{-(1+i)x/\delta} \quad (3)$$

où $\underline{A}$ et $\underline{B}$ désignent des constantes complexes, et δ une constante réelle.

Q8. Déterminer l'expression de δ en fonction de λ , ρ , c et de ω , puis préciser sa dimension.

On souhaite conserver dans l'expression de $\underline{T}(x, t)$ l'onde thermique se propageant dans le sens des x croissants.

Q9. Établir l'expression de la solution réelle $T(x, t)$. Montrer ensuite que :

$$T(x = d, t) = T_0 + T_1 e^{-d/\delta} \cos[\omega(t - \tau)] \quad (4)$$

et expliciter le « déphasage thermique » τ en fonction de d , λ , ρ , c et de ω . Les applications numériques (non demandées) donnent, pour les deux configurations étudiées à la **question Q5** (une épaisseur d_ℓ de laine de verre, une épaisseur d_o d'ouate de cellulose), les valeurs respectives suivantes : $\tau_\ell = 5,3 \text{ h}$, $\tau_o = 11 \text{ h}$.

La fraîcheur nocturne permet généralement un rafraîchissement naturel des habitations. De ce fait, pour un meilleur confort, on a intérêt à choisir le déphasage thermique τ de sorte qu'il y ait un transfert thermique maximal pendant la période nocturne ; on admet que cette condition revient à avoir des températures $T(x = 0, t)$ et $T(x = d, t)$ en opposition de phase.

Q10. Calculer le déphasage thermique offrant le meilleur confort thermique. En déduire laquelle des deux configurations précédentes est finalement la plus confortable d'un point de vue thermique.

4. Pour diviser les pertes thermiques par 10, il faut multiplier la résistance thermique par 10, soit une résistance équivalente telle que

$$R_{th,eq} = 10R_{th,toit} = R_{th,toit} + R_{th,iso} \quad ; \quad R_{th,iso} = 9R_{th,toit}$$

A.N. $R_{th,iso} = 9,0 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

5. D'après la relation obtenue plus tôt

$$d = R_{th,iso} \lambda S$$

A.N. $d_\ell = 9,0 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \times 0,032 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 100 \text{ m}^2 = 29 \text{ cm}$
 $d_o = 9,0 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \times 0,040 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 100 \text{ m}^2 = 36 \text{ cm}.$

6. Les valeurs maximale et minimale de température sont

$$T_{\max} = T_0 + T_1 \quad \text{et} \quad T_{\min} = T_0 - T_1.$$

En sommant et en soustrayant ces deux relations, il vient que

$$T_0 = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2} \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{2}$$

A.N. $T_0 = \frac{37^\circ\text{C} + 13^\circ\text{C}}{2} = 25^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad T_1 = \frac{37^\circ\text{C} - 13^\circ\text{C}}{2} = 12^\circ\text{C}.$

L'oscillation de température a lieu sur une journée, soit une période $T = 24 \text{ h}$, ainsi

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{A.N.} \quad \omega = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = 0,08 \text{ rad} \cdot \text{h}^{-1}.$$

7. L'équation de diffusion est

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}.$$

On l'applique sur la fonction complexe $\underline{T}(x,t)$:

$$i\omega \underline{f}(x) e^{i\omega t} = D \underline{f}''(x) e^{i\omega t} \quad ; \quad \underline{f}''(x) = i \frac{\omega}{D} \underline{f}(x).$$

8. On calcule $\underline{f}''(x)$ à partir de la fonction donnée

$$\underline{f}'(x) = \frac{1+i}{\delta} \left[\underline{A} e^{(1+i)\frac{x}{\delta}} - \underline{B} e^{-(1+i)\frac{x}{\delta}} \right]$$

$$\underline{f}''(x) = \frac{(1+i)^2}{\delta^2} \left[\underline{A} e^{(1+i)\frac{x}{\delta}} + \underline{B} e^{-(1+i)\frac{x}{\delta}} \right] = \frac{(1+i)^2}{\delta^2} \underline{f}(x) = \frac{1+2i-1}{\delta^2} \underline{f}(x) = i \frac{2}{\delta^2} \underline{f}(x).$$

On peut alors identifier δ à partir de la forme précédente de l'équation différentielle

$$\frac{\omega}{D} = \frac{2}{\delta^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta^2 = \frac{2D}{\omega} = \frac{2\lambda}{\rho c \omega} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c \omega}}.$$

avec le coefficient de diffusion $D = \frac{\lambda}{\rho c}$.

L'argument de l'exponentielle $e^{(1+i)\frac{x}{\delta}}$ devant être sans dimension δ a la même dimension que x c'est donc une longueur.

9. On développe $\underline{T}(x, t)$ en fonction de $\underline{f}(x)$

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \left[\underline{A} e^{\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t + \frac{x}{\delta})} + \underline{B} e^{\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})} \right].$$

La composante de l'onde thermique $\underline{T}(x, t)$ qui se propage vers les $x > 0$ est donc $\underline{B} e^{\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})}$.
Ainsi

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{B} e^{\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - \frac{x}{\delta})}.$$

D'après les conditions aux limites $\underline{T}(x = 0, t = 0) = T_0 + T_1$ donc

$$\underline{B} = T_1.$$

Ainsi la solution réelle est

$$T(x, t) = T_0 + T_1 \cos \left(\omega t - \frac{x}{\delta} \right) e^{\frac{x}{\delta}}$$

$$T(x = d, t) = T_0 + T_1 \cos (\omega (t - \tau)) e^{\frac{d}{\delta}}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{d}{\delta \omega} = \frac{d}{\omega} \sqrt{\frac{\rho c \omega}{2\lambda}} = d \sqrt{\frac{\rho c}{2\lambda \omega}}.$$

10. Le déphasage $\Delta\varphi = \omega\tau$, ainsi

$$\begin{aligned} \text{A.N. } \Delta\varphi_\ell &= \omega\tau_\ell = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} \times 5,3 \text{ h} \simeq \frac{\pi}{2} \\ \Delta\varphi_o &= \omega\tau_o = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} \times 11 \text{ h} \simeq \pi. \end{aligned}$$

Il y a respectivement quadrature et opposition de phase pour la laine de verre et la ouate. C'est donc la ouate qui offre la configuration la plus confortable d'un point de vue thermique : la fraîcheur du soir arrive dans l'habitation après 11h, soit en milieu de journée.