

DS 6 : écoulements des fluides, thermodynamique industrielle et diffusion thermique

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en 3 parties **indépendantes**.
 - Les calculatrices **sont interdites**.
 - Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
 - Indiquer clairement le numéro de la question (exemple question 5.1 de la partie B noter "B5.1", question 21 de la partie C noter "C21", etc.), aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.
-

Partie A : fluides en écoulements

Partie II - Choix de la pompe du toboggan

La pompe qui renvoie l'eau de la piscine sur le haut du toboggan est vieillissante et doit être changée. On donne le schéma d'implantation en **figure 3**.

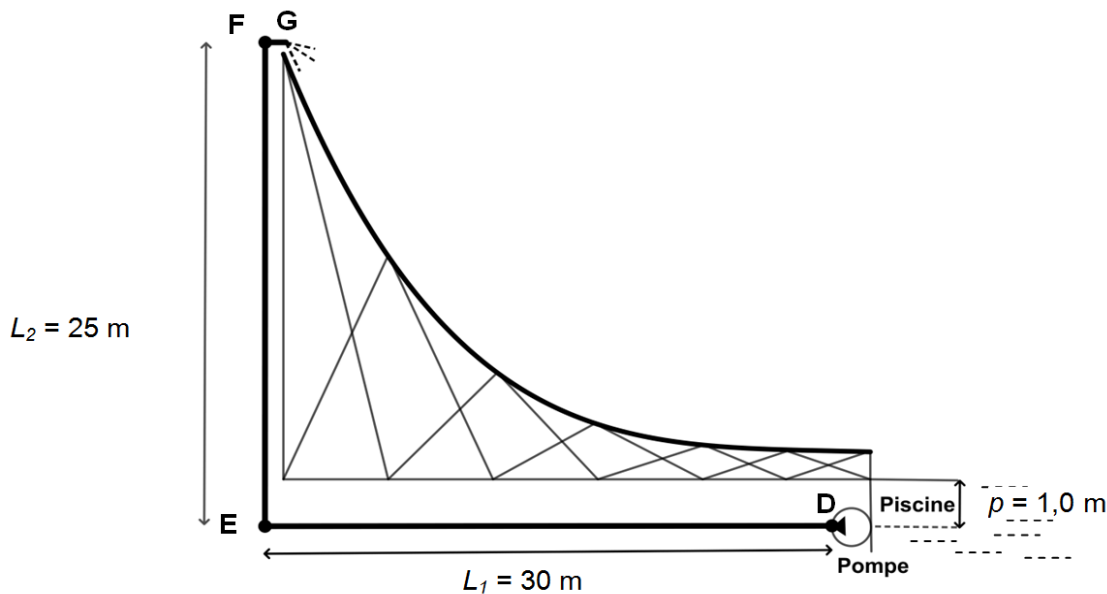


Figure 3 - Schéma des tuyauteries et de positionnement de la pompe

La pompe prélève directement l'eau de la piscine à une profondeur $p = 1,0$ m avec une longueur de tuyau d'aspiration négligeable. Le tronçon horizontal DE, le tronçon vertical EF et le tronçon FG du tuyau de refoulement sont en PVC de section utile $S = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Au point G, point de refoulement à pression atmosphérique, la section est aussi de $S = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Le débit volumique D_V souhaité est égal à $3,6 \cdot 10^4 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1}$.

La pression en D (sortie de pompe) est mesurée : $P_D = 5,5 \text{ bar}$.
On rappelle les données suivantes :

- intensité de la pesanteur : $g = 10 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- masse volumique de l'eau : $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Q14. Écrire la relation de Bernoulli dans le cas d'un fluide parfait en précisant les hypothèses de son utilisation.

On admet que les conditions d'utilisation de la relation de Bernoulli sont effectivement réunies. De plus, la vitesse de l'écoulement est supposée uniforme sur la section des tuyaux.

Q15. Justifier que la valeur de la vitesse d'écoulement du fluide est identique en D et en F.

14. On considère un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible et parfait. Dans ce cas, on peut appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = \text{cst.}$$

15. Dans le cas d'un écoulement stationnaire le débit massique est conservé $D_m = \text{cst.}$ Si le fluide est incompressible alors $\rho = \text{cst.}$ Ainsi le débit volumique est conservé $D_v = \frac{D_m}{\rho} = \text{cst.}$ Ainsi

$$D_{v,D} = D_{v,F}.$$

Comme la vitesse d'écoulement est uniforme sur la section des conduits, il vient que

$$v_D S_D = v_F S_F \iff v_D = v_F$$

car $S_D = S_F$.

Q16. Calculer (en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$) la vitesse d'éjection de l'eau au point G.

Q17. Calculer la pression P_F au point F dans le cadre des hypothèses précédentes.

En réalité, du fait des pertes de charge, on a mesuré au point E une pression $P_E = 5,2$ bar.

Q18. Calculer la pression P'_F à laquelle on peut s'attendre au point F si on néglige les pertes de charge singulières au coude E et si on considère les pertes de charge régulières proportionnelles à la longueur de tuyau.

On suppose maintenant que les pertes de charge totales (régulières et singulières) entre l'entrée de la pompe et le point de sortie G sont $\Delta P_{\text{pertes}} = 2$ bar.

Q19. Montrer que la quantité $D_V \Delta P_{\text{pertes}}$ est homogène à une puissance.

Q20. Exprimer la puissance utile P_u de la pompe à l'aide d'un bilan de puissance entre un point de la surface libre de l'eau de la piscine et le point de refoulement G.

Q21. Vérifier que cette puissance utile P_u vaut 4,4 kW.

En réalité, le rendement global de l'ensemble {moteur + pompe} est de 60 %.

Q22. Calculer la puissance électrique P_{elec} nécessaire au moteur de la pompe.

Pour une pompe, on évoque souvent la Hauteur Manométrique Totale HMT telle que :

$$P_u = \rho D_V g (HMT). \quad (2)$$

Q23. Calculer la hauteur manométrique totale HMT , exprimée en mCE (mètre de Colonne d'Eau).

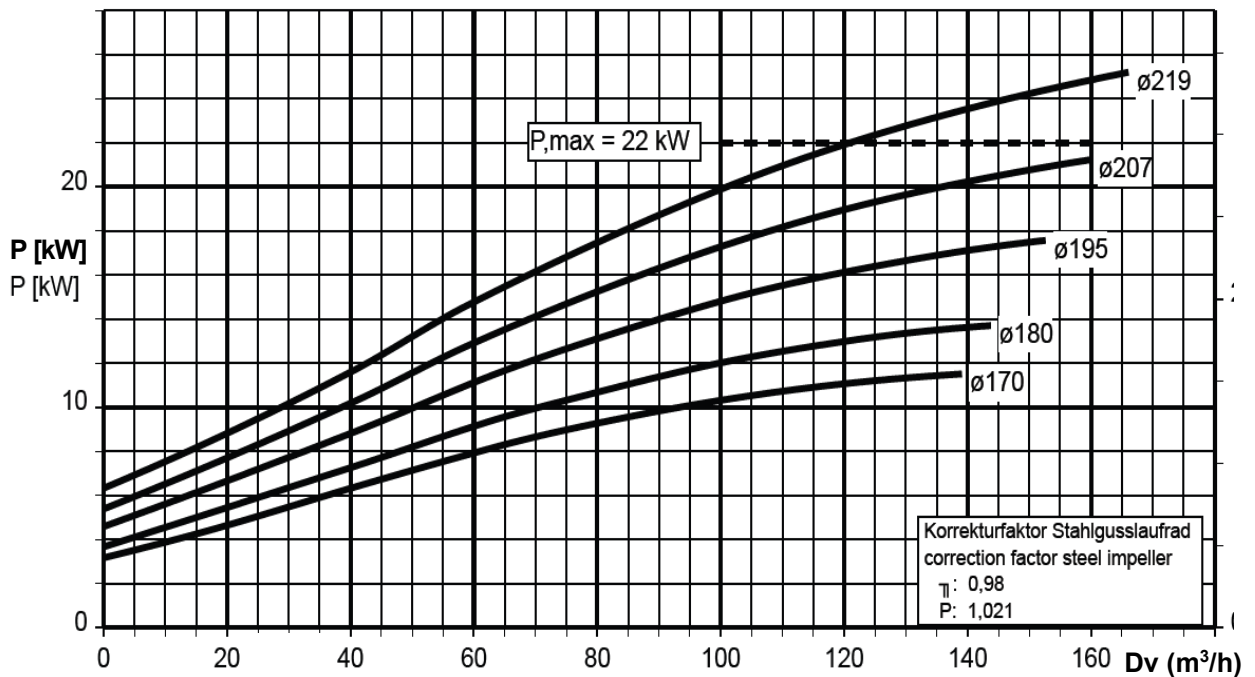
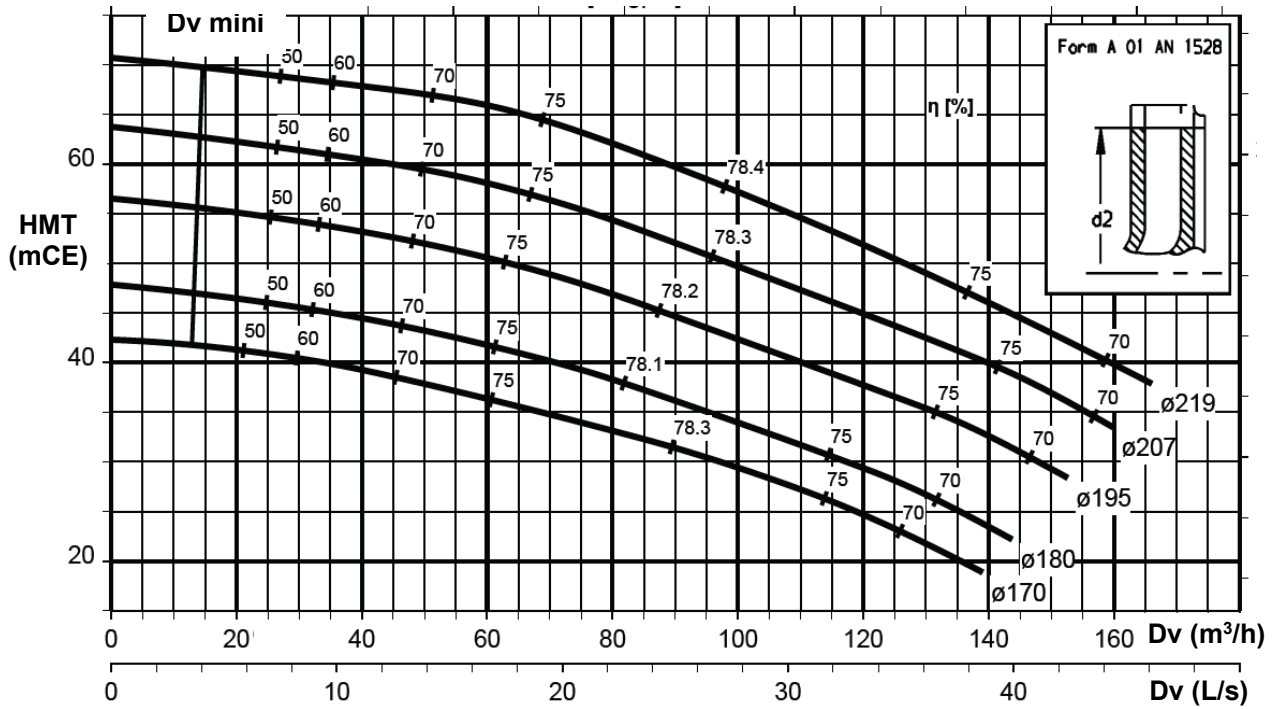
Parmi toutes les pompes disponibles sur le marché, le choix s'est arrêté sur une pompe d'un fabricant qui propose un corps de pompe avec plusieurs diamètres possibles. Le document technique du fabricant est donné en **annexe**.

Q24. Proposer un choix de diamètre pour le remplacement de la pompe.

Q25. Préciser, avec justification, si la pompe fonctionnera à son régime optimal.

ANNEXE

Document technique de la pompe de remplacement



FIN

16. On exprime le débit volumique au point G dans le cas d'une vitesse uniforme, ainsi

$$D_v = S_G v_G = S v_G \iff v_G = \frac{D_v}{S}.$$

$$\text{A.N. } v_G = \frac{3,6 \times 10^4 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1}}{5,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = \frac{10^{-3} \times 3,6 \times 10^4 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{3,6 \times 10^3 \times 5,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2} = \frac{10}{5,0} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

17. Si on applique le théorème de Bernoulli le long de la ligne de courant entre les points D et F , en tenant compte du fait que les vitesses en D , E , F et G sont les mêmes, il vient que

$$\frac{P_D}{\rho} + \frac{v_D^2}{2} + gz_D = \frac{P_F}{\rho} + \frac{v_F^2}{2} + gz_F \iff P_F = P_D + \rho \frac{v_D^2 - v_F^2}{2} + \rho g(z_D - z_F)$$

$$P_F = P_D - \rho g L_2.$$

$$\text{A.N. } P_F = 5,5 \times 10^5 \text{ Pa} - 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 25 \text{ m} = 3,0 \times 10^5 \text{ Pa} = 3,0 \text{ bar}.$$

18. Calculons la pertes de charges régulière par unité de longueur du tuyau. On sait que sur la longueur $L_1 = DE$, les pertes de charges sont

$$\Delta P^* = P_D - P_E. \quad \text{A.N. } \Delta P^* = 5,5 \text{ bar} - 5,2 \text{ bar} = 0,3 \text{ bar}.$$

Ainsi par unité de longueur, la perte de charge régulière est

$$\Delta p^* = \frac{\Delta P^*}{L_1}. \quad \text{A.N. } \Delta p^* = \frac{3 \times 10^4 \text{ Pa}}{30 \text{ m}} = 1 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1}.$$

D'après le théorème de Bernoulli exprimé en terme de pression et adapté au fluide réel sur la ligne de courant entre les points E et F , il vient que

$$P_F + \rho \frac{v_F^2}{2} + \rho g z_F = P_E + \rho \frac{v_E^2}{2} + \rho g z_E - \Delta p^* L_2$$

$$P_F = P_E - \rho g L_2 - \Delta p^* L_2.$$

$$\text{A.N. } P_F = 5,2 \times 10^5 \text{ Pa} - 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 25 \text{ m} - 1 \times 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-1} \times 25 \text{ m}$$

$$P_F = 5,2 \times 10^5 \text{ Pa} - 2,5 \times 10^5 \text{ Pa} - 0,25 \times 10^5 \text{ Pa} = 2,45 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

19. Faisons l'étude des unités du terme

$$[D_v \Delta P_{\text{pertes}}] = [D_v] \times [P_{\text{pertes}}] = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \times \text{Pa} = \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \times \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{N} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

or la puissance d'une force est définie telle que $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Le terme étudié est donc bien homogène à une puissance.

20. Faisons le bilan de puissance entre un point de la surface libre de l'eau de la piscine noté C et le point de refoulement G à l'aide du théorème de Bernoulli exprimé en terme de pression et adapté au fluide réel

$$P_G + \rho \frac{v_G^2}{2} + \rho g z_G = P_C + \rho \frac{v_C^2}{2} + \rho g z_C - \Delta P_{\text{pertes}} + \Delta P_{\text{pompe}}$$

avec ΔP_{pompe} la surpression due à la pompe et liée à la puissance utile de la pompe telle que $\mathcal{P}_u = D_v \Delta P_{\text{pompe}}$ d'après la question précédente. Ainsi en multipliant la dernière équation par D_v il vient que

$$D_v \left(P_G + \rho \frac{v_G^2}{2} + \rho g z_G \right) = D_v \left(P_C + \rho \frac{v_C^2}{2} + \rho g z_C - \Delta P_{\text{pertes}} \right) + \mathcal{P}_u$$

$$\mathcal{P}_u = D_v \left(P_G - P_C + \rho \frac{v_G^2 - v_C^2}{2} + \rho g (z_G - z_C) + \Delta P_{\text{pertes}} \right).$$

Les pressions en G et en C correspondent à la pression atmosphérique car ces deux points sont en contact avec l'atmosphère, ainsi $P_G - P_C = 0$. Comme le niveau de la piscine ne change pas, la vitesse de l'écoulement au point C est nul, ainsi

$$\mathcal{P}_u = D_v \rho \left(\rho \frac{v_G^2}{2} + \rho g (z_G - z_C) + \Delta P_{\text{pertes}} \right).$$

21. **A.N.**

$$\mathcal{P}_u = \frac{10^{-3} \times 3,6 \times 10^4 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}}{3600} \times \left(10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \frac{(2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2} + 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times (25 - 1) \text{ m} + 2 \times 10^5 \text{ Pa} \right)$$

$$= 10^{-2} \times (2 \times 10^3 + 2,4 \times 10^5 + 2 \times 10^5) \text{ W} = 4,42 \times 10^3 \text{ W} = 4,4 \text{ kW}.$$

22. La puissance électrique fournie au moteur est convertie en puissance utile avec le rendement donné η , ainsi

$$\mathcal{P}_{\text{elec}} = \frac{\mathcal{P}_u}{\eta}. \quad \text{A.N.} \quad \mathcal{P}_{\text{elec}} = \frac{4,4 \text{ kW}}{0,6} = 7,3 \text{ kW}.$$

23. D'après l'expression fournie

$$HMT = \frac{\mathcal{P}_u}{\rho D_v g}.$$

$$\text{A.N.} \quad HMT = \frac{4,4 \times 10^3 \text{ W} \times 3600}{10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 10^{-3} \times 3,6 \times 10^4 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1} \times 10 \text{ m s}^{-2}} = 44 \text{ mCE}.$$

24. Sur le premier graphe en annexe, on repère le point de fonctionnement recherché soit une HMT de 44 mCE pour un débit de $D_v = 3,6 \times 10^4 \text{ L} \cdot \text{h}^{-1} = 36 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$. Ce point de fonctionnement se rapproche de la deuxième courbe en partant du bas correspond au diamètre 180 mm, on prendra donc ce diamètre pour la pompe de remplacement.

25. Toujours d'après le premier graphe, le point de fonctionnement correspondant à la HMT et le débit D_v étudiés présente un rendement $\eta \approx 60\%$. Or on voit que le rendement maximum pour ce diamètre est de 78,1%. Comme la pompe ne fonctionnera pas à son rendement maximal est **elle ne fonctionnera pas à son régime optimal**.

Partie B : thermodynamique industrielle et diffusion thermique

Partie III - Réfrigérateur à compresseur

Le réfrigérateur à compresseur est le réfrigérateur le plus courant dans les cuisines. Comment le reconnaître ? Si votre réfrigérateur fait du bruit de temps en temps, c'est justement à cause du compresseur !

Un réfrigérateur a pour but de refroidir les aliments qu'il contient pour permettre leur conservation. Pour cela, un fluide va décrire un cycle thermodynamique appelé cycle frigorifique.

On se propose, dans cette partie, d'étudier un modèle thermodynamique simple du fonctionnement du réfrigérateur.

On considère une machine frigorifique ditherme cyclique basée sur le principe de fonctionnement suivant : " Un fluide frigorigène circule entre les différents organes de la machine. Mis en mouvement par le compresseur, ce fluide refroidit la source froide et réchauffe la source chaude ".

Un schéma simplifié de ce réfrigérateur est donné **figure 6**.

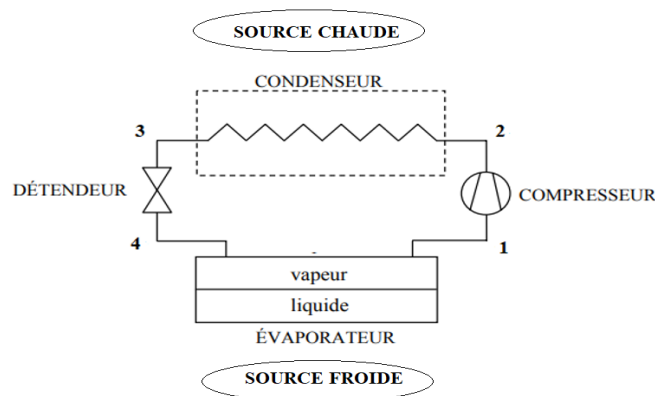


Figure 6 - Schéma simplifié du réfrigérateur

On notera Q_f et Q_c les transferts thermiques reçus algébriquement par le fluide de la part, respectivement de la source froide et de la source chaude au cours d'un cycle modèle. On notera W , le travail reçu par le fluide au cours d'un cycle.

Q35. Donner et justifier les signes des quantités algébriques suivantes : Q_f , Q_c et W .

Q36. Sachant que le réfrigérateur est installé dans la cuisine, indiquer où se situe la source froide et où se situe la source chaude.

Le condenseur est la série de longs et fins tubes noirs situés généralement sur la face arrière du réfrigérateur.

Q37. Sans utiliser le diagramme enthalpique de la **figure 7**, indiquer si, lorsque le fluide traverse le condenseur, sa température est supérieure, inférieure ou égale à celle de l'air ambiant.

La **figure 7** représente le diagramme enthalpique (pression P en fonction de l'enthalpie massique h) d'un fluide frigorigène (ici le R134a). Les transformations au cours d'un cycle sont :

- 1 \rightarrow 2 : compression adiabatique réversible du fluide dans le compresseur calorifugé ;
- 2 \rightarrow 3 : échange thermique isobare à haute pression P_c dans le condenseur ;
- 3 \rightarrow 4 : détente isenthalpique dans le détendeur ;
- 4 \rightarrow 1 : échange thermique isobare à basse pression P_e dans l'évaporateur.

35. Le réfrigérateur est une machine frigorifique, le sens du transfert thermique n'est donc pas naturel : il va "du froid vers le chaud". Ainsi la source froide réchauffe le fluide : $Q_f > 0$, et la source chaude refroidit le fluide : $Q_c < 0$. Pour assurer ce transfert thermique, il faut apporter de l'énergie au fluide sous forme de travail : $W > 0$.
36. La source froide est l'**intérieur du réfrigérateur** et la source chaude est l'**air extérieur**.
37. Le condenseur permet, d'après le schéma, l'échange thermique entre le fluide et la source chaude. Or, comme on l'a dit, la source chaude refroidit le fluide, ainsi la température du fluide qui traverse le condenseur est **supérieure** à celle de l'air ambiant.

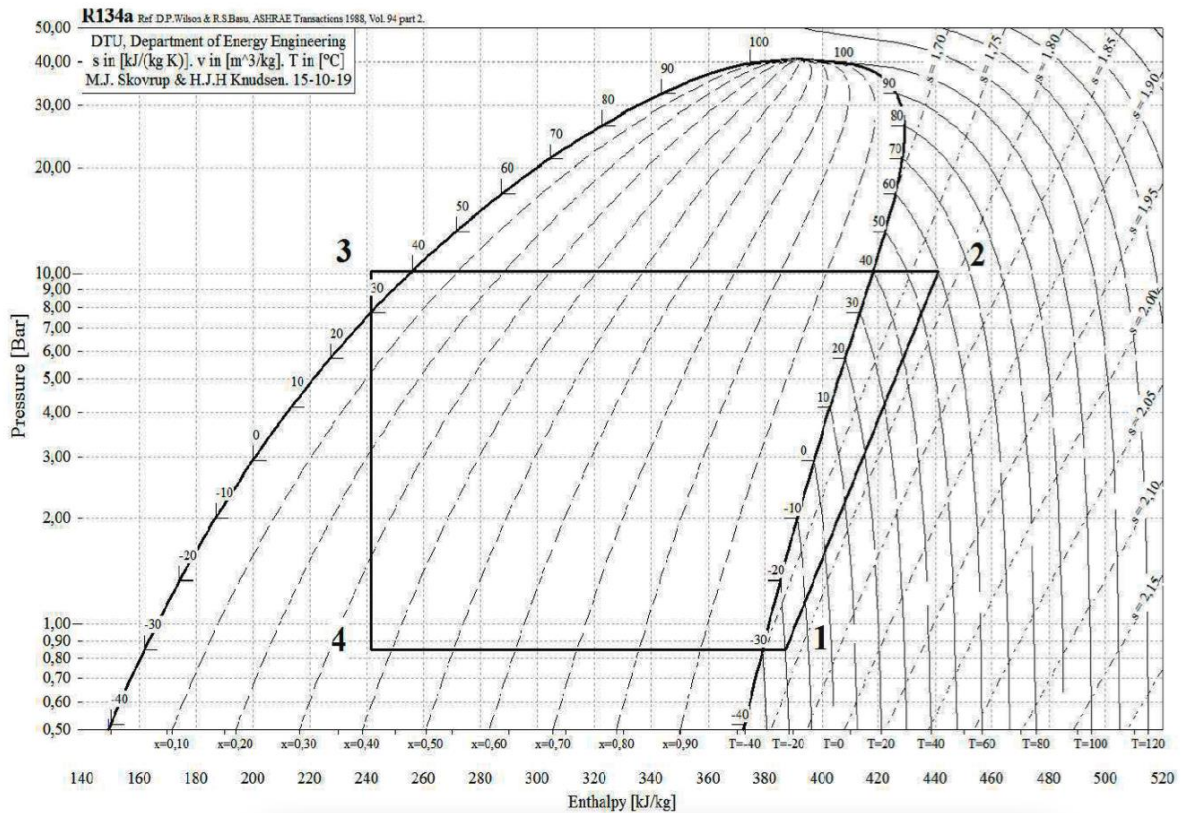


Figure 7 - Cycle suivi par le fluide R134a dans le diagramme enthalpique

- Q38.** En utilisant le diagramme enthalpique ci-dessus, répondre aux questions suivantes.
- Donner les valeurs des pressions P_e au sein de l'évaporateur et P_c au sein du condenseur.
 - Déterminer le titre massique x_v en vapeur au point 4.
 - Donner la valeur de la température T_2 en sortie du compresseur.
- Q39.** Donner l'expression générale du premier principe lorsqu'il est appliqué à un fluide en écoulement stationnaire unidimensionnel en nommant les grandeurs introduites.
- Dans la suite des questions, on négligera les variations d'altitude et de vitesse du fluide.
- Q40.** Déterminer les transferts thermiques massiques reçus par le fluide de la part de la source froide q_f et de la source chaude q_c , ainsi que le travail indiqué (ou utile) massique w reçu au cours du cycle.
- Q41.** Montrer que l'efficacité e_1 de ce réfrigérateur est proche de 3,0.
- Q42.** En appliquant les deux principes de la thermodynamique à un cycle réversible, montrer que l'expression de l'efficacité de Carnot pour une machine frigorifique fonctionnant entre une source chaude T_c et une source froide T_f , est donnée par :

$$e_{carnot} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

38. (a) Au sein de l'évaporateur, il y a vaporisation du fluide, or l'étape correspondant à un changement d'état liquide-gaz est l'étape 4 – 1. D'après le diagramme, ce changement se fait à la pression $P_e = 0,85$ bar. Au sein du condenseur, il y a liquéfaction du fluide, or l'étape correspondant à un changement d'état gaz-liquide est l'étape 2 – 3. D'après le diagramme, ce changement se fait à la pression $P_c = 10$ bar.
- (b) Sur ce palier de changement d'état les enthalpies massiques de liquide saturant et vapeur saturante sont, d'après le diagramme, respectivement $h_L \simeq 160 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $h_V \simeq 380 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ d'après le diagramme. L'enthalpie massique du point 4 est elle $h_4 \simeq 240 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ toujours d'après le diagramme. D'après le théorème des moments, le titre en vapeur au point 4 est donc

$$x_v = \frac{h_4 - h_L}{h_V - h_L}.$$

A.N. $x_v = \frac{240 - 160}{380 - 160} = \frac{80}{220} = \frac{4}{11} \simeq 0,4.$

D'après lecture des isotitres du diagrammes on trouve une valeur du même ordre du grandeur : $x \simeq 0,38.$

- (c) En sortie du compresseur, la pression augmente de $P_1 = P_e$ jusqu'à $P_2 = P_c$. Par lecture du diagramme, on constate grâce l'isotherme au point 2 que $T_2 = 60^\circ\text{C}.$
39. Le premier principe lorsqu'il est appliqué à un fluide en écoulement stationnaire unidimensionnel correspond au premier principe industriel, soit

$$\left(h_s + \frac{1}{2}v_s^2 + gz_s \right) - \left(h_e + \frac{1}{2}v_e^2 + gz_e \right) = q + w_i$$

avec h , v et z l'enthalpie massique, la vitesse et la hauteur du fluide, et les indices s et e correspondant au fluide en sortie et en entrée de l'élément étudié; q et w_i la chaleur massique et le travail indiqué massique échangé avec l'extérieur par le fluide.

40. Le fluide est en contact avec la source froide lorsqu'il passe par l'évaporateur, soit l'étape 4 – 1. En appliquant le premier principe industriel à cette étape en négligeant les variations d'altitude et de vitesse du fluide, il vient que

$$h_1 - h_4 = q_{4-1} = q_f$$

avec $w_{i,4-1} = 0$ car il n'y a pas d'élément mobile dans l'évaporateur. On voit bien que $h_1 > h_4$ donc $q_f > 0.$

Le fluide est en contact avec la source chaude lorsqu'il passe par le condenseur, soit l'étape 2 – 3. En appliquant le premier principe industriel à cette étape en négligeant les variations d'altitude et de vitesse du fluide, il vient que

$$h_3 - h_2 = q_{2-3} = q_c$$

avec $w_{i,2-3} = 0$ car il n'y a pas d'élément mobile dans le condenseur. On voit bien que $h_3 < h_2$ donc $q_c < 0.$

Le seul élément qui comporte une partie mobile est le compresseur qui intervient à l'étape 1 – 2. En appliquant le premier principe industriel à cette étape en négligeant les variations d'altitude et de vitesse du fluide, il vient que

$$h_2 - h_1 = w_{i,1-2} = w$$

avec $q_{1-2} = 0$ car la compression est adiabatique d'après l'énoncé. On voit bien que $h_2 > h_1$ donc $w > 0.$

41. La définition de l'efficacité est la valeur absolue du rapport de l'énergie utile sur l'énergie payante, dans le cas du réfrigérateur l'énergie utile est le transfert thermique avec la source froide : $q_f > 0$; et l'énergie payante est le travail mécanique reçu : $w > 0$. Ainsi

$$e_1 = \frac{q_f}{w} = \frac{h_1 - h_4}{h_2 - h_1}.$$

A.N. $e_1 \simeq \frac{385 - 240}{440 - 385} = \frac{145}{55} \simeq \frac{15}{5} = 3.$

42. D'après le premier principe de la thermodynamique appliquée à une machine ditherme

$$\Delta U = Q_c + Q_f + W.$$

Pour un cycle $\Delta U = 0$, donc $W = -Q_c - Q_f$. L'expression de l'efficacité dans notre cas est donc

$$e_1 = \frac{Q_f}{W} = \frac{Q_f}{-Q_c - Q_f} = \frac{1}{-\frac{Q_c}{Q_f} - 1}.$$

D'après le deuxième principe de la thermodynamique appliquée à une machine ditherme

$$\Delta S = S_c + S_{r,f} + S_{r,c} = S_c + \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c}.$$

Dans le cas d'un cycle réversible, l'efficacité correspond à l'efficacité de Carnot e_{Carnot} et l'entropie créée est nulle, ainsi

$$\Delta S = \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c}.$$

Dans le cas d'un cycle réversible $\Delta S = 0$, donc $\frac{Q_c}{T_c} = -\frac{Q_f}{T_f}$, soit $\frac{Q_c}{Q_f} = -\frac{T_c}{T_f}$. Ainsi

$$e_{\text{Carnot}} = \frac{1}{-\frac{Q_c}{Q_f} - 1} = \frac{1}{\frac{T_c}{T_f} - 1} = \frac{T_f}{T_c - T_f}.$$

- Q43.** Donner une valeur numérique approchée de l'efficacité de Carnot du réfrigérateur dans le cas d'une source froide à la température $T_f = 3,0 \text{ °C}$ et d'une source chaude à la température $T_c = 23 \text{ °C}$. Comparer à la valeur trouvée pour le cycle précédent. Le résultat de cette comparaison était-il prévisible ? Justifier la réponse apportée.

Du givre peut se former à l'intérieur du réfrigérateur : en effet, l'évaporateur étant très froid, la vapeur d'eau se transforme en fines couches de glace appelée givre.

- Q44.** Nommer le changement d'état relatif à cette formation du givre.

Si on laisse s'accumuler une couche de givre, on admet que l'entropie créée S_c augmente pour un même transfert thermique pris à la source froide lors d'un cycle.

- Q45.** Montrer que l'on obtient pour un cycle réel la relation suivante :

$$\frac{Q_c}{Q_f} = -\alpha \frac{T_c}{T_f}$$

où α est une constante à préciser en fonction de T_f , Q_f et de S_c .

En prenant une valeur de α égale à 1,55, l'efficacité du réfrigérateur est à présent égale à $e_2 = 1,50$.

- Q46.** En déduire la surconsommation électrique du réfrigérateur due à la présence de givre. On pourra donner le résultat en pourcentage.

Partie IV - Bouteille de vin

Dans le monde du vin, une " bouteille carrée " est à la fois rare et originale. Des vigneron du sud de la France ont commercialisé du vin dans une bouteille de forme parallélépipédique à base carrée modélisée à la **figure 8**.

Une bouteille de vin, choisie dans la cave à une température de $T_i = 8,0 \text{ °C}$ est apportée dans la cuisine dont la température vaut $T_A = 22 \text{ °C}$.

La bouteille est assimilée à un parallélépipède de longueur $L = 20 \text{ cm}$, de largeur $l = 7,5 \text{ cm}$ et dont l'épaisseur e du verre est égale à $e = 3,0 \text{ mm}$.

Dans cette modélisation simple, les échanges thermiques entre l'extérieur et le vin se font uniquement au niveau des surfaces latérales de la bouteille.

La température T_i du vin est supposée uniforme à l'intérieur de la bouteille. On se place en régime quasi-stationnaire.

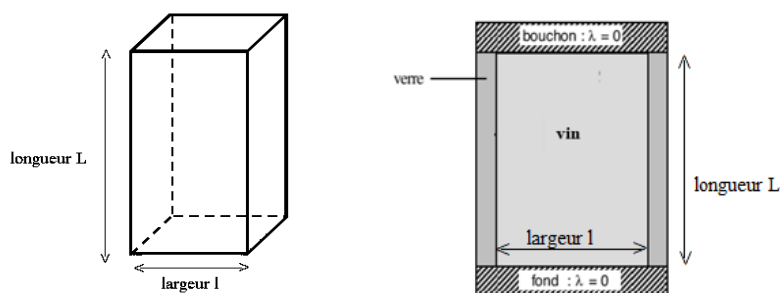


Figure 8 - Modélisation de la bouteille de vin
(Schéma de gauche : vue en 3D - Schéma de droite : vue d'une face)

43. En utilisant les valeurs données en kelvin, il vient que

$$e_{\text{Carnot}} = \frac{279 \text{ K}}{296 \text{ K} - 279 \text{ K}} = \frac{279}{20} \simeq \frac{28}{2} = 14.$$

L'efficacité de Carnot est bien supérieure à l'efficacité réelle du cycle. C'était prévisible car le cycle réel tient compte des sources d'irréversibilité comme les inhomogénéités de température et les frottements.

44. Ce changement de gaz à solide se nomme **condensation**.

45. Si l'on reprend le deuxième principe appliquée précédemment, dans un cycle il vient que

$$\begin{aligned} 0 = S_c + S_{r,f} + S_{r,c} &= S_c + \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \quad ; \quad \frac{Q_c}{T_c} = -S_c - \frac{Q_f}{T_f} \quad ; \quad Q_c = -S_c T_c - Q_f \frac{T_c}{T_f} \\ \frac{Q_c}{Q_f} &= -\frac{S_c T_c}{Q_f} - \frac{T_c}{T_f} = -\frac{S_c T_f T_c}{Q_f T_f} - \frac{T_c}{T_f} \\ \frac{Q_c}{Q_f} &= -\left(\frac{S_c T_f}{Q_f} + 1\right) \frac{T_c}{T_f}. \end{aligned}$$

On identifie le coefficient $\alpha = \frac{S_c T_f}{Q_f} + 1$.

46. La consommation électrique du réfrigérateur correspond à l'énergie payante qu'il reçoit, soit le travail W si on considère que toute l'énergie électrique est convertie en énergie électrique. La surconsommation correspond donc au rapport entre la différence d'énergie payante avec givre et l'énergie payante sans givre, divisée par l'énergie payante sans givre, soit

$$\begin{aligned} \frac{w_{\text{givre}} - w}{w} &= \frac{w_{\text{givre}}}{w} - 1 = \frac{Q_f}{e_1} \frac{e_2}{Q_f} - 1 = \frac{e_1}{e_2} - 1. \\ \text{A.N.} \quad \frac{e_1}{e_2} - 1 &= \frac{3,0}{1,50} - 1 = 2,0 - 1 = 1,0 = 100\%. \end{aligned}$$

Le réfrigérateur consomme deux fois plus qu'il ne devrait.

Données - Partie IV
Conductivité thermique du verre : $\lambda = 1,0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Capacité thermique du système {vin + bouteille} : $C = 3,0 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}$
Masse volumique du vin (approximée à celle de l'eau) : $\rho = 1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Coefficient conducto-convectif : $h = 10 \text{ (SI)}$

On étudie, dans les questions **Q47** à **Q50**, le phénomène de conduction thermique à travers une des surfaces latérales de la bouteille, d'épaisseur e et de surface S . On notera T_S la température de la surface extérieure du verre, égale à T_A en l'absence de convection.

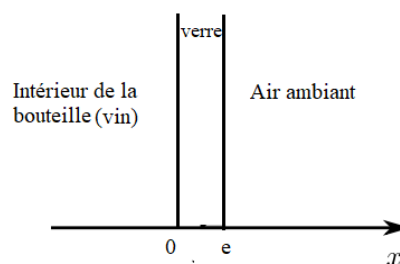


Figure 9 - Modélisation d'une surface latérale de la bouteille de vin

- Q47.** Énoncer la loi de Fourier dans un cas unidimensionnel en coordonnées cartésiennes et préciser, sur le schéma de la **figure 9** à reproduire sur votre copie, le sens réel du vecteur densité de flux thermique.
- Q48.** En vous basant sur une analogie électrique, donner les correspondances entre les trois grandeurs thermiques suivantes *température* T , *résistance thermique* R_{th} , *flux thermique* φ et les grandeurs électriques analogues.
- Q49.** En déduire l'expression littérale de la résistance thermique en fonction de T_i , T_S et du flux thermique.
- Q50.** Après avoir rappelé la relation entre le flux thermique et le vecteur densité de flux thermique, montrer que la résistance thermique R_{th} associée à la surface latérale de la bouteille d'épaisseur e et de surface S , représentée sur la **figure 9**, s'écrit :

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S}.$$

- Q51.** En déduire l'expression littérale de la résistance thermique totale R_1 relative à la totalité des faces latérales de la bouteille, puis faire l'application numérique.

En plus de la conduction thermique étudiée ci-dessus, on doit tenir compte des échanges thermiques superficiels entre le verre et l'air. Une surface de verre de surface S , à la température T_S , échange avec l'air, à la température T_A , le flux thermique $\varphi = hS(T_S - T_A)$ où h est le coefficient conducto-convectif, constant et uniforme sur toute la surface S (avec $h > 0$).

- Q52.** Déterminer l'unité de h .
- Q53.** Exprimer la résistance thermique de convection R_2 relative à la totalité des surfaces latérales de la bouteille en fonction de h , L et de l .
- Q54.** Donner l'expression de la résistance thermique totale R_{tot} d'échange entre le vin et l'air extérieur, puis faire l'application numérique. Conclure.

47. La loi de Fourier est

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

Ici l'on considère que le profil de température est uniquement selon x donc

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} \vec{u}_x.$$

Le sens du vecteur densité de flux thermique va donc du chaud vers le froid, donc de la droite, air ambiant plus chaud, vers la gauche, intérieur de la bouteille plus froid : $\vec{j}_{\text{th}} = -j_{\text{th}} \vec{u}_x$.

48. Les correspondances sont :

- température T analogue à potentiel électrique V
- résistance thermique R_{th} analogue à résistance électrique R
- flux thermique φ analogue à l'intensité du courant électrique I .

49. Par analogie avec la loi d'Ohm on peut écrire la loi d'Ohm thermique

$$V_A - V_i = RI \quad ; \quad T_A - T_i = R_{\text{th}} \varphi \quad ; \quad R_{\text{th}} = \frac{T_A - T_i}{\varphi}$$

la différence de potentiel $U = V_A - V_i$ est dans le sens opposé au courant I en convention récepteur, ainsi comme ici l'analogie de I qui est φ va de droite à gauche, la différence de température est bien définie comme $T_A - T_i$.

50. Le flux thermique est bien le flux du vecteur densité de flux thermique, soit

$$\varphi = \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S}.$$

Comme on considère le flux entrant de droite à gauche alors $d\vec{S} = -dS \vec{u}_x$, ainsi

$$\varphi = \iint_S -j_{\text{th}} \cdot (-dS \vec{u}_x) = j_{\text{th}} S$$

en considérant que \vec{j}_{th} est uniforme sur toute la surface latérale S de la bouteille. Or d'après Fourier

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} \vec{u}_x \quad ; \quad -j_{\text{th}} \vec{u}_x = -\lambda \frac{dT(x)}{dx} \vec{u}_x \quad ; \quad j_{\text{th}} = \lambda \frac{dT(x)}{dx} \\ \text{ainsi } \varphi = \lambda S \frac{dT(x)}{dx} \quad ; \quad dT = \frac{\varphi}{\lambda S} dx \\ \int_{T_i}^{T_A} dT = \frac{\varphi}{\lambda S} \int_0^e dx \quad ; \quad T_A - T_i = \frac{e}{\lambda S} \varphi \quad ; \quad \frac{e}{\lambda S} = \frac{T_A - T_i}{\varphi}. \end{aligned}$$

On montre bien que la résistance thermique associée à la surface latérale de la bouteille est

$$R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}.$$

51. Les quatre surfaces latérales sont associées en parallèle (le flux thermique doit passer au travers des quatre surfaces en même temps et pas l'une après l'autre), ainsi

$$R_1 = \frac{1}{\sum_1^4 \frac{1}{R_{\text{th}}}} = \frac{1}{\frac{4}{R_{\text{th}}}} = \frac{R_{\text{th}}}{4} = \frac{e}{4\lambda S}.$$

On aurait pu directement écrire la résistance totale en considérant que la surface totale était 4 fois plus importante qu'une seule surface et que l'épaisseur et la conductivité étaient restées constantes.

$$\begin{aligned} \text{A.N. } R_1 &= \frac{3 \times 10^{-3} \text{ m}}{4 \times 1,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1} \times 2 \times 10^{-1} \text{ m} \times 7,5 \times 10^{-2} \text{ m}} = \frac{3 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}}{4 \times 15} \\ &= \frac{1 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}}{20} = \frac{100 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}}{20} = 5 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}. \end{aligned}$$

52. D'après l'expression fournie

$$h = \frac{\varphi}{S(T_S - T_A)}$$

le coefficient conducto-convectif s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

53. D'après la loi d'Ohm thermique, la résistance de convection d'une seule surface est

$$R_{\text{conv}} = \frac{T_S - T_A}{\varphi} = \frac{1}{hS}$$

Ainsi la résistance thermique de convection totale correspond à la résistance équivalente d'une association de résistances en parallèle, soit comme on l'a vu plus tôt

$$R_2 = \frac{1}{\sum_1^4 \frac{1}{R_{\text{conv}}}} = \frac{1}{\frac{4}{R_{\text{conv}}}} = \frac{R_{\text{conv}}}{4} = \frac{1}{4hS} = \frac{1}{4h\ell L}$$

De nouveau, on aurait pu directement écrire la résistance totale en considérant que la surface totale était 4 fois plus importante qu'une seule surface et que le coefficient conducto-convectif était resté constant.

54. La résistance de conduction totale R_1 est en série avec la résistance de convection totale R_2 (le flux thermique passe par ces résistances l'une après l'autre), ainsi

$$R_{\text{tot}} = R_1 + R_2 = \frac{e}{4\lambda\ell L} + \frac{1}{4h\ell L} = \frac{1}{4\ell L} \left(e + \frac{1}{h} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A.N.} \quad R_{\text{tot}} &= 5 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} + \frac{1}{4 \times 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \times 15 \times 10^{-3} \text{ m}^2} \\ &= 5 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} + \frac{10 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}}{6} \simeq 5 \times 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} + 1,5 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} = 1,55 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}. \end{aligned}$$

On peut conclure que c'est le phénomène conducto-convectif qui contribue le plus à la résistance thermique.

Chamber un vin est une pratique ancienne, qui consiste à remonter de la cave les vins rouges pour les ramener doucement à la température de la pièce, avant de les servir. En réalité, la température du système {vin + bouteille} dépend lentement du temps (d'où l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire) et elle sera notée $T(t)$ par la suite. Pour une dégustation optimale, le vin doit atteindre une température de 16 °C.

Q55. À l'aide du premier principe de la thermodynamique, montrer que la température $T(t)$ du système {vin + bouteille} vérifie une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = K.$$

Préciser également les expressions littérales des constantes τ et K .

Q56. Sachant que $\tau = 5,4 \cdot 10^3$ s et $\tau K = 295$ K, exprimer, puis calculer la durée nécessaire pour que le vin atteigne sa température optimale de dégustation $T_D = 16$ °C. On donne : $\ln\left(\frac{7}{3}\right) \approx 0,8$.

Q57. Déterminer le sens d'évolution de cette durée dans le cas où le coefficient conducto-convectif h augmente. Justifier.

55. Comme la pression extérieure est constante, on applique le premier principe enthalpique sur le système {vin + bouteille}

$$dH = \delta Q$$

avec Q la chaleur reçue par le système telle que $Q = \varphi dt$. Or on sait que

$$T_A - T = R_{\text{tot}}\varphi \quad ; \quad \varphi = \frac{T_A - T}{R_{\text{tot}}}$$

avec T la température du système. Ainsi

$$\frac{dH}{dt} = \frac{T_A}{R_{\text{tot}}} + \frac{T}{R_{\text{tot}}}.$$

Si on considère le système comme une phase condensée indilatable et incompressible, alors $dH = CdT$, ainsi

$$C \frac{dT}{dt} = \frac{T_A}{R_{\text{tot}}} - \frac{T}{R_{\text{tot}}} \quad ; \quad \frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{\text{tot}}C} = \frac{T_A}{R_{\text{tot}}C}.$$

On peut identifier la constante $\tau = R_{\text{tot}}C$ qui correspond au temps caractéristique de variation de la température du système, et la constante $K = \frac{T_A}{R_{\text{tot}}C} = \frac{T_A}{\tau}$.

56. On résout l'équation différentielle précédente. La solution particulière est

$$\frac{T_p}{\tau} = \frac{T_A}{\tau} \quad ; \quad T_p = T_A.$$

L'équation homogène est

$$\frac{dT_h}{dt} = -\frac{T_h}{\tau} \quad ; \quad T_h = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La solution générale est

$$T = T_A + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

On sait qu'à l'instant $t = 0$ le système est à la température de la cave T_i , ainsi

$$T_i = T_A + A \quad ; \quad A = T_i - T_A \quad ; \quad T = T_A + (T_i - T_A)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Le vin atteindra la température de dégustation à l'instant t_D tel que

$$T_D = T_A + (T_i - T_A)e^{-\frac{t_D}{\tau}} \quad ; \quad \frac{T_D - T_A}{T_i - T_A} = e^{-\frac{t_D}{\tau}}$$

$$\ln\left(\frac{T_A - T_D}{T_A - T_i}\right) = -\frac{t_D}{\tau} \quad ; \quad t_D = -\tau \ln\left(\frac{T_A - T_D}{T_A - T_i}\right) \quad ; \quad t_D = \tau \ln\left(\frac{T_A - T_i}{T_A - T_D}\right).$$

$$\mathbf{A.N.} \quad t_D = 5,4 \times 10^3 \text{ s} \times \ln\left(\frac{14}{6}\right) = 5,4 \times 10^3 \text{ s} \times \ln\left(\frac{7}{3}\right) \simeq 0,8 \times 5,4 \times 10^3 \text{ s} = 4,3 \times 10^3 \text{ s}$$

57. Le temps caractéristique est tel que

$$\tau = R_{\text{tot}}C = \frac{1}{4\ell L} \left(e + \frac{1}{h} \right)$$

ainsi si h augmente, la résistance thermique diminue, ainsi que le temps caractéristique et la durée nécessaire pour que le vin atteigne sa température optimale : ce qui se comprend bien car plus h est important, plus le flux de chaleur l'est également, ce qui réduit la durée avant l'obtention de l'équilibre thermique.