



Lycée Charles Coëffin — Sciences physique

Fiche de travaux pratiques — CPGE TSI2

TD 1 : Stabilité des systèmes linéaires

Objectifs

- Déterminer une fonction de transfert.
- Identifier la nature d'un filtre à partir du schéma ou de la fonction de transfert.
- Prévoir le signal de sortie ainsi que sa composition spectrale à partir de la fonction de transfert.
- Transposer la fonction de transfert opérationnelle dans les domaines fréquentiel ou temporel.
- Discuter la stabilité d'un système d'ordre 1 ou 2.

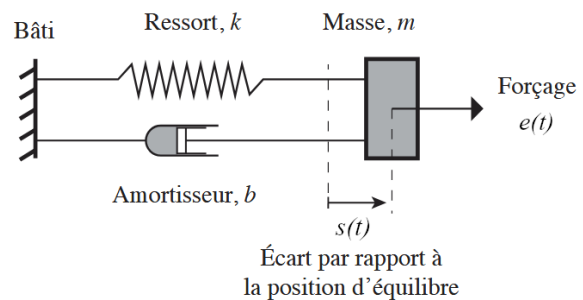
Pré-requis : régime sinusoïdal forcé, méthode complexe, associations d'impédances complexes ; signal périodique, décomposition d'un signal, fonction de transfert, filtres du premier et du deuxième ordre.

1 Exercices

Exercice 1.1 Fil rouge ★

On revient sur le modèle d'amortisseur de moto. On a montré que l'équation différentielle que respecte la masse m est

$$ks(t) + \beta\dot{s}(t) + m\ddot{s}(t) = e(t).$$



1. **Retrouver** l'équation différentielle.
2. **Déterminer** si l'ensemble du système est linéaire, continu et invariant.
3. **Déterminer** la fonction de transfert du système et **tracer** son digramme de Bode en amplitude asymptotique.
4. **Déterminer** si le système est stable.

Exercice 1.2 Gain et déphasage ★

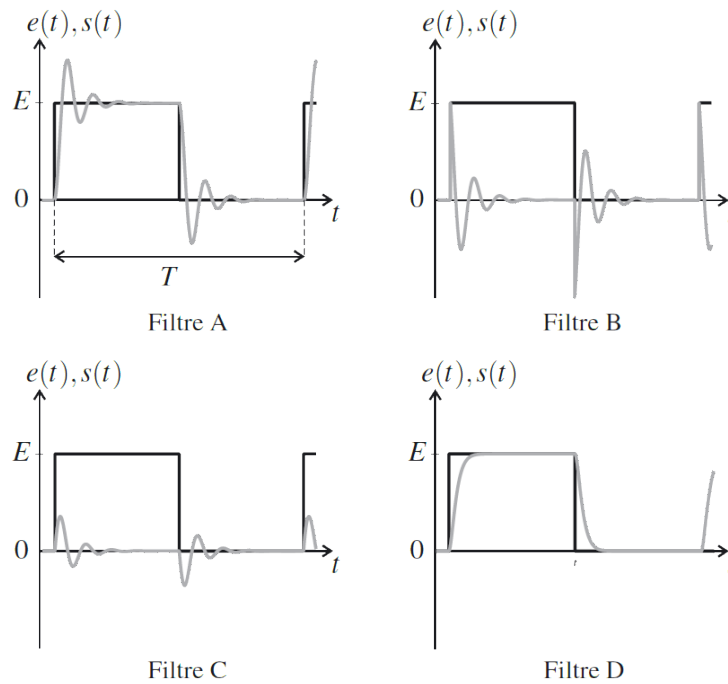
Un filtre présente un gain de -3,8 dB. **Déterminer** le facteur multiplicatif entre les tensions d'entrée et de sortie.

Pour une tension d'entrée $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, un filtre présente une sortie $s(t) = 12,3 \times E_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$. **Déterminer** le gain en dB du filtre, ainsi que le déphasage.

Exercice 1.3 Filtrage ★ ★

Les figures ci-après représentent le signal de sortie $s(t)$ (représenté en gris) pour un signal d'entrée $e(t)$ carré symétrique de période T valant alternativement 0 et E (représenté en noir) et différents filtres d'ordre deux.

Identifier la nature (passe-bas, passe-haut ou passe-bande) de chacun de ces filtres. **Comparer** la période T et le temps de réponse des filtres.



Signaux d'entrée (noirs) et de sortie (gris) des filtres.

2 Annale



CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

4 heures

Calculatrice autorisée

Physique-chimie 2

TSI

2019

Accordeur, TGV et effet Hall

Ce sujet comporte trois parties indépendantes :

- Accordeur de guitare ;
- Dimensionnement du chauffage d'une voiture de TGV ;
- Transferts de charges par effet Hall.

Il est accompagné d'un document réponse utilisé dans la partie I.

I Accordeur de guitare

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau 1.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

Tableau 1 Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

- On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Ce principe général est schématisé sur la figure 1.

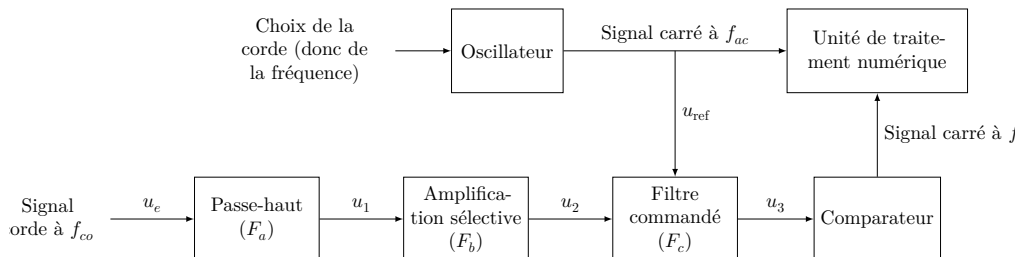


Figure 1 Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde.

I.A – Le signal

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

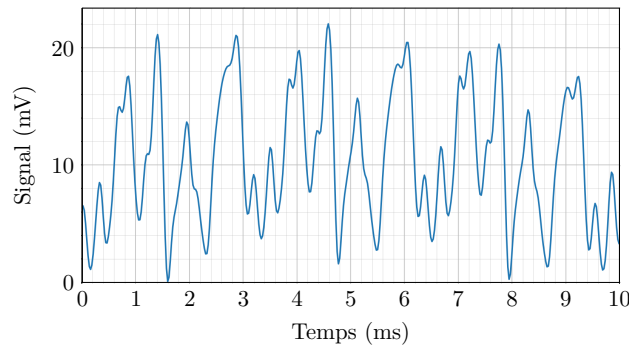


Figure 2 Signal de la guitare

- Q 1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
 Q 2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
 Q 3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
 Q 4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

I.B – Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure 3 (filtre (F_a)).

- Q 5. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.
 Q 6. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
 Q 7. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
 Q 8. On a choisi $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100 \text{ nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

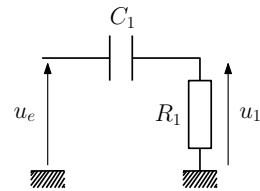


Figure 3 Filtre (F_a)

I.C – Deuxième filtre

Dans cette sous-partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

I.C.1) Préambule

Soit le filtre de la figure 4(a).

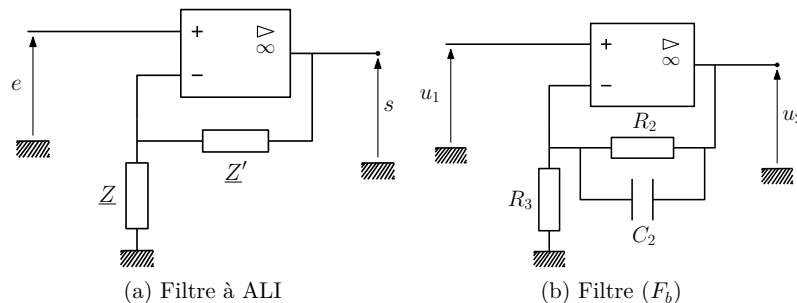


Figure 4 Deux filtres

- Q 9. Exprimer sa fonction de transfert $\underline{H}$ en fonction de $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$.
 Q 10. Que devient $\underline{H}$ si $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$ sont des résistances ($\underline{Z} = R$, $\underline{Z}' = R'$) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

I.C.2) Amplification (légèrement) sélective

En sortie du filtre de la figure 3 le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure 4(b) (filtre (F_b)).

Q 11. Quelle est l'impédance Z_{eq} de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?

Q 12. Dédurre de la question 9 l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_2$ de ce filtre en fonction de R_2 , R_3 et C_2 .

Q 13. Mettre $\underline{H}_2$ sous la forme

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2}$$

et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

Q 14. Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence ? en haute fréquence ?

Q 15. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680\text{ k}\Omega$, $R_3 = 6\text{ k}\Omega$ et $C_2 = 470\text{ pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

I.D – Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigüe que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} . Ce type de commande (à capacité commutée) sera précisé dans la sous-partie I.F.

I.D.1) Diagramme de Bode

La figure 5 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

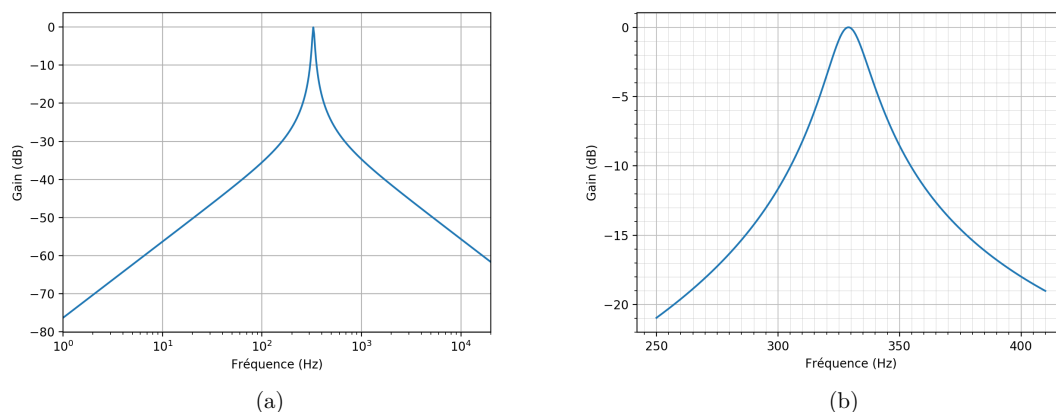


Figure 5 Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

Q 16. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?

Q 17. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.

Q 18. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315\text{ Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

I.D.2) Analyse spectrale

La figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 2.

Q 19. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.

Q 20. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure 7 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).

Q 21. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).

Q 22. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

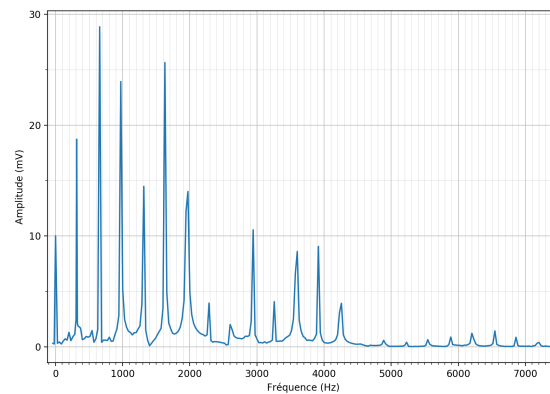


Figure 6 Spectre du signal d'entrée

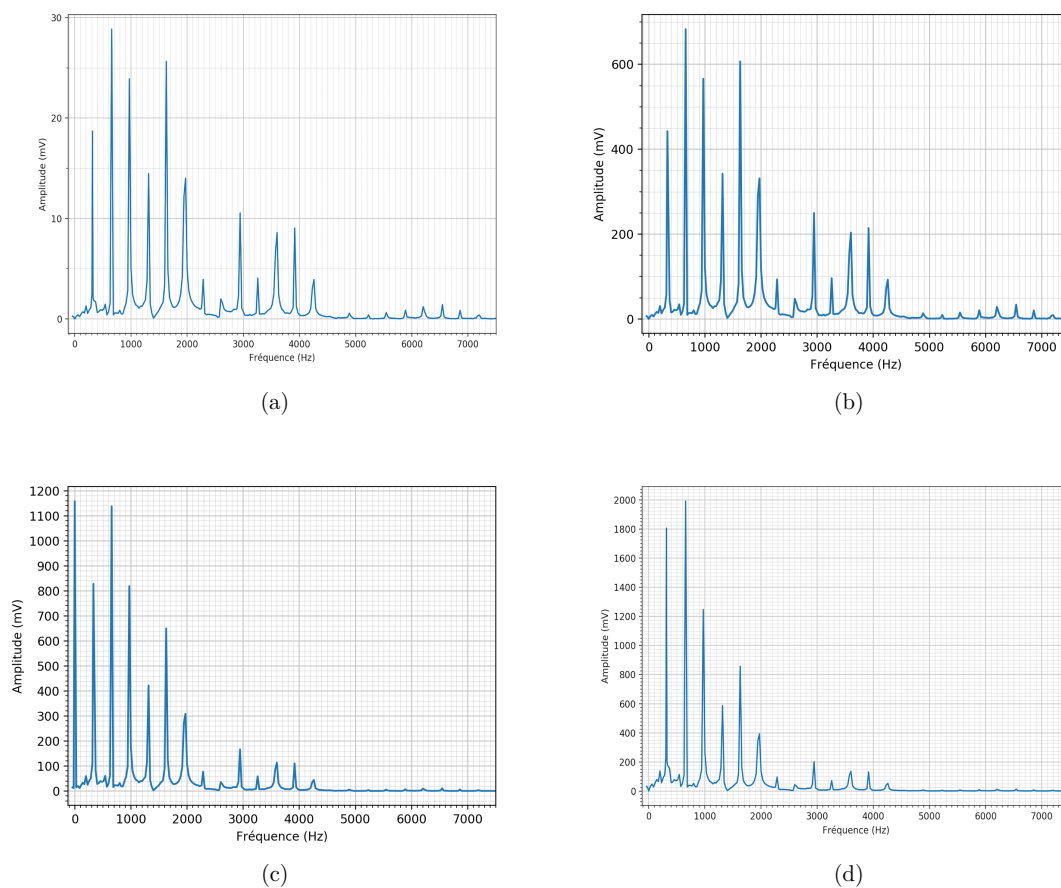


Figure 7 Spectres

I.E – Mise en forme

À la sortie de l'étage précédent, le signal est donc proche d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} et d'amplitude dépendant de la force avec laquelle on a gratté la corde, mais de l'ordre du volt. Pour effectuer un traitement numérique qui permettra de comparer f_{co} à la fréquence théorique f_{ac} on souhaite fabriquer à partir du signal précédent un signal crêteau de fréquence f_{co} . Pour cela, on utilise un comparateur à hystérésis, représenté figure 8.

1. On constate que le signal oscille d'une valeur proche de 10 mV. **La valeur moyenne est donc de 10 mV**, c'est également l'amplitude de la composante continue du signal.
2. On voit qu'une forme caractéristique du signal se répète deux fois entre 0,8 ms et 7,2 ms, la période de ce signal est donc

A.N.

$$T = \frac{7,2 \times 10^{-3} \text{ s} - 0,8 \times 10^{-3} \text{ s}}{2} = 3,2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

la fréquence est donc

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,2 \times 10^{-3} \text{ s}} = 3,1 \times 10^2 \text{ Hz.}$$

3. D'après le tableau, il s'agirait de **la corde Mi aiguë**.
4. Le signal, supposé périodique, ne correspond pas à un signal sinusoïdal. Or, on sait que tout signal périodique peut se mettre sous la forme d'un développement de Fourier, soit d'une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences, d'amplitudes et de phases différentes. Donc ce signal a bien des harmoniques. Les fréquences de ces harmoniques sont multiples de la fréquence du fondamental. Ce signal présente de nombreuses discontinuités, l'amplitude des harmoniques de rang élevé est donc importante.
5. En effectuant un pont diviseur de tension pour obtenir la tension complexe $\underline{u}_1$ du résistor de résistance R_1 il vient que

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_e \frac{\underline{Z}_{R_1}}{\underline{Z}_{R_1} + \underline{Z}_{C_1}} = \underline{u}_e \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \underline{u}_e \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}.$$

La fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ est donc

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_e} = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}.$$

6. Il s'agit d'un **filtre passe-haut** de fonction de transfert canonique

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

On peut identifier la pulsation caractéristique $\omega_1 \equiv \omega_0$ en égalisant les dénominateurs des deux expressions de la fonction de transfert

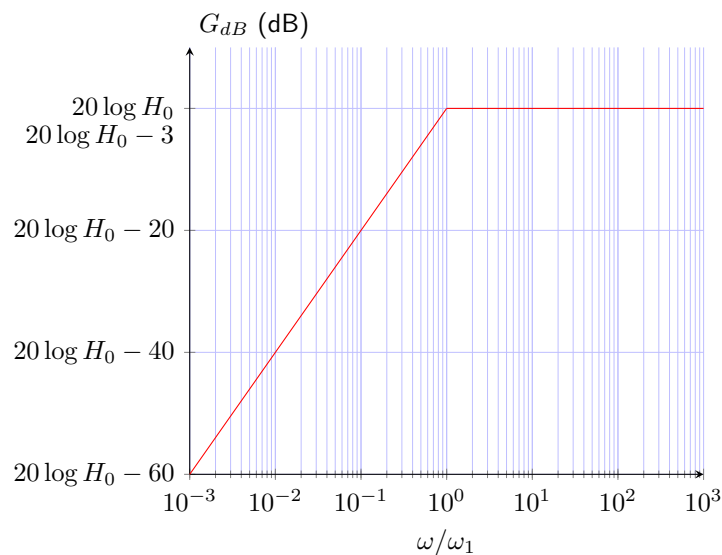
$$1 + jR_1C_1\omega = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$$

soit

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}.$$

Il s'agit de la pulsation en dessous de laquelle le gain en décibel du filtre diminue selon une droite asymptote de -20 dB lorsque les pulsations diminuent de une décade, soit la pulsation de coupure, la pulsation à partir de laquelle les basses fréquences sont coupées.

7. Le diagramme de Bode asymptotique relatif au gain est donné ci-dessous.



8. La fréquence de coupure f_1 est définie telle que

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \times R_1 C_1}$$

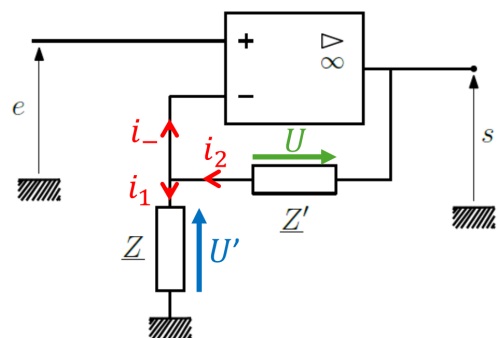
soit

A.N.

$$f_1 = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^3 \Omega \times 100 \times 10^{-9} \text{ nF}} = 15,9 \text{ Hz.}$$

D'après l'allure du signal, ce filtre **permet de supprimer la composante continu** à $f = 0 \text{ Hz}$, seule composante ayant une fréquence inférieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut. Le signal a alors une valeur moyenne nulle.

9. On étudie le filtre à ALI de la figure 4(a). D'après l'énoncé l'ALI fonctionne en régime linéaire. On lit directement le potentiel de la borne non inverseuse : $V_+ = e$. On obtient le potentiel de la borne inverseuse à partir de la loi des mailles en termes de potentiels :



$$i_2 = i_1 + i_- = i_1 \quad \text{car l'ALI est idéal donc } i_- = 0$$

$$\frac{U'}{\underline{Z}'} = \frac{U}{\underline{Z}} \quad ; \quad \frac{s - V_-}{\underline{Z}'} = \frac{V_- - V_M}{\underline{Z}} \quad ; \quad V_- \left(\frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}'} \right) = \frac{s}{\underline{Z}'}$$

$$V_- \frac{\underline{Z}' + \underline{Z}}{\underline{Z}\underline{Z}'} = \frac{s}{\underline{Z}'} \quad ; \quad V_- = s \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}' + \underline{Z}}.$$

Comme l'ALI fonctionne en régime linéaire, il vient que

$$\varepsilon = V_+ - V_- = 0 \quad \text{soit} \quad e - s \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}' + \underline{Z}} = 0$$

$$\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}' + \underline{Z}}{\underline{Z}}.$$

10. Si $\underline{Z} = R$ et $\underline{Z}' = R'$ alors

$$\underline{H} = \frac{R' + R}{R}.$$

Le montage devient un **amplificateur non inverseur**.

11. On étudie la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 sur le filtre de figure 4(b). La loi d'association des impédances complexes en parallèle est

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_{R_2}} + \frac{1}{\underline{Z}_{C_2}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2}$$

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}.$$

12. On constate que le filtre de la figure 4(b) et celui de la question 4(a) sont identiques si on considère que $\underline{Z} \equiv R_3$ et $\underline{Z}' = \underline{Z}_{\text{eq}}$. Ainsi la fonction de transfert de ce filtre est, par analogie

$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{Z}' + \underline{Z}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}} + R_3}{R_3} = \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} + R_3}{R_3} = \frac{\frac{R_2}{R_3}}{1 + j\omega R_2 C_2} + 1$$

$$\underline{H}_2 = \frac{\frac{R_2}{R_3}}{1 + j\omega R_2 C_2} + 1.$$

13. On peut mettre sous la forme demandée et identifier G_0 et ω_2

$$\underline{H}_2 = 1 + \frac{\frac{R_2}{R_3}}{1 + j\omega R_2 C_2} = 1 + \frac{G_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2} \quad \text{et} \quad G_0 = \frac{R_2}{R_3}.$$

14. En limite de basses fréquences, soit $\omega \rightarrow 0$

$$\underline{H}_2 \simeq \frac{\frac{R_2}{R_3}}{1+0} + 1 = \frac{R_2}{R_3} + 1 \equiv G_0 + 1.$$

En limite de hautes fréquence, soit $\omega \rightarrow +\infty$

$$\underline{H}_2 \simeq \frac{\frac{R_2}{R_3}}{0 + j\omega R_2 C_2} + 1 = \frac{1}{j\omega R_3 C_2} + 1 \simeq 0 + 1 = 1.$$

15. La fréquence f_2 est telle que

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_2 C_2}$$

$$\text{A.N. } f_2 = \frac{1}{2\pi \times 680 \times 10^3 \Omega \times 470 \times 10^{-12} \text{ F}} = 498 \text{ Hz.}$$

$$G_0 = \frac{R_2}{R_3}$$

$$\text{A.N. } G_0 = \frac{680 \times 10^3 \Omega}{6 \times 10^3 \Omega} = 113.$$

Ce filtre **amplifie fortement les fréquences inférieures** à 500 Hz d'un facteur $G_0 = 113$ et **n'affecte pas** (n'amplifie pas ni ne réduit) **les fréquences supérieures** à 500 Hz (dans ce cas $G_0 \approx 1$).

16. On constate qu'il s'agit d'un **filtre passe-bande** : il filtre les basses et les hautes fréquences autour d'une certaine fréquence caractéristique.

Cette fréquence est la fréquence pour laquelle le gain et le gain en décibel est maximal. Elle correspond à une valeur de 330 Hz d'après le diagramme de Bode en amplitude fourni.

17. On peut estimer que la bande passante à -3 dB correspond à la largeur en fréquence pour laquelle le gain en décibel est supérieur au gain maximal $G_{dB}(\omega_0)$ -3 dB, soit ici -3 dB.

Toujours d'après la diagramme fourni, cette bande passante notée Δf est

$$\Delta f \approx 340 \text{ Hz} - 320 \text{ Hz} = 20 \text{ Hz.}$$

18. La composante fondamentale est la composante de fréquence f_{co} , donc, d'après la diagramme, le gain en décibel pour une fréquence $f_{co} = 315 \text{ Hz}$ est $G_{dB}(f_{co}) = -6 \text{ dB}$, le gain $G(f_{co})$ est défini tel que

$$G_{dB}(f_{co}) = 20 \log(G(f_{co}))$$

donc

$$G(f_{co}) = 10^{G_{dB}(f_{co})/20}.$$

A.N.

$$G(f_{co}) = 10^{-6/20} = \frac{1}{2}.$$

19. On constate d'abord que la composante continue à 0 Hz a une amplitude de 10 mV, ce qui correspond bien à la valeur estimée au début. De plus, on observe que le fondamental, donc le pic de première fréquence après la fréquence nulle, correspond à une fréquence proche de 300 Hz, ce qui correspond également à la valeur estimée au début. Enfin, on constate que tous les harmoniques sont espacés de près de 300 Hz, donc de fréquences multiples de celle du fondamental.
20. En sortant du premier filtre (F_a), seule la composante continue est supprimée, le spectre en sortie est donc identique au spectre d'entrée, exceptée la composante continue à 0 Hz, **il s'agit donc du spectre (a)**.
21. On a démontré à la question 15 que le filtre (F_b) augmentait les fréquences inférieures à 500 Hz d'un facteur 100 et ne perturbait pas les fréquences supérieures. Le spectre en sortie de (F_b) doit donc être similaire au spectre en sortie de (F_a) (soit le spectre (a)) mais avec des amplitudes des fréquences des signaux à 300 Hz et 600 Hz plus grande d'un facteur 100. **Il s'agit donc du spectre (d)**.
22. En sortir du filtre passe-bande (F_c), seule le fondamental à $f_{co} = 315$ Hz et l'harmonique de rang 2, donc de fréquence $2f_{co} = 630$ Hz, subsistent. D'après l'étude précédente, l'amplitude du fondamental est divisé par deux, et l'amplitude de l'harmonique de rang 2 est fortement amorti. Le fondamental, ayant une amplitude beaucoup plus importante que l'harmonique de rang 2, le signal en sortie du filtre (F_c) correspond quasiment au fondamental seul, soit un signal sinusoïdal de fréquence $f_{co} = 315$ Hz, donc de période 3 ms.

