

DS 1 : Stabilité des systèmes linéaires

Durée : 3h

Indications

- Le sujet est divisé en trois parties **indépendantes**.
- Les **calculatrices** sont **interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.
- Les diagrammes de Bode demandés seront tracés avec des axes **clairement gradués** et les **asymptotes** seront **justifiées**.

Données

- $\ln(2) \simeq 0,69$, $\sqrt{2} \simeq 1,41$ et $\arctan(100) \simeq 1,56 \text{ rad}$.

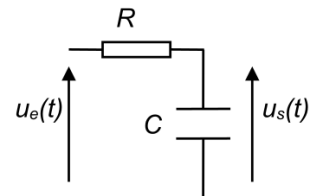
1 Filtrage d'un signal de mesure de température (12pt)

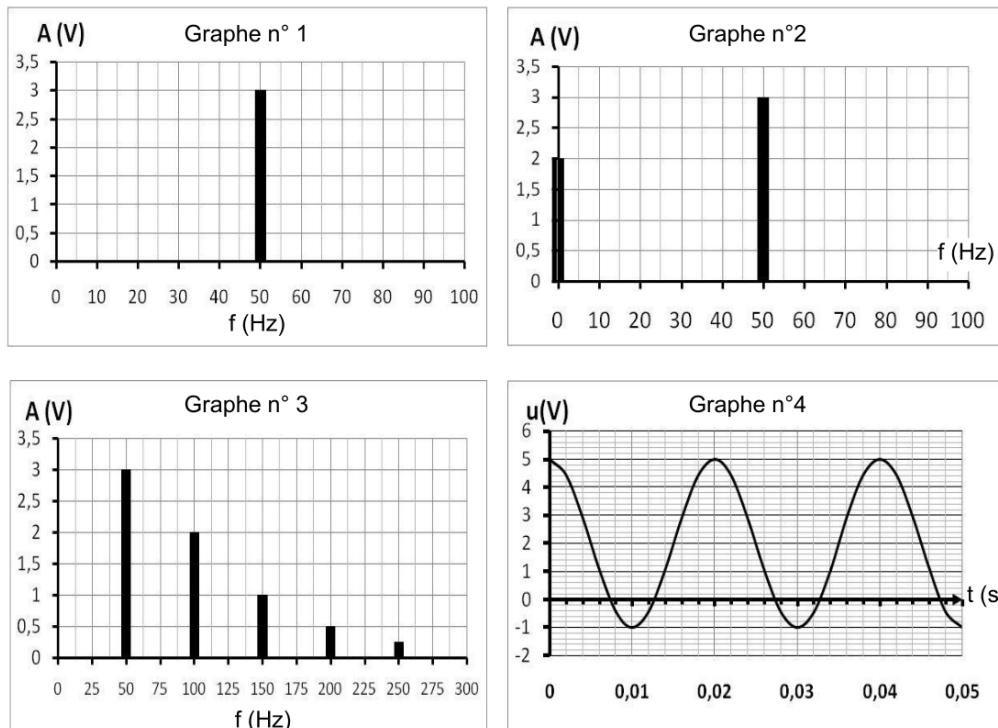
On souhaite mesurer la température de l'eau d'un bassin afin d'en réguler le chauffage. Après conditionnement par différents quadripôles, le signal électrique obtenu s'écrit

$$u_e(t) = 2 + 3 \cos(2\pi \times 50t),$$

avec u_e en volts et t en secondes. La composante périodique à 50 Hz est due à des parasites électriques. Seule la composante continue contient l'information utile liée à la température.

On utilise pour éliminer ces parasites un circuit constitué d'une résistance R en série et d'un condensateur C relié à la masse. La tension de sortie $u_s(t)$ est mesurée aux bornes du condensateur.





1. Parmi les quatre graphes proposés ci-avant, **indiquer** celui qui représente le spectre en amplitude de $u_e(t)$. **Préciser** pourquoi les autres graphes ne conviennent pas. (1pt par item, total 2pt)
2. À l'aide des équivalents en haute et basse fréquences du condensateur, **déterminer** la nature du filtre réalisé. **Justifier** si ce circuit permet d'isoler la composante continue du signal. (équivalence 1pt, nature du filtre 1pt, justification 1pt, total 3pt)

La fonction de transfert du montage peut se mettre sous la forme

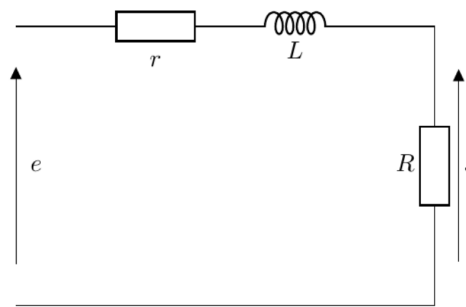
$$H(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{H_0}{1 + j\omega/\omega_c}.$$

3. **Nommer** H_0 et en **donner** la valeur en justifiant. (1pt par item, total 2pt)
4. **Préciser** la valeur du gain en décibels G_{dB} lorsque $\omega \ll \omega_c$. (1pt)
On donne pour ce circuit

$$\omega_c = \frac{1}{RC}.$$
5. **Rappeler** la définition de la fréquence de coupure à $-3dB$. **Donner** l'expression de cette fréquence de coupure f_c en fonction de R et C . (déf. 1pt, expression 1pt, total 2pt)
6. **Déterminer** l'expression numérique de $u_s(t)$ en prenant $f_c = 0,5Hz$. **Conclure** sur l'efficacité du filtrage. (expression 1pt, conclusion 1pt, total 2pt)

2 Étude d'un filtre RL soumis à un signal carré (11,5pt)

On considère un circuit constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r , en série avec une résistance R . La tension d'entrée $e(t)$ est appliquée aux bornes de l'ensemble du circuit et la tension de sortie $s(t)$ est mesurée aux bornes de R .



On prendra

$$L = 100\text{mH}, \quad r = 10\Omega, \quad R = 100\Omega, \quad E = 5\text{V}.$$

7. Sans calcul, **déterminer** le type de filtre réalisé. **Justifier** par une analyse aux limites $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$. (1pt par item, total 2pt)
8. **Calculer** la fonction de transfert

$$H(j\omega) = \frac{S}{E}$$

et la mettre sous une forme canonique exploitant les termes H_0 et ω_c . Exprimer ces deux termes en fonction de R , r et L , puis effectuer les applications numériques. On donnera également f_c . (mise en forme 1pt, expressions 0,5pt chacune, AN H_0 , ω_c et f_c 0,5 pt chacune, total 3,5pt)

9. **Tracer** le diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase. **Préciser** le gain en basse fréquence, la valeur exacte du gain à ω_c , l'asymptote en haute fréquence et la phase à ω_c . (gain 1pt, phase 1pt, valeur gain BF 0,25pt, valeur gain à ω_c 0,25pt, asymptote HF 0,25pt, phase à ω_c 0,25pt, total 3pt)
10. On applique en entrée un signal carré périodique de période T et d'amplitude E , défini par

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{si } 0 \leq t < \alpha T, \\ 0 & \text{si } \alpha T \leq t < T, \end{cases}$$

et prolongé périodiquement. Le paramètre α est le rapport cyclique.

On étudie trois périodes :

$$T_a = 100\text{ms}, \quad T_b = 5\text{ms}, \quad T_c = 0,1\text{ms}.$$

Pour chaque configuration, **analyser qualitativement** le signal de sortie $s(t)$ et **représenter son allure** sur deux périodes de l'entrée pour $\alpha = 0,5$. **Préciser** le rôle joué par les paramètres α , E , T , L , R et r . (3 analyses 0,25pt chacune, 3 allures 0,25pt chacune, 6 rôles 0,25 chacun, total 3pt)

3 Détection des ondes sismiques : principe d'un sismomètre mécanique (16 pt)

On considère un sismomètre mécanique dont tous les mouvements sont unidirectionnels suivant l'axe vertical (Oz) orienté vers le haut. Le bâti contient une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . La masse subit également un amortissement visqueux dû à un dispositif solide du bâti. On introduit $z(t) = Z(t) - Z_{\text{eq}}$, le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre, mesuré dans le référentiel du bâti.

On tient compte de la force de frottement $\vec{f}_v$, opposée à la vitesse de la masse relativement au bâti telle que

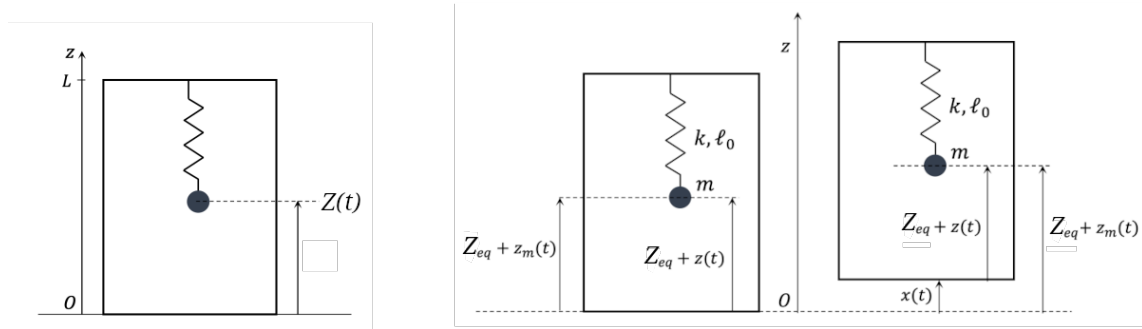
$$\vec{f}_v = -\alpha \dot{Z}(t) \vec{e}_z = -\alpha \dot{z}(t) \vec{e}_z$$

car Z_{eq} est constant.

On note $x(t)$ le déplacement vertical du bâti dans le référentiel terrestre. La position absolue de la masse s'écrit alors

$$Z_m(t) = x(t) + Z(t) = x(t) + z(t) + Z_{\text{eq}} = z_m(t) + Z_{\text{eq}}$$

avec z_m le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre, mesuré dans le référentiel terrestre.



11. En l'absence de secousse du sol, **déterminer** l'allongement du ressort à l'équilibre $\Delta\ell_{eq} = \ell_{eq} - \ell_0$ et en déduire la position d'équilibre Z_{eq} de la masselotte par rapport à l'origine du bâti. (allongement 1pt, Z_{eq} 1pt, total 2pt)
12. Lorsqu'un séisme se produit, le bâti est animé du déplacement $x(t)$. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par le déplacement relatif $z(t)$ de la masse autour de sa position d'équilibre. (3pt)

On considère désormais un régime sinusoïdal forcé tel que

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t).$$

On pose

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}.$$

13. **Établir** l'expression de la fonction de transfert en déplacement

$$H_m^d(j\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{X}}$$

sous forme canonique en fonction de $u = \omega/\omega_0$ et de Q (attention on désigne $\underline{Z}$ comme l'amplitude complexe de $z(t)$ et non comme la correspondance complexe de $Z(t)$).

Pour $Q = 1/\sqrt{2}$, **tracer qualitativement** le diagramme de Bode asymptotique en amplitude. On se limitera aux comportements asymptotiques.

Dans les différentes gammes de fréquences, **indiquer** à quelle grandeur physique du bâti (déplacement, vitesse ou accélération) le déplacement relatif z est proportionnel. **Préciser** ainsi la nature du capteur dans les différents régimes. (expression 1pt, diagramme 1pt, grandeurs proportionnelles 1pt chacune, natures 1pt chacune, total 6pt)

14. À très basses fréquences, **donner** l'expression approchée de l'équation du mouvement. En supposant que la résolution du dispositif de mesure du déplacement relatif est Δz , **déterminer** l'accélération minimale du bâti que le sismomètre peut résoudre. **Indiquer** comment choisir les paramètres du système pour optimiser cette résolution. (expression BF 1pt, accélération minimale 2pt, choix 2pt, total 5pt)