

DS 1 : Stabilité des systèmes linéaires

Durée : 3h

Indications

- Le sujet est divisé en trois parties **indépendantes**.
- Les **calculatrices** sont **interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.
- Les diagrammes de Bode demandés seront tracés avec des axes **clairement gradués** et les **asymptotes** seront **justifiées**.

Données

- $e^{-2,5} \simeq 0,08$, $\ln(2) \simeq 0,69$, $\sqrt{2} \simeq 1,41$ et $\arctan(100) \simeq 1,56\text{rad}$.

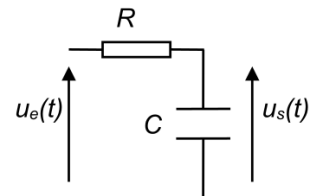
1 Filtrage d'un signal de mesure de température (12pt)

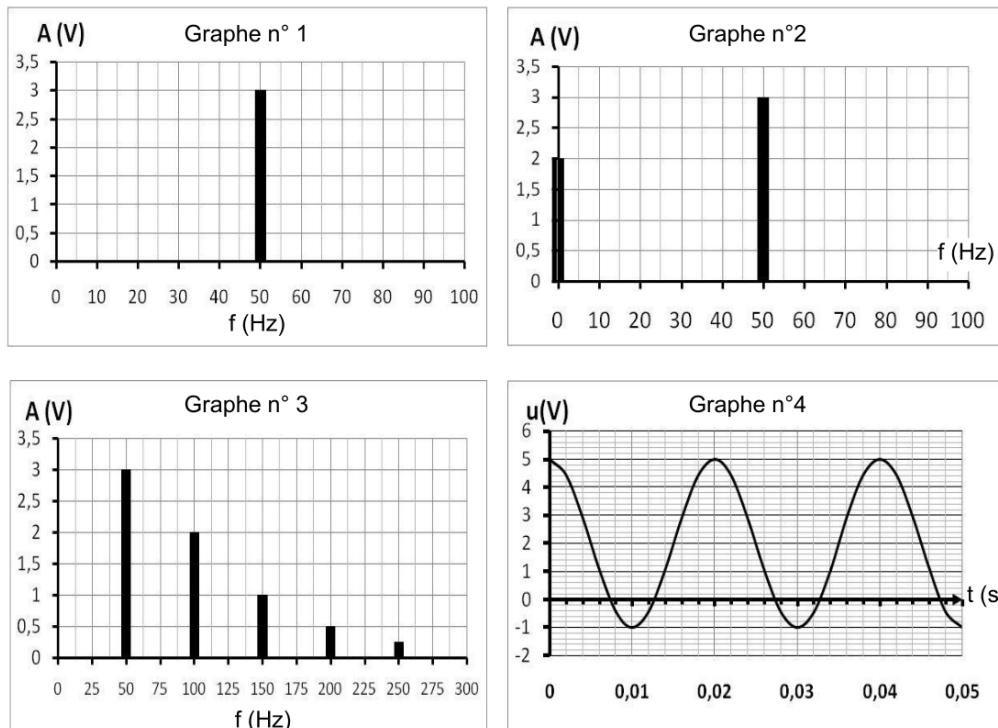
On souhaite mesurer la température de l'eau d'un bassin afin d'en réguler le chauffage. Après conditionnement par différents quadripôles, le signal électrique obtenu s'écrit

$$u_e(t) = 2 + 3 \cos(2\pi \times 50t),$$

avec u_e en volts et t en secondes. La composante périodique à 50 Hz est due à des parasites électriques. Seule la composante continue contient l'information utile liée à la température.

On utilise pour éliminer ces parasites un circuit constitué d'une résistance R en série et d'un condensateur C relié à la masse. La tension de sortie $u_s(t)$ est mesurée aux bornes du condensateur.





1. Parmi les quatre graphes proposés ci-avant, **indiquer** celui qui représente le spectre en amplitude de $u_e(t)$. **Préciser** pourquoi les autres graphes ne conviennent pas. (1pt par item, total 2pt)

Le signal comporte une composante continue de valeur 2 V et une seule composante sinusoïdale de fréquence 50 Hz et d'amplitude 3 V. Son spectre comporte donc deux raies :

$$A(0) = 2 \text{ V} \quad \text{et} \quad A(50 \text{ Hz}) = 3 \text{ V}.$$

Le graphe correct est donc le **graphe n°2**. Le graphe n°1 oublie la composante continue, le graphe n°3 fait apparaître des harmoniques absentes du signal, et le graphe n°4 est un chronogramme et non un spectre.

2. À l'aide des équivalents en haute et basse fréquences du condensateur, **déterminer** la nature du filtre réalisé. **Justifier** si ce circuit permet d'isoler la composante continue du signal. (équivalence 1pt, nature du filtre 1pt, justification 1pt, total 3pt)

En basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert : aucun courant ne circule et $u_s \simeq u_e$.

En haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil : la sortie est alors ramenée à la masse et $u_s \simeq 0$.

Le montage est donc un **filtre passe-bas**. Il transmet la composante continue ($f = 0$) et atténue la composante parasite à 50 Hz. Il est donc adapté à l'objectif recherché si sa fréquence de coupure est suffisamment inférieure à 50 Hz.

La fonction de transfert du montage peut se mettre sous la forme

$$H(j\omega) = \frac{U_s}{U_e} = \frac{H_0}{1 + j\omega/\omega_c}.$$

3. **Nommer** H_0 et en **donner** la valeur en justifiant. (1pt par item, total 2pt)

H_0 est le **gain statique**, c'est-à-dire la valeur de la fonction de transfert pour $\omega = 0$:

$$H_0 = H(0).$$

En régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la tension de sortie est égale à la tension d'entrée. Ainsi

$$H_0 = 1.$$

4. **Préciser** la valeur du gain en décibels G_{dB} lorsque $\omega \ll \omega_c$. (1pt)

Pour $\omega \ll \omega_c$, $H(j\omega) \simeq H_0 = 1$. Ainsi

$$G_{dB} \simeq 20\log(1) = 0\text{dB}.$$

On donne pour ce circuit

$$\omega_c = \frac{1}{RC}.$$

5. **Rappeler** la définition de la fréquence de coupure à -3dB . **Donner** l'expression de cette fréquence de coupure f_c en fonction de R et C . (déf. 1pt, expression 1pt, total 2pt)

La fréquence de coupure à -3dB est la fréquence pour laquelle le gain est inférieur de 3 dB au gain maximal. Pour un passe-bas du premier ordre,

$$|H(j\omega_c)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}}.$$

Comme $\omega_c = 2\pi f_c$ et $\omega_c = 1/(RC)$,

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}.$$

6. **Déterminer** l'expression numérique de $u_s(t)$ en prenant $f_c = 0,5\text{Hz}$. **Conclure** sur l'efficacité du filtrage. (expression 1pt, conclusion 1pt, total 2pt)

Un système linéaire traite séparément chaque composante fréquentielle. La composante continue est multipliée par $H(0) = 1$: elle reste donc égale à 2 V.

Pour la composante à $f = 50\text{Hz}$,

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{f}{f_c} = \frac{50}{0,5} = 100.$$

Le gain et la phase valent

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1+100^2}} \simeq 1,0 \times 10^{-2}, \quad \varphi = -\arctan(100) \simeq -1,56\text{rad}.$$

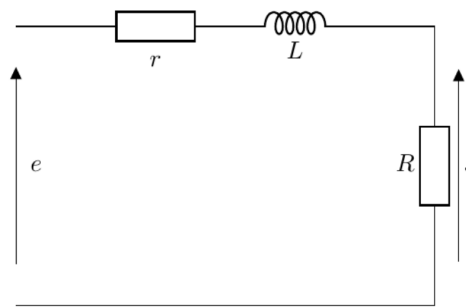
L'amplitude de la composante parasite devient donc environ $3 \times 10^{-2}\text{V}$. Finalement,

$$u_s(t) \simeq 2 + 0,030\cos(100\pi t - 1,56) \quad (\text{V}).$$

Le parasite à 50Hz est atténué d'un facteur voisin de 100 alors que la composante continue est conservée : **le filtrage est efficace.**

2 Étude d'un filtre RL soumis à un signal carré (11,5pt)

On considère un circuit constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance interne r , en série avec une résistance R . La tension d'entrée $e(t)$ est appliquée aux bornes de l'ensemble du circuit et la tension de sortie $s(t)$ est mesurée aux bornes de R .



On prendra

$$L = 100 \text{ mH}, \quad r = 10 \Omega, \quad R = 100 \Omega, \quad E = 5 \text{ V}.$$

7. Sans calcul, **déterminer** le type de filtre réalisé. **Justifier** par une analyse aux limites $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$. (1pt par item, total 2pt)

À basse fréquence, la bobine idéale est équivalente à un fil. Il reste un diviseur de tension formé par r et R , donc

$$\frac{s}{e} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{R}{R+r} \neq 0.$$

À haute fréquence, l'impédance $jL\omega$ de la bobine devient très grande, le courant tend vers zéro et donc $s = Ri \rightarrow 0$.

Le montage transmet les basses fréquences et atténue les hautes fréquences : c'est un **filtre passe-bas du premier ordre**.

8. **Calculer** la fonction de transfert

$$H(j\omega) = \frac{S}{E}$$

et la mettre sous une forme canonique exploitant les termes H_0 et ω_c . Exprimer ces deux termes en fonction de R , r et L , puis effectuer les applications numériques. On donnera également f_c . (mise en forme 1pt, expressions 0,5pt chacune, AN H_0 , ω_c et f_c 0,5 pt chacune, total 3,5pt)

Les trois dipôles étant en série,

$$\underline{E} = (R + r + jL\omega)\underline{I}, \quad \underline{S} = R\underline{I}.$$

Donc

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + r + jL\omega} = \frac{R}{R + r} \frac{1}{1 + j \frac{L\omega}{R + r}}.$$

On identifie

$$H_0 = \frac{R}{R + r} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{R + r}{L}.$$

Numériquement,

$$H_0 = \frac{100}{110} \simeq 1, \quad \omega_c = \frac{110}{0,100} \simeq 1 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}.$$

Ainsi

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} \simeq 160 \text{ Hz}.$$

9. **Tracer** le diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase. **Préciser** le gain en basse fréquence, la valeur exacte du gain à ω_c , l'asymptote en haute fréquence et la phase à ω_c . (gain 1pt, phase 1pt, valeur gain BF 0,25pt, valeur gain à ω_c 0,25pt, asymptote HF 0,25pt, phase à ω_c 0,25pt, total 3pt)

Le gain vaut

$$G_{\text{dB}} = 20 \log H_0 - 10 \log \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right).$$

En basse fréquence,

$$G_{dB} \simeq 20 \log(1) \simeq 0 \text{ dB}.$$

À la coupure,

$$G_{dB}(\omega_c) = 20 \log H_0 - 3 \simeq -3 \text{ dB}.$$

En haute fréquence,

$$G_{dB} \simeq 20 \log H_0 - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right),$$

soit une asymptote de pente -20 dB/decade .

La phase est

$$\varphi(\omega) = -\arctan \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right).$$

Elle tend vers 0 à basses fréquence. Lorsque la pulsation du signal d'entrée est égale à la pulsation propre, la phase est telle que

$$\varphi(\omega_c) = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$

et tend vers $-\pi/2$ à hautes fréquences.

10. On applique en entrée un signal carré périodique de période T et d'amplitude E , défini par

$$e(t) = \begin{cases} E & \text{si } 0 \leq t < \alpha T, \\ 0 & \text{si } \alpha T \leq t < T, \end{cases}$$

et prolongé périodiquement. Le paramètre α est le rapport cyclique.

On étudie trois périodes :

$$T_a = 100 \text{ ms}, \quad T_b = 5 \text{ ms}, \quad T_c = 0,1 \text{ ms}.$$

Pour chaque configuration, **analyser qualitativement** le signal de sortie $s(t)$ et **représenter son allure** sur deux périodes de l'entrée pour $\alpha = 0,5$. **Préciser** le rôle joué par les paramètres α , E , T , L , R et r . (3 analyses 0,25pt chacune, 3 allures 0,25pt chacune, 6 rôles 0,25 chacun, total 3pt)

La constante de temps du filtre vaut

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} = \frac{L}{R+r} = \frac{0,100}{110} \simeq 1 \text{ ms}.$$

Pour une entrée constante e , la sortie tend vers $H_0 e$ avec la constante de temps τ .

Cas $T_a = 100 \text{ ms} \gg \tau$. Chaque demi-période dure 50 ms, soit environ 50τ . La sortie a largement le temps d'atteindre ses valeurs limites : elle est presque carrée, entre 0 et

$$H_0 E \simeq 1 \times 5 \simeq 5 \text{ V},$$

avec seulement de courts arrondis exponentiels aux commutations.

Cas $T_b = 5 \text{ ms}$. Une demi-période vaut $2,5 \text{ ms} \simeq 2,5\tau$. La sortie monte et descend exponentiellement mais n'atteint plus complètement les valeurs 0 et $H_0 E$. Les arrondis sont nettement visibles.

En régime périodique établi, en posant $a = \exp[-T/(2\tau)]$, on obtient pour $\alpha = 0,5$

$$s_{\max} = \frac{H_0 E}{1+a}, \quad s_{\min} = \frac{a H_0 E}{1+a}.$$

Pour T_b , $a \simeq e^{-2,5} \simeq 0,08$, d'où environ

$$s_{\max} \simeq \frac{H_0 E}{1} \simeq E = 5 \text{ V} \quad ; s_{\min} \simeq \frac{a H_0 E}{1} \simeq a E = 0,4 \text{ V}$$

Cas $T_c = 0,1 \text{ ms} \ll \tau$. La fréquence fondamentale et ses harmoniques sont très supérieures à f_c : leurs amplitudes sont fortement atténuées. La composante continue, elle, est transmise. La sortie est donc presque constante autour de la valeur moyenne

$$\langle s \rangle = H_0 \langle e \rangle = H_0 \alpha E.$$

Pour $\alpha = 0,5$,

$$\langle s \rangle \simeq 1 \times 2,5 \simeq 2,5 \text{ V},$$

avec une faible ondulation presque triangulaire.

Influence des paramètres : E fixe l'échelle des tensions ; α fixe notamment la valeur moyenne $H_0 \alpha E$; T compare la fréquence du signal à la coupure ; L , R et r fixent $\tau = L/(R+r)$ et donc f_c , tandis que R et r fixent aussi le gain statique $H_0 = R/(R+r)$.

3 Détection des ondes sismiques : principe d'un sismomètre mécanique (16 pt)

On considère un sismomètre mécanique dont tous les mouvements sont unidirectionnels suivant l'axe vertical (Oz) orienté vers le haut. Le bâti contient une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . La masse subit également un amortissement visqueux dû à un dispositif solide du bâti. On introduit $z(t) = Z(t) - Z_{eq}$, le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre, mesuré dans le référentiel du bâti.

On tient compte de la force de frottement $\vec{f}_v$, opposée à la vitesse de la masse relativement au bâti telle que

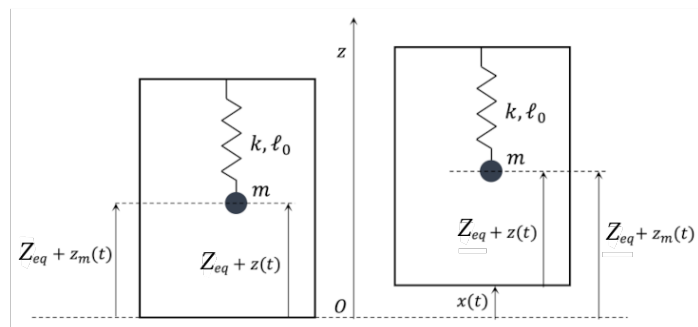
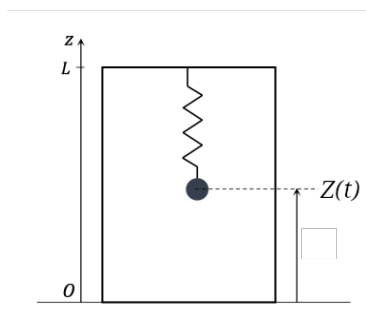
$$\vec{f}_v = -\alpha \dot{Z}(t) \vec{e}_z = -\alpha \dot{z}(t) \vec{e}_z$$

car Z_{eq} est constant.

On note $x(t)$ le déplacement vertical du bâti dans le référentiel terrestre. La position absolue de la masse s'écrit alors

$$Z_m(t) = x(t) + Z(t) = x(t) + z(t) + Z_{eq} = z_m(t) + Z_{eq}$$

avec z_m le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre, mesuré dans le référentiel terrestre.



11. En l'absence de secousse du sol, **déterminer** l'allongement du ressort à l'équilibre $\Delta \ell_{eq} = \ell_{eq} - \ell_0$ et en déduire la position d'équilibre Z_{eq} de la masselotte par rapport à l'origine du bâti. (allongement 1pt, Z_{eq} 1pt, total 2pt)

À l'équilibre (vitesse du système, ici la masselotte, constamment nulle donc accélération nulle), le poids de la masselotte est compensé par la force de rappel du ressort. Si $\Delta \ell_{eq}$ est l'allongement du ressort, l'application du PFD sur la masselotte donne

$$0 = -mg + k\Delta \ell_{eq}.$$

La force de rappel est dirigée vers le haut car lorsque le ressort s'allonge la masselotte est ramenée vers le haut. Donc

$$\Delta \ell_{eq} = \frac{mg}{k}.$$

Comme l'allongement est défini tel que $\Delta\ell_{\text{eq}} = \ell_{\text{eq}} - \ell_0$, il vient que

$$\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \Delta\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}.$$

Comme $Z(t) = L - \ell(t)$ il vient que

$$Z_{\text{eq}} = L - \ell_{\text{eq}} \quad ; \quad Z_{\text{eq}} = L - \ell_0 - \frac{mg}{k}.$$

12. Lorsqu'un séisme se produit, le bâti est animé du déplacement $x(t)$. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par le déplacement relatif $z(t)$ de la masse autour de sa position d'équilibre. (3pt)

La position absolue de la masse dans le référentiel terrestre est $Z_m = x + Z = x + z - Z_{\text{eq}}$ donc son accélération absolue est

$$\ddot{Z}_m = \ddot{x} + \ddot{z}$$

car Z_{eq} est constant. Dans ce même référentiel, on applique le PFD sur la masselotte en considérant son accélération absolue

$$\begin{aligned} m\ddot{Z}_m &= -mg + k(\ell - \ell_0) - \alpha\dot{z} \\ m(\ddot{x} + \ddot{z}) &= -mg + kL - kZ - k\ell_0 - \alpha\dot{z} \\ m(\ddot{x} + \ddot{z}) &= -k(Z - Z_{\text{eq}}) - \alpha\dot{z} \end{aligned}$$

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = -m\ddot{x}$$

avec la longueur du ressort telle que $\ell = L - Z$. Le mouvement du bâti agit donc comme une excitation proportionnelle à son accélération.

On considère désormais un régime sinusoïdal forcé tel que

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t).$$

On pose

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}.$$

13. **Établir** l'expression de la fonction de transfert en déplacement

$$H_m^d(j\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{X}}$$

sous forme canonique en fonction de $u = \omega/\omega_0$ et de Q (attention on désigne $\underline{Z}$ comme l'amplitude complexe de $z(t)$ et non comme la correspondance complexe de $Z(t)$).

Pour $Q = 1/\sqrt{2}$, **tracer qualitativement** le diagramme de Bode asymptotique en amplitude. On se limitera aux comportements asymptotiques.

Dans les différentes gammes de fréquences, **indiquer** à quelle grandeur physique du bâti (déplacement, vitesse ou accélération) le déplacement relatif z est proportionnel. **Préciser** ainsi la nature du capteur dans les différents régimes. (expression 1pt, diagramme 1pt, grandeurs proportionnelles 1pt chacune, natures 1pt chacune, total 6pt)

En notation complexe, l'équation du mouvement devient

$$(-m\omega^2 + j\alpha\omega + k)\underline{Z} = m\omega^2\underline{X}.$$

D'où

$$H_m^d(j\omega) = \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2 + j\alpha\omega}.$$

Avec $k = m\omega_0^2$ et $\alpha = m\omega_0/Q$,

$$H_m^d(j\omega) = \frac{u^2}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}}, \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Pour $\omega \ll \omega_0$,

$$H_m^d \simeq \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2.$$

Le gain asymptotique est donc

$$G_{dB} \simeq 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

soit une pente de +40dB/decade.

Pour $\omega \gg \omega_0$,

$$H_m^d \simeq -1,$$

donc $|H_m^d| \rightarrow 1$ et le gain tend vers 0 dB. Le diagramme asymptotique est donc une droite de pente +40dB/decade jusqu'à ω_0 , puis un palier à 0 dB.

Pour $Q = 1/\sqrt{2}$, le module exact vaut

$$|H_m^d| = \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 2u^2}} = \frac{u^2}{\sqrt{1+u^4}},$$

ce qui confirme une transition monotone entre ces deux asymptotes.

En basse fréquence,

$$\underline{Z} \simeq \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \underline{X} = -\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{\underline{X}}.$$

Le déplacement relatif est donc proportionnel à l'**accélération** du bâti : le sismomètre se comporte comme un **accéléromètre**.

En haute fréquence,

$$\underline{Z} \simeq -\underline{X}.$$

Le déplacement relatif reproduit, au signe près, le **déplacement** du bâti : le dispositif se comporte comme un **capteur de déplacement**.

Il n'existe pas ici de large domaine asymptotique dans lequel z soit strictement proportionnel à la vitesse ; un comportement de type capteur de vitesse peut seulement apparaître dans une zone intermédiaire lorsque le terme d'amortissement domine le dénominateur.

14. À très basses fréquences, **donner** l'expression approchée de l'équation du mouvement. En supposant que la résolution du dispositif de mesure du déplacement relatif est Δz , **déterminer** l'accélération minimale du bâti que le sismomètre peut résoudre. **Indiquer** comment choisir les paramètres du système pour optimiser cette résolution. (expression BF 1pt, accélération minimale 2pt, choix 2pt, total 5pt)

À très basse fréquence, $\omega \ll \omega_0$. Dans l'équation

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = -m\ddot{x},$$

les termes inertiel et visqueux associés au mouvement relatif deviennent négligeables devant le terme de rappel. On obtient

$$kz \simeq -m\ddot{x},$$

soit

$$z \simeq -\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{x}.$$

Si le plus petit déplacement mesurable est Δz , la plus petite accélération détectable vérifie

$$\Delta z \simeq \frac{a_{\min}}{\omega_0^2}.$$

Ainsi

$$a_{\min} = \omega_0^2 \Delta z = \frac{k}{m} \Delta z.$$

Pour améliorer la résolution en accélération, il faut diminuer $a_{\min}$: on cherche donc une **faible pulsation propre** ω_0 , par exemple en diminuant k et/ou en augmentant m , tout en restant dans le domaine de validité de l'approximation très basse fréquence $\omega \ll \omega_0$ pour les fréquences que l'on souhaite mesurer.