

DR 8 : révisions TSI 1

1 Pendule soumis à une force de Laplace

- Il y a déplacement d'un circuit électrique dans un champ homogène ce qui correspond à un phénomène d'induction de Lorentz. Il va donc y avoir apparition d'une force électromotrice induite d'après la loi de Faraday, donc d'un courant induit d'intensité $i(t)$.
- La partie du circuit pouvant se déplacer est la tige. Le long de cette tige le déplacement du courant est

$$d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}_r.$$

La force de Laplace infinitésimal est donc

$$d\vec{F}_L = i(t)d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i(t)d\ell B \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z = -i(t)d\ell B \vec{u}_\theta.$$

En intégrant sur toute la tige il vient que

$$\vec{F}_L = -i(t)\ell B \vec{u}_\theta$$

ayant pour point d'application le **barycentre de la tige G**.

N.B. On note que la force de Laplace est opposée au mouvement (vitesse du barycentre de la tige $\vec{v}_G = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ donc selon $= \vec{u}_\theta$). Ce qui est en accord avec la loi de Lenz : les effets liés aux phénomènes d'induction s'oppose à leur cause. Ici la force de Laplace, effet, s'oppose à la cause, mouvement de la tige à l'origine de l'induction de Lorentz.

- La puissance de la force de Laplace est

$$P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v}_G = -i(t)\ell B \vec{u}_\theta \cdot \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$P_L = -\frac{1}{2}i(t)\ell^2 B \dot{\theta}.$$

- Pour un convertisseur électromécanique idéal, la puissance électrique et la puissance mécanique fournis sont telles que

$$P_{\text{élec}} + P_{\text{méca}} = 0 \quad ; \quad ei + P_L = 0 \quad ; \quad e = -\frac{P_L}{i}$$

$$e = \frac{1}{2}\ell^2 B \dot{\theta}.$$

- La fém peut être modélisé par un générateur de tension idéal (donc en convention récepteur flèche de tension de e dans le même sens que i). Ainsi, en utilisant la loi des mailles et la loi du condensateur

$$e = u_c \quad ; \quad \frac{de}{dt} = \frac{du_c}{dt} \quad ; \quad \frac{1}{2}\ell^2 B \ddot{\theta} = \frac{1}{C}i(t)$$

$$i(t) = \frac{CB\ell^2}{2}\ddot{\theta}.$$

6. D'après le théorème du moment cinétique (système : tige, référentiel terrestre supposé galiléen) et si on considère que liaison de la tige est considérée parfaite, soit que le moment de la force de contact à ce niveau est considérée nulle, il vient que

$$\begin{aligned}
 J_{Oz}\ddot{\theta} &= \sum_i \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_i) \quad ; \quad \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_L) \\
 \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} &= [\vec{OG} \wedge (mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta)] \cdot \vec{u}_z + \vec{OG} \wedge (-i(t)\ell B \vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z \\
 \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} &= -\frac{1}{2}\ell mg \sin \theta (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z - \frac{1}{2}i(t)\ell^2 B (\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta) \cdot \vec{u}_z \\
 \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} &= -\frac{1}{2}\ell mg \sin \theta - \frac{CB^2\ell^4}{4}\ddot{\theta} \quad ; \quad \frac{2}{3}m\ell + \frac{CB^2\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \\
 \ddot{\theta} &= -\frac{mg}{\frac{2}{3}m\ell + \frac{CB^2\ell^3}{2}} \sin \theta
 \end{aligned}$$

avec $\vec{OG} = \frac{1}{2}\ell\vec{u}_r$. Pour les petites oscillations, l'approximation des petits angle donne

$$\ddot{\theta} = -\frac{mg}{\frac{2}{3}m\ell + \frac{CB^2\ell^3}{2}}\theta.$$

On identifie l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg}{\frac{2}{3}m\ell + \frac{CB^2\ell^3}{2}}}.$$

2 Étude d'une pompe à chaleur

1. La détente entre les états d'équilibre A et B étant adiabatique ($Q_{AB} = 0$ donc $S_{r,AB} = 0$) et réversible ($S_c = 0$), la transformation est donc isentropique. Dans le cas d'un gaz parfait, il vient que

$$PV^\gamma = \text{cst}.$$

Afin de trouver une expression liant P et T , on utilise la loi des gaz parfaits

$$\begin{aligned}
 V &= nR\frac{T}{P} \quad \text{ainsi} \quad \frac{P}{P^\gamma} (nR)^\gamma T^\gamma = \text{cst} \\
 P^{1-\gamma} T^\gamma &= \text{cst}' \quad \text{ainsi} \quad P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T = \text{cst}'' \\
 P_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_{\text{amb}} &= P_B^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_B
 \end{aligned}$$

$$T_B = \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_{\text{amb}}$$

avec $T_{\text{amb}} = T_A$.

Il en va de même pour la compression adiabatique réversible entre les états C et D :

$$P_C^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_{\text{ext}} = P_D^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_D$$

$$T_D = \left(\frac{P_C}{P_D}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_{\text{ext}}$$

avec $T_{\text{ext}} = T_C$.

2. Les applications numériques donnent

$$T_B = 249 \text{ K} \quad \text{et} \quad T_D = 321 \text{ K}.$$

On aura remarqué que la transformation entre B et C étant isobare, il vient que $P_B = P_C = 2,0 \text{ bar}$. De même pour la transformation isobare entre D et A , soit $P_D = P_A = 3,0 \text{ bar}$.

3. Dans un diagramme de Watt (P, V), on place le point A en (P_A, V_A) . Une courbe représentant la détente adiabatique le relie au point B en $(P_B < P_A, V_B > V_A)$. Une droite horizontale représentant le réchauffement isobare le relie au point C en $(P_C = P_B, V_C > V_B)$. Une courbe représentant la compression adiabatique le relie au point D en $(P_D > P_C, V_D < V_C)$. Une droite horizontale représentant le refroidissement isobare le relie au point A en $(P_A = P_D, V_A < V_D)$.

Le cycle s'effectue donc dans le **sens anti-horaire**.

4. Comme le cycle s'effectue dans le sens anti-horaire **le système reçoit du travail** $W > 0$.
5. On applique le premier principe enthalpique au fluide lors de son passage dans l'échangeur E_c car il s'agit d'une transformation isobare, ainsi

$$\Delta_{BC}H = Q_{BC}.$$

Dans le cas d'un gaz parfait

$$\Delta_{BC}H = C_p (T_C - T_B) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} (T_C - T_B) = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma - 1} (T_C - T_B)$$

en utilisant la relation de Mayer $C_p - C_v = nR$. Ainsi

$$Q_{BC} = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma - 1} (T_C - T_B).$$

A.N.
$$Q_{BC} = \frac{1 \text{ kg}}{4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}} \frac{8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 1,67}{0,67} (273 - 249) = 124 \text{ kJ}.$$

D'après le signe du transfert thermique, le fluide reçoit de la chaleur de l'extérieur grâce à l'échangeur, c'est ce qu'on attend d'une pompe à chaleur : que l'**extérieur** remplisse le rôle de **source chaude**.

6. On applique le premier principe enthalpique au fluide lors de son passage dans l'échangeur E_f car il s'agit d'une transformation isobare, ainsi

$$\Delta_{AD}H = Q_{AD}.$$

Dans le cas d'un gaz parfait

$$\Delta_{AD}H = C_p (T_A - T_D) = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} (T_D - T_A) = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma - 1} (T_D - T_A)$$

en utilisant la relation de Mayer $C_p - C_v = nR$. Ainsi

$$Q_{AD} = \frac{m}{M} \frac{R\gamma}{\gamma - 1} (T_A - T_D).$$

A.N.
$$Q_{AD} = \frac{1 \text{ kg}}{4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}} \frac{8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 1,67}{0,67} (293 - 321) = -145 \text{ kJ}$$

D'après le signe du transfert thermique, le fluide fournit de la chaleur de l'intérieur grâce à l'échangeur, c'est ce qu'on attend d'une pompe à chaleur : que l'**intérieur** remplisse le rôle de **source froide**.

7. On étudie la variation d'énergie interne du fluide au cours d'un cycle, soit

$$\Delta U = U_f - U_i = U_i - U_i = 0.$$

On applique le premier principe de la thermodynamique au fluide au cours du cycle :

$$\Delta U = W + Q = W + Q_{BC} + Q_{DA}$$

les transformations $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$ étant adiabatique. Ainsi il vient que

$$W + Q_{BC} + Q_{DA} = 0 \quad ; \quad W = -Q_{BC} - Q_{DA}.$$

A.N. $W = -124 \text{ kJ} + 145 \text{ kJ} = 21 \text{ kJ}.$

8. L'efficacité d'une machine est la valeur absolue du rapport entre l'énergie utile et l'énergie "payante", dans le cas de la pompe à chaleur l'énergie utile est le transfert thermique fourni à la source froide, soit $Q_{DA} < 0$, et l'énergie payante est l'énergie mécanique reçue, $W > 0$. Ainsi

$$e = \frac{-Q_{DA}}{W}.$$

A.N.

$$e = -\frac{145 \text{ kJ}}{21 \text{ kJ}} = 6,9.$$

9. Afin de calculer l'efficacité maximale, appliquons le deuxième principe de la thermodynamique sur le fluide au cours d'un cycle réversible

$$\Delta S = S_e + S_c = S_e = \frac{Q_{BC,rev}}{T_{ext}} + \frac{Q_{DA,rev}}{T_{amb}}.$$

Ayant affaire à un cycle, $\Delta S = 0$, ainsi

$$\frac{Q_{BC,rev}}{Q_{DA,rev}} = -\frac{T_{ext}}{T_{amb}}.$$

En utilisant l'expression de l'efficacité et du travail obtenu précédemment, il vient que

$$e_{max} = \frac{-Q_{DA,rev}}{W_{rev}} = \frac{Q_{DA,rev}}{Q_{BC,rev} + Q_{DA,rev}} = \frac{1}{1 + \frac{Q_{DA,rev}}{Q_{BC,rev}}} = \frac{1}{1 - \frac{T_{ext}}{T_{amb}}}$$

$$e_{max} = \frac{T_{amb}}{T_{amb} - T_{ext}}.$$

A.N.

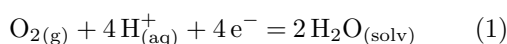
$$e_{max} = \frac{293 \text{ K}}{293 \text{ K} - 273 \text{ K}} = 14,7.$$

Cette efficacité n'est pas atteinte avec la pompe étudiée car les transferts de chaleur (réchauffement dans l'échangeur E_c et le refroidissement dans l'échangeur E_f) sont sources d'irréversibilité. Afin de compenser les pertes par énergies thermiques, le travail mécanique requis par la machine doit être plus important.

10. Pour fonctionner comme climatiseur, il faut inverser le rôle des deux échangeurs. Le fluide doit désormais être plus froid que la température ambiante dans la pièce afin de prélever de l'énergie thermique dans la pièce. L'échangeur intérieur joue alors le rôle de source froide pour le fluide qui le refroidit $Q_f > 0$. Il faut ensuite compresser le fluide pour lui faire atteindre une température supérieure à la température extérieure. Il y a alors échange thermique positif du fluide vers l'échangeur qui dissipe la chaleur vers l'extérieur $Q_c < 0$. Le fluide est ensuite détendu afin de le refroidir. Ainsi, l'échange thermique avec l'échangeur intérieur est bien négatif comme dit plus tôt. Le fluide parcourt donc les différents éléments de la PAC dans le sens inverse.

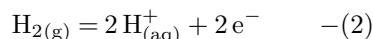
3 Étude d'une pompe à chaleur

1. À la cathode il y a réduction, la demi-équation décrivant cette réaction est



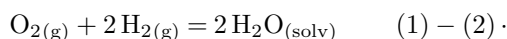
car O_2 est oxydant, donc seul gaz pouvant subir une réduction.

À l'anode il y a oxydation, la demi-équation décrivant cette réaction est



car H_2 est réducteur, donc seul gaz pouvant subir une oxydation.

2. L'équation bilan est obtenu en sommant les deux demi-équations en équilibrant le nombre d'électrons



La différence des potentiels standard à la cathode et à l'anode est

$$\Delta E^\circ = E_1^\circ - E_2^\circ. \quad \text{A.N.} \quad \Delta E^\circ = 1,23 \text{ V}.$$

Par définition de la constante d'équilibre, il vient que

$$K^\circ = \exp\left(\frac{nF\Delta E^\circ}{RT}\right)$$

avec n le nombre d'électrons échangés et F la constante de Faraday.

A.N.

$$K^\circ = \exp\left(\frac{4 \times 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1} \times 1,23 \text{ V}}{8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \times 298 \text{ K}}\right) = 1,7 \times 10^{83}.$$

La réaction est totale car $K^\circ \gg 1 \times 10^4$

3. Il y a réduction à la cathode, comme montré plus tôt l'espèce présente est O_2 . De l'eau est aussi présente comme produit de la réaction ;

Il y a oxydation à la cathode, comme montré plus tôt l'espèce présente est H_2 .

Lors de la réduction à la cathode des électrons sont captés alors qu'ils sont produit à l'anode lors de l'oxydation. Le sens de circulation des électrons est donc orienté de l'anode vers la cathode.

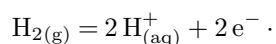
Le sens du courant est opposé à celui de la circulation des électrons donc il est orienté de la cathode à l'anode.

La pile débite du courant depuis la borne +, soit la cathode d'après la conclusion précédente. La borne - est donc l'anode.

4. D'après l'énoncé $pH = 0$, les pressions égales à 1 bar et les concentrations égales à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$: on se trouve dans les conditions standards utilisées pour les potentiels fournis. La fém est donc

$$\Delta E^\circ = E_1^\circ - E_2^\circ = 1,23 \text{ V}.$$

5. L'électrolyte assure la conduction ionique entre les deux électrodes afin de fermer électriquement le circuit.
6. Comme on nous indique la quantité de matière de dihydrogène nécessaire pour faire rouler une voiture sur une certaine distance, utilisons la demi-équation d'oxydation pour estimer le nombre de moles d'électrons produits lorsqu'une mole de H_2 est consommée :



On constate que deux moles d'électrons sont produites lorsqu'une mole de H_2 est consommée. Ainsi, si 500 moles de H_2 sont nécessaires pour faire rouler la voiture sur 100 km, c'est pour produire $n_{e^-} = 1000 \text{ mol}$ d'électrons.

7. La charge électrique libérée par les électrons est

$$Q = n_{e^-} F. \quad \text{A.N.}$$

$$Q = 1000 \text{ mol} \times 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1} = 9,65 \times 10^7 \text{ C}.$$

N.B. Le plus souvent la charge électrique disponible d'un accumulateur est donnée en ampère-heure, ainsi

$$Q = 9,65 \times 10^7 \text{ C} = 9,65 \times 10^7 \text{ A} \cdot \text{s} = 9,65 \times 10^7 \text{ A} \times \frac{1}{3600} \text{ h} = 2,68 \times 10^4 \text{ A} \cdot \text{h}.$$

8. La puissance délivrée à l'ensemble des cellules est $\mathcal{P} = 20 \text{ kW}$ supposée constante par soucis de modélisation. Cette puissance électrique est définie telle que $\mathcal{P} = UI$ avec U la tension aux bornes de l'ensemble des cellules, $U = 256 \times 0,7 \text{ V} = 179,2 \text{ V}$, et I l'intensité du courant traversant une seule cellule (elle est la même pour toutes les cellules car elles sont associées en série) supposée elle aussi constante pour la même raison.

Cette intensité peut donc être définie comme le rapport de la quantité de charges ayant traversé une seule cellule Q_{cell} et la durée de débit de cette charge Δt , qui correspond à la durée de fonctionnement de la pile que l'on recherche : $I = Q_{\text{cell}} / \Delta t$.

La quantité de charges traversant une seule cellule durant la durée de fonctionnement correspond à la charge totale Q associée à la consommation des 500 mol de H_2 dans l'ensemble des cellules divisée par le nombre de cellules : $Q_{\text{cell}} = Q / 256 = 3,770 \times 10^5 \text{ C} = 1,047 \times 10^2 \text{ A} \cdot \text{h}$.

Finalement, on peut écrire

$$\Delta t = \frac{Q_{\text{cell}}}{I} = \frac{Q_{\text{cell}} U}{\mathcal{P}}. \quad \text{A.N.}$$

$$\Delta t = \frac{3,770 \times 10^5 \text{ A} \cdot \text{s} \times 179,2 \text{ V}}{20 \times 10^3 \text{ W}} = 3,377 \times 10^3 \text{ s} = 56 \text{ min.}$$