

DS 2 : rétroactions-oscillateurs-électronique numérique

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en deux parties **indépendantes**.
- Les **calculatrices** sont **interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Partie A - Détection des ondes sismiques : principe d'un sismomètre mécanique (8 pt)

On considère un sismomètre mécanique dont tous les mouvements sont unidirectionnels suivant l'axe vertical (Oz) orienté vers le haut. Le bâti contient une masse m suspendue à un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . La masse subit également un amortissement visqueux dû à un dispositif solide du bâti. On introduit $z(t) = Z(t) - Z_{eq}$, le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre, mesuré dans le référentiel du bâti.

On tient compte de la force de frottement $\vec{f}_v$, opposée à la vitesse de la masse relativement au bâti telle que

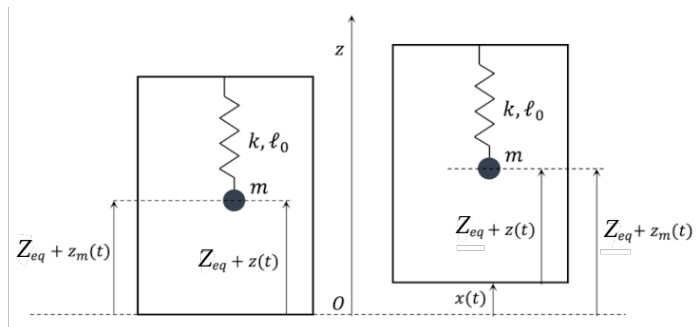
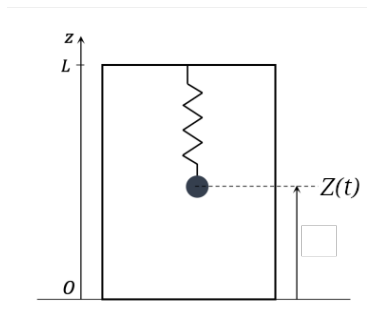
$$\vec{f}_v = -\alpha \dot{Z}(t) \vec{e}_z = -\alpha \dot{z}(t) \vec{e}_z$$

car Z_{eq} est constant.

On note $x(t)$ le déplacement vertical du bâti dans le référentiel terrestre. La position absolue de la masse s'écrit alors

$$Z_m(t) = x(t) + Z(t) = x(t) + z(t) + Z_{eq} = z_m(t) + Z_{eq}$$

avec z_m le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre, mesuré dans le référentiel terrestre.



1. En l'absence de secousse du sol, **déterminer** l'allongement du ressort à l'équilibre $\Delta\ell_{eq} = \ell_{eq} - \ell_0$ et en déduire la position d'équilibre Z_{eq} de la masselotte par rapport à l'origine du bâti. (allongement 0,5pt, Z_{eq} 0,5pt, total 1pt)

À l'équilibre (vitesse du système, ici la masselotte, constamment nulle donc accélération nulle), le poids de la masselotte est compensé par la force de rappel du ressort. Si $\Delta\ell_{\text{eq}}$ est l'allongement du ressort, l'application du PFD sur la masselotte donne

$$0 = -mg + k\Delta\ell_{\text{eq}}.$$

La force de rappel est dirigée vers le haut car lorsque le ressort s'allonge la masselotte est ramenée vers le haut. Donc

$$\Delta\ell_{\text{eq}} = \frac{mg}{k}.$$

Comme l'allongement est défini tel que $\Delta\ell_{\text{eq}} = \ell_{\text{eq}} - \ell_0$, il vient que

$$\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \Delta\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}.$$

Comme $Z(t) = L - \ell(t)$ il vient que

$$Z_{\text{eq}} = L - \ell_{\text{eq}} \quad ; \quad Z_{\text{eq}} = L - \ell_0 - \frac{mg}{k}.$$

2. Lorsqu'un séisme se produit, le bâti est animé du déplacement $x(t)$. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par le déplacement relatif $z(t)$ de la masse autour de sa position d'équilibre. (1,5pt)

La position absolue de la masse dans le référentiel terrestre est $Z_m = x + Z = x + z - Z_{\text{eq}}$ donc son accélération absolue est

$$\ddot{Z}_m = \ddot{x} + \ddot{z}$$

car Z_{eq} est constant. Dans ce même référentiel, on applique le PFD sur la masselotte en considérant son accélération absolue

$$\begin{aligned} m\ddot{Z}_m &= -mg + k(\ell - \ell_0) - \alpha\dot{z} \\ m(\ddot{x} + \ddot{z}) &= -mg + kL - kZ - k\ell_0 - \alpha\dot{z} \\ m(\ddot{x} + \ddot{z}) &= -k(Z - Z_{\text{eq}}) - \alpha\dot{z} \end{aligned}$$

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = -m\ddot{x}$$

avec la longueur du ressort telle que $\ell = L - Z$. Le mouvement du bâti agit donc comme une excitation proportionnelle à son accélération.

On considère désormais un régime sinusoïdal forcé tel que

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t).$$

On pose

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}.$$

3. **Établir** l'expression de la fonction de transfert en déplacement

$$H_m^d(j\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{X}}$$

sous forme canonique en fonction de $u = \omega/\omega_0$ et de Q (attention on désigne $\underline{Z}$ comme l'amplitude complexe de $z(t)$ et non comme la correspondance complexe de $Z(t)$).

Pour $Q = 1/\sqrt{2}$, **tracer qualitativement** le diagramme de Bode asymptotique en amplitude. On se limitera aux comportements asymptotiques.

Dans les différentes gammes de fréquences, **indiquer** à quelle grandeur physique du bâti (déplacement, vitesse ou accélération) le déplacement relatif z est proportionnel. **Préciser** ainsi la nature du capteur dans les différents

régimes. (expression 0,5pt, diagramme 0,5pt, grandeurs proportionnelles 0,5pt chacune, natures 0,5pt chacune, total 3pt)

En notation complexe, l'équation du mouvement devient

$$(-m\omega^2 + j\alpha\omega + k) \underline{Z} = m\omega^2 \underline{X}.$$

D'où

$$H_m^d(j\omega) = \frac{m\omega^2}{k - m\omega^2 + j\alpha\omega}.$$

Avec $k = m\omega_0^2$ et $\alpha = m\omega_0/Q$,

$$H_m^d(j\omega) = \frac{u^2}{1 - u^2 + j\frac{u}{Q}}, \quad u = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Pour $\omega \ll \omega_0$,

$$H_m^d \simeq \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2.$$

Le gain asymptotique est donc

$$G_{dB} \simeq 40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

soit une pente de +40 dB/decade.

Pour $\omega \gg \omega_0$,

$$H_m^d \simeq -1,$$

donc $|H_m^d| \rightarrow 1$ et le gain tend vers 0 dB. Le diagramme asymptotique est donc une droite de pente +40 dB/decade jusqu'à ω_0 , puis un palier à 0 dB.

Pour $Q = 1/\sqrt{2}$, le module exact vaut

$$|H_m^d| = \frac{u^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + 2u^2}} = \frac{u^2}{\sqrt{1 + u^4}},$$

ce qui confirme une transition monotone entre ces deux asymptotes.

En basse fréquence,

$$\underline{Z} \simeq \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \underline{X} = -\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{\underline{X}}.$$

Le déplacement relatif est donc proportionnel à l'**accélération** du bâti : le sismomètre se comporte comme un **accéléromètre**.

En haute fréquence,

$$\underline{Z} \simeq -\underline{X}.$$

Le déplacement relatif reproduit, au signe près, le **déplacement** du bâti : le dispositif se comporte comme un **capteur de déplacement**.

Il n'existe pas ici de large domaine asymptotique dans lequel z soit strictement proportionnel à la vitesse ; un comportement de type capteur de vitesse peut seulement apparaître dans une zone intermédiaire lorsque le terme d'amortissement domine le dénominateur.

4. À très basses fréquences, **donner** l'expression approchée de l'équation du mouvement. En supposant que la résolution du dispositif de mesure du déplacement relatif est Δz , **déterminer** l'accélération minimale du bâti que le sismomètre peut résoudre. **Indiquer** comment choisir les paramètres du système pour optimiser cette résolution. (expression BF 0,5pt, accélération minimale 1pt, choix 1pt, total 2,5pt)

À très basse fréquence, $\omega \ll \omega_0$. Dans l'équation

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = -m\ddot{x},$$

les termes inertiel et visqueux associés au mouvement relatif deviennent négligeables devant le terme de rappel. On obtient

$$kz \simeq -m\ddot{x},$$

soit

$$z \simeq -\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{x}.$$

Si le plus petit déplacement mesurable est Δz , la plus petite accélération détectable vérifie

$$\Delta z \simeq \frac{a_{\min}}{\omega_0^2}.$$

Ainsi

$$a_{\min} = \omega_0^2 \Delta z = \frac{k}{m} \Delta z.$$

Pour améliorer la résolution en accélération, il faut diminuer $a_{\min}$: on cherche donc une **faible pulsation propre** ω_0 , par exemple en diminuant k et/ou en augmentant m , tout en restant dans le domaine de validité de l'approximation très basse fréquence $\omega \ll \omega_0$ pour les fréquences que l'on souhaite mesurer.

Partie B

PROBLÈME 3 Oscillateurs en électronique

Nous nous intéressons dans ce problème aux oscillateurs, systèmes électroniques au cœur de très nombreux objets qui nous entourent au quotidien : montre, voiture, radio, ordinateur, etc... Quelle que soit l'application, l'objectif d'un oscillateur est le même : générer un signal de période stable, de caractéristiques spectrales choisies, sans aucun signal d'entrée. Deux réalisations sont proposées dans ce problème : en première partie, un oscillateur quasi-sinusoïdal et en seconde partie un oscillateur à relaxation.

Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Partie I – Réalisation d'un oscillateur quasi-sinusoïdal

Il est parfois intéressant d'avoir des systèmes électroniques instables, notamment en électronique, pour pouvoir réaliser des oscillateurs. On rappelle que ce type de structure peut être réalisé en associant un amplificateur et un filtre comme présenté en **figure 4**.

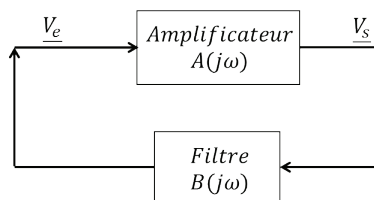


Figure 4 – Structure d'un oscillateur

Nous étudions dans cette partie l'oscillateur à filtre de Wien (**figure 5**).

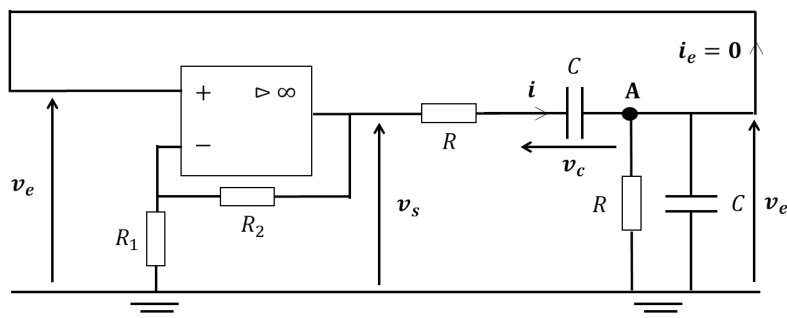


Figure 5 – Schéma électrique de l'oscillateur à filtre de Wien

I.1 – Généralités

Q50. Reproduire le schéma sur votre copie et identifier la partie amplificatrice ainsi que la partie filtre de cet oscillateur.

Q51. Justifier pourquoi le courant noté i_e sur le schéma peut être considéré comme nul dans la suite de l'étude.

I.2 – Étude du filtre de Wien

- Q52.** Quelle est la relation entre la dérivée de la tension v_c aux bornes du condensateur par rapport au temps et le courant i le traversant ? Cette équation sera nommée « **E1** » **sur votre copie**.
- Q53.** Par une loi des nœuds au point A, exprimer le courant i en fonction de la tension v_e et de sa dérivée par rapport au temps. Cette équation sera nommée « **E2** » **sur votre copie**.
- Q54.** Par une loi des mailles, exprimer la tension v_s en fonction de v_e , R , i et v_c . Cette équation sera numérotée « **E3** » **sur votre copie**.
- Q55.** En utilisant les équations **E1** et **E2**, montrer que l'on obtient l'expression suivante en précisant l'expression de la constante de temps τ :

$$\frac{dv_s}{dt} = \tau \frac{d^2 v_e}{dt^2} + 3 \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{\tau}. \quad (7)$$

I.3 – Amplificateur

- Q56.** En étudiant le fonctionnement de l'amplificateur linéaire intégré présent dans le schéma de la **figure 5 page 9**, en déduire la valeur de l'amplification $A = \frac{v_s}{v_e}$ en fonction des résistances R_1 et R_2 .

I.4 – Conditions d'oscillation

- Q57.** Montrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante vérifiée par la tension v_s en fonction de τ et de l'amplification A :

$$\tau^2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \tau(3 - A) \frac{dv_s}{dt} + v_s = 0. \quad (8)$$

- Q58.** Par analyse de cette équation, quelle condition doit-on satisfaire pour obtenir une oscillation harmonique ? Une analogie avec la mécanique peut guider votre raisonnement si nécessaire.
- Q59.** Quelle est alors la fréquence d'oscillation que l'on notera f_0 ?
- Q60.** D'où provient l'énergie nécessaire pour garantir l'oscillation ?

I.5 – Qualité du signal fourni

Nous nous intéressons à présent à la qualité du signal fourni par cet oscillateur. En **figures 6 et 7** sont présentées l'allure temporelle de la tension v_e ainsi que sa décomposition spectrale.

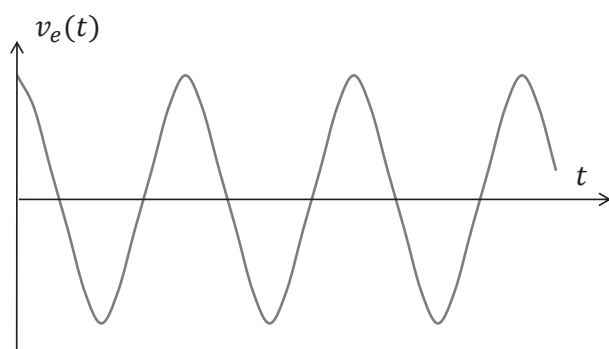


Figure 6 – Allure temporelle de la tension v_e

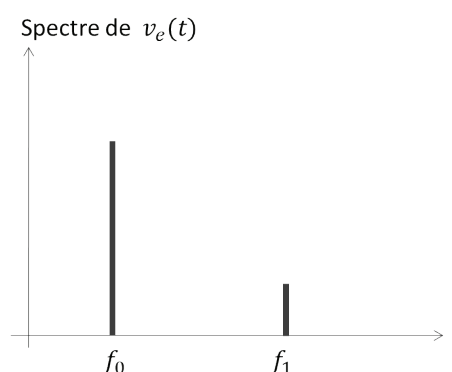


Figure 7 – Décomposition spectrale de la tension v_e

- Q61.** Peut-on considérer le signal fourni comme sinusoïdal ? Justifier.

Q62. On donne les fréquences $f_0 = 1 \text{ kHz}$ et $f_1 = 10 \text{ kHz}$. Comment pourrait-on améliorer la qualité de la tension v_e ? Une approche pratique est attendue en précisant les valeurs caractéristiques du dispositif mis en œuvre.

Partie II – Oscillateur à relaxation

Si l'on cherche à réaliser un signal d'horloge, il n'est pas nécessaire d'obtenir un signal sinusoïdal. On peut alors utiliser la structure de l'oscillateur à relaxation présentée en **figure 8**.

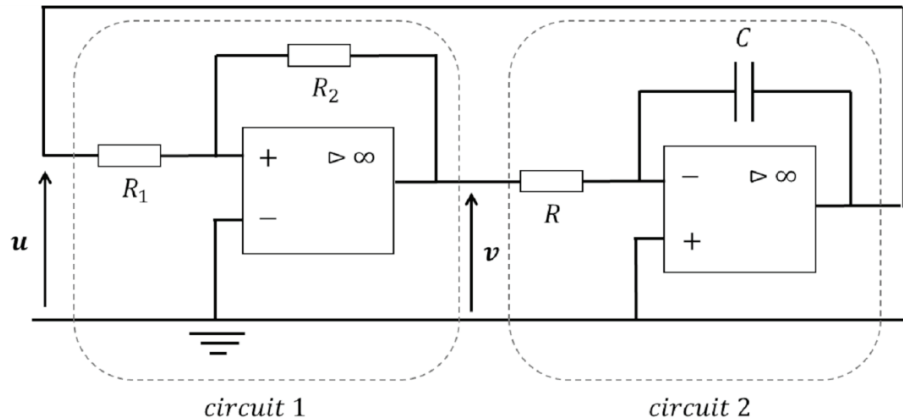


Figure 8 – Oscillateur à relaxation

On considère les amplificateurs linéaires intégrés idéaux (ALI idéaux) et on note $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$ leurs tensions de saturation. À $t = 0 \text{ s}$, on suppose que la tension v vaut $+V_{\text{sat}}$ et que la tension u est nulle.

Tout d'abord, nous nous intéressons au circuit 1.

Q63. Préciser, en le justifiant, le mode de fonctionnement de l'ALI idéal. Quelles sont les valeurs que peut prendre la sortie v ?
Pour quelle valeur de la tension d'entrée u , notée u_{seuil1} , la tension de sortie v bascule-t-elle de $+V_{\text{sat}}$ à $-V_{\text{sat}}$?

On admet que la tension de sortie v bascule de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$ pour une valeur de tension u_{seuil2} telle que $u_{\text{seuil2}} = -u_{\text{seuil1}}$.

Q64. Tracer la tension v en fonction de la tension u en annotant soigneusement le tracé.

Le circuit 2 est un montage intégrateur inverseur. On admet la relation entrée-sortie suivante :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{v}{RC} \quad (9)$$

Q65. Si la tension v est constante et vaut $+V_{\text{sat}}$, quelle est l'allure du signal d'entrée u ?

Étudions à présent le montage complet. Les chronogrammes des tensions u et v sont donnés en **figure 9**.

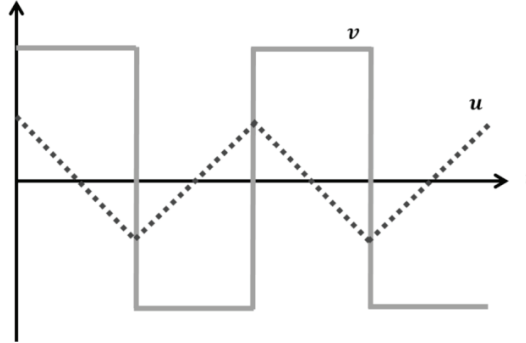


Figure 9 – Allures temporelles des signaux issus de l'oscillateur à relaxation

Q66. Exprimer la fréquence f de la tension u en fonction de R_1, R_2, R et C .

On souhaite obtenir un signal triangulaire d'amplitude $V_{max} = 2 \text{ V}$ et de fréquence $f = 1 \text{ kHz}$. On alimente les ALI en $\pm 15 \text{ V}$, ainsi $V_{sat} = 15 \text{ V}$. On impose d'utiliser les résistances R et R_2 telles que $R = R_2 = 1\,000 \, \Omega$.

Q67. Déterminer les valeurs de la résistance R_1 et du condensateur C pour répondre au cahier des charges.

Q68. Quelle caractéristique de l'ALI peut limiter la fréquence de fonctionnement d'un tel montage ?

B50 La partie amplificatrice est à gauche avec l'ALI et la partie filtre est à droite avec les résistances R et les condensateurs de capacités C .

B51 Ce courant correspond au courant de polarisation de la borne non inverseuse de l'ALI, il s'agit donc d'un courant d'intensité i_e nulle dans le cas du modèle de l'ALI idéal.

B52 D'après la loi du condensateur appliquée au premier condensateur

$$i = C \frac{dv_c}{dt} \quad \text{E1.}$$

B53 D'après la loi des noeuds en a

$$i = i_R + i_C + i_e$$

avec i_e et i_C les intensités des courants sortants de A pour aller dans la deuxième résistance et le deuxième condensateur respectivement. En utilisant la loi d'Ohm et la loi du condensateur sur ces deux dipôles, il vient que

$$i = \frac{v_e}{R} + C \frac{dv_e}{dt} \quad \text{E2}$$

i_e étant nul.

B54 Comme l'intensité i_e est nulle on peut considérer la maille constitué de la première résistance, du premier condensateur et de la deuxième résistance (ou le deuxième condensateur). La tension aux bornes de cette maille est v_s , ainsi la loi des mailles donne

$$v_s - v_{R1} - v_c - v_e = 0 \quad ; \quad v_s - Ri - v_c - v_e = 0$$

$$v_s = v_e + Ri + v_c \quad \text{E3.}$$

B55 On dérive la dernière équation pour obtenir quelque chose de similaire à l'expression demandée

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{dv_c}{dt}.$$

D'après E1 $\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i$ ainsi

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i.$$

Et on peut remplacer i par l'expression E2, soit

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dt} &= \frac{dv_e}{dt} + R \frac{d}{dt} \left(\frac{v_e}{R} + C \frac{dv_e}{dt} \right) + \frac{1}{C} \left(\frac{v_e}{R} + C \frac{dv_e}{dt} \right) \\ &= \frac{dv_e}{dt} + \frac{dv_e}{dt} + RC \frac{d^2 v_e}{dt^2} + \frac{v_e}{RC} + \frac{dv_e}{dt}. \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{dv_s}{dt} = RC \frac{d^2 v_e}{dt^2} + 3 \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{RC}.$$

On identifie directement la constante de temps du circuit $\tau = RC$.

B56 La sortie de l'ALI sur la figure 5 est reliée à l'entrée inverseuse, il y a donc rétroaction négative, on peut supposer qu'il fonctionne en régime linéaire, ainsi $\varepsilon = V_+ - V_-$. On peut lire directement la valeur de $V_+ = v_e$. Pour V_- , on utilise la loi des noeuds en terme de potentiels

$$i_1 + i_2 = i_-$$

en considérant les intensités des courants i_1 allant de la masse vers V_- et i_2 allant de la sortie vers V_- . Comme on considère un ALI idéal alors $i_- = 0$, donc

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} &= 0 \quad ; \quad \frac{V_M - V_-}{R_1} + \frac{v_s - V_-}{R_2} = 0 \quad ; \quad \frac{v_s}{R_2} = V_- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad ; \quad V_- \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{v_s}{R_2} \\ V_- &= v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned}$$

En régime linéaire il vient que

$$\varepsilon = V_+ - V_- = 0 \quad ; \quad v_e - v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0 \quad ; \quad v_s = v_e \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad ; \quad A = \frac{v_s}{v_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}.$$

Il s'agit de l'amplification d'un montage amplificateur non inverseur.

B57 On remplace v_e dans l'expression obtenue à la question 55 à partir de l'expression précédente : $v_e = \frac{1}{A}v_s$, ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dt} &= \frac{1}{A} \left(RC \frac{d^2 v_e}{dt^2} + 3 \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{RC} \right) \quad ; \quad A \frac{dv_s}{dt} = \tau \frac{d^2 v_s}{dt^2} + 3 \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{\tau} \\ 0 &= \tau \frac{d^2 v_s}{dt^2} + (3 - A) \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{\tau} \quad ; \quad 0 = \tau^2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \tau (3 - A) \frac{dv_s}{dt} + v_s. \end{aligned}$$

B58 Pour obtenir une oscillation harmonique il faut que le coefficient devant la dérivée temporelle d'ordre 1 s'annule, on obtient alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, soit

$$A = 3.$$

B59 Dans ce cas la fréquence d'oscillation correspondra à la fréquence caractéristique du filtre de Wien soit

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

B60 L'énergie nécessaire pour garantir l'oscillation est fournie par **l'alimentation de l'ALI**.

B61 On voit que le signal $v_e(t)$ contient deux fréquences : f_0 et f_1 , donc **il ne s'agit pas d'un signal sinusoïdal** qui n'en contient qu'une.

B62 Afin de filtrer la fréquence f_1 et de ne garder que la fréquence f_0 on peut faire passer la tension v_e dans un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure f_c sera supérieure à $f_0 = 1 \text{ kHz}$ pour ne pas filtrer cette fréquence, mais inférieure à $f_1 = 10 \text{ kHz}$ pour justement bien filtrer cette fréquence, ainsi on peut prendre

$$f_c = 5 \text{ kHz}.$$

B63 Comme la sortie n'est pas reliée à la borne inverseuse de l'ALI du circuit 1 il n'y a pas de rétroaction négative, il fonctionne donc en régime saturé. La sortie v peut prendre les valeurs $\pm V_{sat}$.

On étudie le circuit 1, d'abord dans le cas où $v = +V_{sat}$ donc $\varepsilon > 0$. On étudie les potentiels des bornes inverseuse et non inverseuse. On voit directement que V_- est reliée à la masse donc $V_- = 0$. Pour V_+ on utilise la loi des noeuds en terme de potentiels avec i_1 l'intensité du courant allant de u vers V_+ et i_2 le courant allant de v à V_+ , ainsi

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 = i_+ & \quad ; \quad \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = 0 \quad \text{car } i_+ = 0 \text{ pour l'ALI idéal} \\ \frac{u - V_+}{R_1} + \frac{v - V_+}{R_2} = 0 & \quad ; \quad \frac{u}{R_1} + \frac{v}{R_2} = V_+ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ V_+ \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{u R_2 + v R_1}{R_1 R_2} & \quad ; \quad V_+ = \frac{u R_2 + v R_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned}$$

Ainsi il vient que $\varepsilon = V_+ - V_- > 0$ car on est en saturation haute $v = V_{sat}$, ainsi

$$\begin{aligned} \frac{u R_2 + v R_1}{R_1 + R_2} - 0 > 0 & \quad ; \quad \frac{u R_2 + V_{sat} R_1}{R_1 + R_2} - 0 > 0 \\ u > -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}. \end{aligned}$$

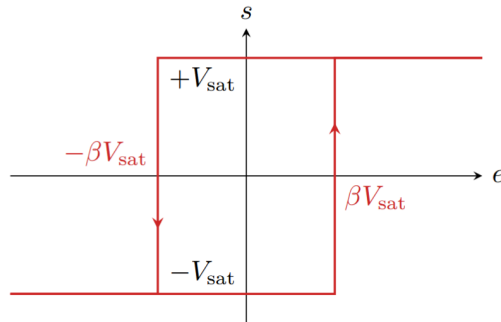
Le circuit 1 fonctionne en saturation haute si $u > -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$. La tension de sortie bascule de la saturation haute $+V_{sat}$ à la saturation basse $-V_{sat}$ pour $u = u_{seuil1} = -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

Bonus : pour la saturation basse $v = -V_{sat}$, l'étude est la même, mais dans ce cas $\varepsilon = V_+ - V_- < 0$, ainsi

$$\begin{aligned} \frac{u R_2 + v R_1}{R_1 + R_2} - 0 < 0 & \quad ; \quad \frac{u R_2 - V_{sat} R_1}{R_1 + R_2} - 0 < 0 \\ u < \frac{R_1}{R_2} V_{sat}. \end{aligned}$$

La tension seuil de basculement de l'état bas à haut est bien $u_{seuil2} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat} = -u_{seuil1}$, ce qui n'était pas demandé de montrer.

B64 Le tracé est donné ci-dessous avec $\beta = \frac{R_1}{R_2}$, $e \equiv u$ et $s \equiv v$.



B65 D'après la relation 9, il vient que

$$\frac{du}{dt} = -\frac{v}{RC} \quad ; \quad du = -\frac{v}{RC} dt \quad ; \quad u(t) - u(t_0) = -\int_{t_0}^t \frac{v}{RC} dt$$

avec t_0 l'instant de début de saturation haute. Si $v = +V_{sat}$ alors

$$u(t) = u(t_0) - \frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_0).$$

Au début de la saturation haute $u(t_0) = u_{seuil1} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$, donc

$$u(t) = \frac{R_1}{R_2} V_{sat} - \frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_0).$$

Il s'agit d'une fonction affine en t de pente négative $-\frac{1}{RC} V_{sat}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

B66 On voit sur la figure que la période T de la tension u correspond à la durée de la saturation haute plus la durée de la saturation basse. Cherchons ces durées.

À partir de la dernière expression, on peut obtenir la durée $t_0 - t_1$, avec t_0 le début de la saturation haute et t_1 le début de la saturation basse. Lorsque'on arrive à la saturation basse on sait que $u(t_1) = u_{seuil2} = -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$, ainsi il vient que

$$u(t_1) = -\frac{R_1}{R_2} V_{sat} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat} - \frac{1}{RC} V_{sat} (t_1 - t_0) \quad ; \quad 2\frac{R_1}{R_2} V_{sat} = \frac{1}{RC} V_{sat} (t_1 - t_0)$$

$$t_1 - t_0 = 2RC \frac{R_1}{R_2}.$$

À la saturation basse, $v = -V_{sat}$, donc la nouvelle loi temporelle de u est

$$u(t) = u(t_1) + \frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_1).$$

La saturation basse finit à t_2 lorsque $u(t_2) = u_{seuil2} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$, ainsi il vient que

$$u(t_2) = u(t_1) + \frac{1}{RC} V_{sat} (t_2 - t_1) \quad ; \quad \frac{R_1}{R_2} V_{sat} = -\frac{R_1}{R_2} V_{sat} + \frac{1}{RC} V_{sat} (t_2 - t_1)$$

$$2\frac{R_1}{R_2} V_{sat} = \frac{1}{RC} V_{sat} (t_2 - t_1) \quad ; \quad t_2 - t_1 = 2RC \frac{R_1}{R_2}.$$

La période de la tension u est donc $t_1 - t_0 + (t_2 - t_1) = 4RC \frac{R_1}{R_2}$, et donc la fréquence f est

$$f = \frac{R_2}{4R_1 RC}.$$

B67 Afin d'obtenir une tension de u avec un maximum égal à $V_{max} = 2 \text{ V}$ il faut que $u_{seuil} = V_{max}$ soit

$$\frac{R_1}{R_2} V_{sat} = V_{max} \quad ; \quad R_1 = R_2 \frac{V_{max}}{V_{sat}}.$$

A.N. $R_1 = 1000 \, \Omega \times \frac{2 \text{ V}}{15 \text{ V}} \simeq 132 \, \Omega.$

Afin d'obtenir une fréquence f de 1 kHz il faut

$$\frac{R_2}{4R_1RC} = f \quad ; \quad C = \frac{R_2}{4R_1Rf}.$$

A.N. $C = \frac{1000 \, \Omega}{4 \times 132 \, \Omega \times 1000 \, \Omega \times 1000 \text{ Hz}} \simeq 2 \, \mu\text{F}.$

B68 La vitesse de balayage ou *slew rate* de l'ALI peut limiter la fréquence de fonctionnement d'un tel montage : l'ALI ne peut pas faire varier la tension aussi rapidement que souhaité (de l'ordre de quelques $\text{V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$).