

DS 2 : rétroactions-oscillateurs-électronique numérique

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en deux parties **indépendantes**.
 - Les **calculatrices** sont **interdites**.
 - Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
 - Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.
-

Partie A

PROBLÈME 3 Oscillateurs en électronique

Nous nous intéressons dans ce problème aux oscillateurs, systèmes électroniques au cœur de très nombreux objets qui nous entourent au quotidien : montre, voiture, radio, ordinateur, etc... Quelle que soit l'application, l'objectif d'un oscillateur est le même : générer un signal de période stable, de caractéristiques spectrales choisies, sans aucun signal d'entrée. Deux réalisations sont proposées dans ce problème : en première partie, un oscillateur quasi-sinusoïdal et en seconde partie un oscillateur à relaxation.

Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Partie I – Réalisation d'un oscillateur quasi-sinusoïdal

Il est parfois intéressant d'avoir des systèmes électroniques instables, notamment en électronique, pour pouvoir réaliser des oscillateurs. On rappelle que ce type de structure peut être réalisé en associant un amplificateur et un filtre comme présenté en **figure 4**.

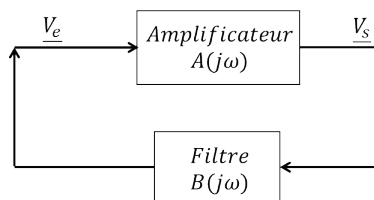


Figure 4 – Structure d'un oscillateur

Nous étudions dans cette partie l'oscillateur à filtre de Wien (**figure 5**).

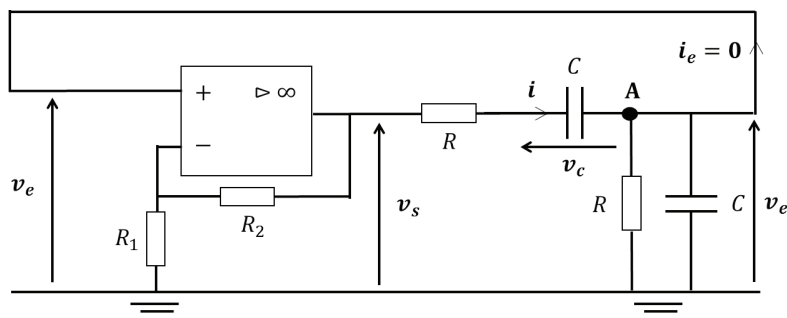


Figure 5 – Schéma électrique de l'oscillateur à filtre de Wien

I.1 – Généralités

Q50. Reproduire le schéma sur votre copie et identifier la partie amplificatrice ainsi que la partie filtre de cet oscillateur.

Q51. Justifier pourquoi le courant noté i_e sur le schéma peut être considéré comme nul dans la suite de l'étude.

I.2 – Étude du filtre de Wien

- Q52.** Quelle est la relation entre la dérivée de la tension v_c aux bornes du condensateur par rapport au temps et le courant i le traversant ? Cette équation sera nommée « **E1** » **sur votre copie**.
- Q53.** Par une loi des nœuds au point A, exprimer le courant i en fonction de la tension v_e et de sa dérivée par rapport au temps. Cette équation sera nommée « **E2** » **sur votre copie**.
- Q54.** Par une loi des mailles, exprimer la tension v_s en fonction de v_e , R , i et v_c . Cette équation sera numérotée « **E3** » **sur votre copie**.
- Q55.** En utilisant les équations **E1** et **E2**, montrer que l'on obtient l'expression suivante en précisant l'expression de la constante de temps τ :

$$\frac{dv_s}{dt} = \tau \frac{d^2 v_e}{dt^2} + 3 \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{\tau}. \quad (7)$$

I.3 – Amplificateur

- Q56.** En étudiant le fonctionnement de l'amplificateur linéaire intégré présent dans le schéma de la **figure 5 page 9**, en déduire la valeur de l'amplification $A = \frac{v_s}{v_e}$ en fonction des résistances R_1 et R_2 .

I.4 – Conditions d'oscillation

- Q57.** Montrer que l'on obtient l'équation différentielle suivante vérifiée par la tension v_s en fonction de τ et de l'amplification A :

$$\tau^2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \tau(3 - A) \frac{dv_s}{dt} + v_s = 0. \quad (8)$$

- Q58.** Par analyse de cette équation, quelle condition doit-on satisfaire pour obtenir une oscillation harmonique ? Une analogie avec la mécanique peut guider votre raisonnement si nécessaire.
- Q59.** Quelle est alors la fréquence d'oscillation que l'on notera f_0 ?
- Q60.** D'où provient l'énergie nécessaire pour garantir l'oscillation ?

I.5 – Qualité du signal fourni

Nous nous intéressons à présent à la qualité du signal fourni par cet oscillateur. En **figures 6 et 7** sont présentées l'allure temporelle de la tension v_e ainsi que sa décomposition spectrale.

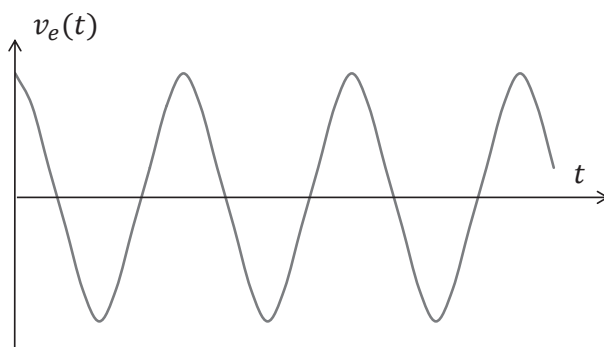


Figure 6 – Allure temporelle de la tension v_e

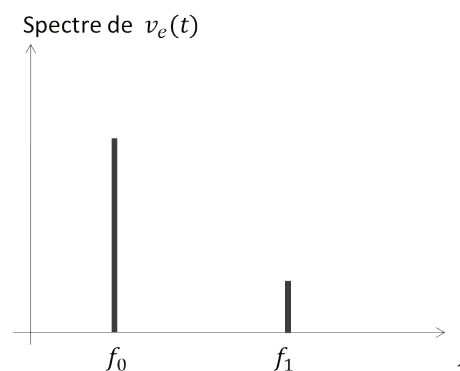


Figure 7 – Décomposition spectrale de la tension v_e

- Q61.** Peut-on considérer le signal fourni comme sinusoïdal ? Justifier.

Q62. On donne les fréquences $f_0 = 1 \text{ kHz}$ et $f_1 = 10 \text{ kHz}$. Comment pourrait-on améliorer la qualité de la tension v_e ? Une approche pratique est attendue en précisant les valeurs caractéristiques du dispositif mis en œuvre.

Partie II – Oscillateur à relaxation

Si l'on cherche à réaliser un signal d'horloge, il n'est pas nécessaire d'obtenir un signal sinusoïdal. On peut alors utiliser la structure de l'oscillateur à relaxation présentée en **figure 8**.

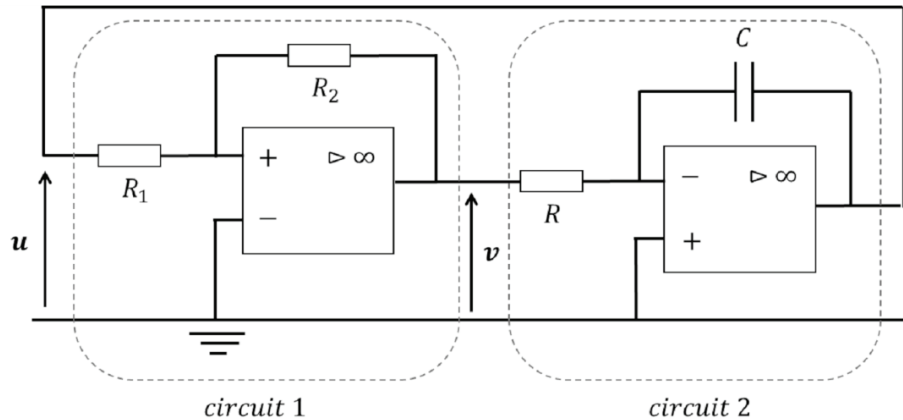


Figure 8 – Oscillateur à relaxation

On considère les amplificateurs linéaires intégrés idéaux (ALI idéaux) et on note $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$ leurs tensions de saturation. À $t = 0 \text{ s}$, on suppose que la tension v vaut $+V_{\text{sat}}$ et que la tension u est nulle.

Tout d'abord, nous nous intéressons au circuit 1.

Q63. Préciser, en le justifiant, le mode de fonctionnement de l'ALI idéal. Quelles sont les valeurs que peut prendre la sortie v ?
Pour quelle valeur de la tension d'entrée u , notée u_{seuil1} , la tension de sortie v bascule-t-elle de $+V_{\text{sat}}$ à $-V_{\text{sat}}$?

On admet que la tension de sortie v bascule de $-V_{\text{sat}}$ à $+V_{\text{sat}}$ pour une valeur de tension u_{seuil2} telle que $u_{\text{seuil2}} = -u_{\text{seuil1}}$.

Q64. Tracer la tension v en fonction de la tension u en annotant soigneusement le tracé.

Le circuit 2 est un montage intégrateur inverseur. On admet la relation entrée-sortie suivante :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{v}{RC} \quad (9)$$

Q65. Si la tension v est constante et vaut $+V_{\text{sat}}$, quelle est l'allure du signal d'entrée u ?

Étudions à présent le montage complet. Les chronogrammes des tensions u et v sont donnés en **figure 9**.

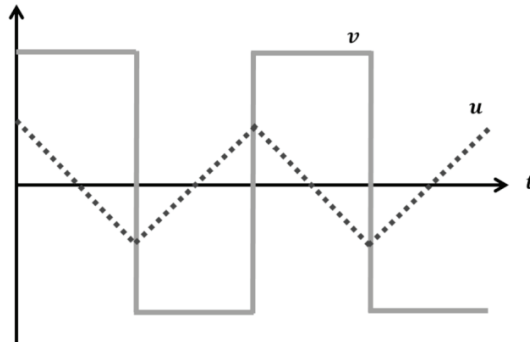


Figure 9 – Allures temporelles des signaux issus de l'oscillateur à relaxation

Q66. Exprimer la fréquence f de la tension u en fonction de R_1, R_2, R et C .

On souhaite obtenir un signal triangulaire d'amplitude $V_{max} = 2 \text{ V}$ et de fréquence $f = 1 \text{ kHz}$. On alimente les ALI en $\pm 15 \text{ V}$, ainsi $V_{sat} = 15 \text{ V}$. On impose d'utiliser les résistances R et R_2 telles que $R = R_2 = 1\,000 \, \Omega$.

Q67. Déterminer les valeurs de la résistance R_1 et du condensateur C pour répondre au cahier des charges.

Q68. Quelle caractéristique de l'ALI peut limiter la fréquence de fonctionnement d'un tel montage ?

B50 La partie amplificatrice est à gauche avec l'ALI et la partie filtre est à droite avec les résistances R et les condensateurs de capacités C .

B51 Ce courant correspond au courant de polarisation de la borne non inverseuse de l'ALI, il s'agit donc d'un courant d'intensité i_e nulle dans le cas du modèle de l'ALI idéal.

B52 D'après la loi du condensateur appliquée au premier condensateur

$$i = C \frac{dv_c}{dt} \quad \text{E1.}$$

B53 D'après la loi des noeuds en a

$$i = i_R + i_C + i_e$$

avec i_e et i_C les intensités des courants sortants de A pour aller dans la deuxième résistance et le deuxième condensateur respectivement. En utilisant la loi d'Ohm et la loi du condensateur sur ces deux dipôles, il vient que

$$i = \frac{v_e}{R} + C \frac{dv_e}{dt} \quad \text{E2}$$

i_e étant nul.

B54 Comme l'intensité i_e est nulle on peut considérer la maille constitué de la première résistance, du premier condensateur et de la deuxième résistance (ou le deuxième condensateur). La tension aux bornes de cette maille est v_s , ainsi la loi des mailles donne

$$v_s - v_{R1} - v_c - v_e = 0 \quad ; \quad v_s - Ri - v_c - v_e = 0$$

$$v_s = v_e + Ri + v_c \quad \text{E3.}$$

B55 On dérive la dernière équation pour obtenir quelque chose de similaire à l'expression demandée

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{dv_c}{dt}.$$

D'après E1 $\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i$ ainsi

$$\frac{dv_s}{dt} = \frac{dv_e}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i.$$

Et on peut remplacer i par l'expression E2, soit

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dt} &= \frac{dv_e}{dt} + R \frac{d}{dt} \left(\frac{v_e}{R} + C \frac{dv_e}{dt} \right) + \frac{1}{C} \left(\frac{v_e}{R} + C \frac{dv_e}{dt} \right) \\ &= \frac{dv_e}{dt} + \frac{dv_e}{dt} + RC \frac{d^2 v_e}{dt^2} + \frac{v_e}{RC} + \frac{dv_e}{dt}. \end{aligned}$$

Soit

$$\frac{dv_s}{dt} = RC \frac{d^2 v_e}{dt^2} + 3 \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{RC}.$$

On identifie directement la constante de temps du circuit $\tau = RC$.

B56 La sortie de l'ALI sur la figure 5 est reliée à l'entrée inverseuse, il y a donc rétroaction négative, on peut supposer qu'il fonctionne en régime linéaire, ainsi $\varepsilon = V_+ - V_-$. On peut lire directement la valeur de $V_+ = v_e$. Pour V_- , on utilise la loi des noeuds en terme de potentiels

$$i_1 + i_2 = i_-$$

en considérant les intensités des courants i_1 allant de la masse vers V_- et i_2 allant de la sortie vers V_- . Comme on considère un ALI idéal alors $i_- = 0$, donc

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = 0 \quad ; \quad \frac{V_M - V_-}{R_1} + \frac{v_s - V_-}{R_2} = 0 \quad ; \quad \frac{v_s}{R_2} = V_- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad ; \quad V_- \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{v_s}{R_2} \\ V_- = v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned}$$

En régime linéaire il vient que

$$\varepsilon = V_+ - V_- = 0 \quad ; \quad v_e - v_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0 \quad ; \quad v_s = v_e \frac{R_1 + R_2}{R_1} \quad ; \quad A = \frac{v_s}{v_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}.$$

Il s'agit de l'amplification d'un montage amplificateur non inverseur.

B57 On remplace v_e dans l'expression obtenue à la question 55 à partir de l'expression précédente : $v_e = \frac{1}{A}v_s$, ainsi

$$\begin{aligned} \frac{dv_s}{dt} &= \frac{1}{A} \left(RC \frac{d^2 v_e}{dt^2} + 3 \frac{dv_e}{dt} + \frac{v_e}{RC} \right) \quad ; \quad A \frac{dv_s}{dt} = \tau \frac{d^2 v_s}{dt^2} + 3 \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{\tau} \\ 0 &= \tau \frac{d^2 v_s}{dt^2} + (3 - A) \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{\tau} \quad ; \quad 0 = \tau^2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + \tau (3 - A) \frac{dv_s}{dt} + v_s. \end{aligned}$$

B58 Pour obtenir une oscillation harmonique il faut que le coefficient devant la dérivée temporelle d'ordre 1 s'annule, on obtient alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, soit

$$A = 3.$$

B59 Dans ce cas la fréquence d'oscillation correspondra à la fréquence caractéristique du filtre de Wien soit

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

B60 L'énergie nécessaire pour garantir l'oscillation est fournie par **l'alimentation de l'ALI**.

B61 On voit que le signal $v_e(t)$ contient deux fréquences : f_0 et f_1 , donc **il ne s'agit pas d'un signal sinusoïdal** qui n'en contient qu'une.

B62 Afin de filtrer la fréquence f_1 et de ne garder que la fréquence f_0 on peut faire passer la tension v_e dans un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure f_c sera supérieure à $f_0 = 1 \text{ kHz}$ pour ne pas filtrer cette fréquence, mais inférieure à $f_1 = 10 \text{ kHz}$ pour justement bien filtrer cette fréquence, ainsi on peut prendre

$$f_c = 5 \text{ kHz}.$$

B63 Comme la sortie n'est pas reliée à la borne inverseuse de l'ALI du circuit 1 il n'y a pas de rétroaction négative, il fonctionne donc en régime saturé. La sortie v peut prendre les valeurs $\pm V_{sat}$.

On étudie le circuit 1, d'abord dans le cas où $v = +V_{sat}$ donc $\varepsilon > 0$. On étudie les potentiels des bornes inverseuse et non inverseuse. On voit directement que V_- est reliée à la masse donc $V_- = 0$. Pour V_+ on utilise la loi des noeuds en terme de potentiels avec i_1 l'intensité du courant allant de u vers V_+ et i_2 le courant allant de v à V_+ , ainsi

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 = i_+ & \quad ; \quad \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = 0 \quad \text{car } i_+ = 0 \text{ pour l'ALI idéal} \\ \frac{u - V_+}{R_1} + \frac{v - V_+}{R_2} = 0 & \quad ; \quad \frac{u}{R_1} + \frac{v}{R_2} = V_+ \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \\ V_+ \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} = \frac{u R_2 + v R_1}{R_1 R_2} & \quad ; \quad V_+ = \frac{u R_2 + v R_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned}$$

Ainsi il vient que $\varepsilon = V_+ - V_- > 0$ car on est en saturation haute $v = V_{sat}$, ainsi

$$\begin{aligned} \frac{u R_2 + v R_1}{R_1 + R_2} - 0 > 0 & \quad ; \quad \frac{u R_2 + V_{sat} R_1}{R_1 + R_2} - 0 > 0 \\ u > -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}. \end{aligned}$$

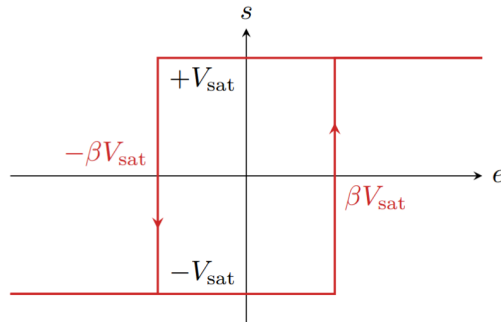
Le circuit 1 fonctionne en saturation haute si $u > -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$. La tension de sortie bascule de la saturation haute $+V_{sat}$ à la saturation basse $-V_{sat}$ pour $u = u_{seuil1} = -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

Bonus : pour la saturation basse $v = -V_{sat}$, l'étude est la même, mais dans ce cas $\varepsilon = V_+ - V_- < 0$, ainsi

$$\begin{aligned} \frac{u R_2 + v R_1}{R_1 + R_2} - 0 < 0 & \quad ; \quad \frac{u R_2 - V_{sat} R_1}{R_1 + R_2} - 0 < 0 \\ u < \frac{R_1}{R_2} V_{sat}. \end{aligned}$$

La tension seuil de basculement de l'état bas à haut est bien $u_{seuil2} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat} = -u_{seuil1}$, ce qui n'était pas demandé de montrer.

B64 Le tracé est donné ci-dessous avec $\beta = \frac{R_1}{R_2}$, $e \equiv u$ et $s \equiv v$.



B65 D'après la relation 9, il vient que

$$\frac{du}{dt} = -\frac{v}{RC} \quad ; \quad du = -\frac{v}{RC} dt \quad ; \quad u(t) - u(t_0) = -\int_{t_0}^t \frac{v}{RC} dt$$

avec t_0 l'instant de début de saturation haute. Si $v = +V_{sat}$ alors

$$u(t) = u(t_0) - \frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_0).$$

Au début de la saturation haute $u(t_0) = u_{seuil1} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$, donc

$$u(t) = \frac{R_1}{R_2} V_{sat} - \frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_0).$$

Il s'agit d'une fonction affine en t de pente négative $-\frac{1}{RC} V_{sat}$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$.

B66 On voit sur la figure que la période T de la tension u correspond à la durée de la saturation haute plus la durée de la saturation basse. Cherchons ces durées.

À partir de la dernière expression, on peut obtenir la durée $t_0 - t_1$, avec t_0 le début de la saturation haute et t_1 le début de la saturation basse. Lorsque'on arrive à la saturation basse on sait que $u(t_1) = u_{seuil2} = -\frac{R_1}{R_2} V_{sat}$, ainsi il vient que

$$u(t_1) = -\frac{R_1}{R_2} V_{sat} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat} - \frac{1}{RC} V_{sat} (t_1 - t_0) \quad ; \quad 2\frac{R_1}{R_2} V_{sat} = \frac{1}{RC} V_{sat} (t_1 - t_0)$$

$$t_1 - t_0 = 2RC \frac{R_1}{R_2}.$$

À la saturation basse, $v = -V_{sat}$, donc la nouvelle loi temporelle de u est

$$u(t) = u(t_1) + \frac{1}{RC} V_{sat} (t - t_1).$$

La saturation basse finit à t_2 lorsque $u(t_2) = u_{seuil2} = \frac{R_1}{R_2} V_{sat}$, ainsi il vient que

$$u(t_2) = u(t_1) + \frac{1}{RC} V_{sat} (t_2 - t_1) \quad ; \quad \frac{R_1}{R_2} V_{sat} = -\frac{R_1}{R_2} V_{sat} + \frac{1}{RC} V_{sat} (t_2 - t_1)$$

$$2\frac{R_1}{R_2} V_{sat} = \frac{1}{RC} V_{sat} (t_2 - t_1) \quad ; \quad t_2 - t_1 = 2RC \frac{R_1}{R_2}.$$

La période de la tension u est donc $t_1 - t_0 + (t_2 - t_1) = 4RC \frac{R_1}{R_2}$, et donc la fréquence f est

$$f = \frac{R_2}{4R_1 RC}.$$

B67 Afin d'obtenir une tension de u avec un maximum égal à $V_{max} = 2 \text{ V}$ il faut que $u_{seuil} = V_{max}$ soit

$$\frac{R_1}{R_2} V_{sat} = V_{max} \quad ; \quad R_1 = R_2 \frac{V_{max}}{V_{sat}}.$$

A.N. $R_1 = 1000 \, \Omega \times \frac{2 \text{ V}}{15 \text{ V}} \simeq 132 \, \Omega.$

Afin d'obtenir une fréquence f de 1 kHz il faut

$$\frac{R_2}{4R_1RC} = f \quad ; \quad C = \frac{R_2}{4R_1Rf}.$$

A.N. $C = \frac{1000 \, \Omega}{4 \times 132 \, \Omega \times 1000 \, \Omega \times 1000 \text{ Hz}} \simeq 2 \, \mu\text{F}.$

B68 La vitesse de balayage ou *slew rate* de l'ALI peut limiter la fréquence de fonctionnement d'un tel montage : l'ALI ne peut pas faire varier la tension aussi rapidement que souhaité (de l'ordre de quelques $\text{V} \cdot \mu\text{s}^{-1}$).

Partie B

III – Multiplicateur numérique à modulation d'amplitude

Il s'agit ici d'étudier un montage dont le schéma est donné figure 11, destiné à calculer le produit d'une tension $u(t)$ et d'une intensité $i(t)$.

Le signal $u(t)$ est échantillonné selon une période d'échantillonnage T_e , ce qui renvoie la suite de valeurs :

$$\{u_n = u(nT_e)\}, n \in \mathbb{N}$$

On note $u_{\text{ech}}(t)$ le signal échantillonné, c'est-à-dire le signal tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [nT_e, (n+1)T_e], u_{\text{ech}}(t) = u_n.$$

Q26. On considère que le spectre du signal $u(t)$ est contenu dans l'intervalle de fréquence $[0, F]$. Rappeler la condition dite de Nyquist-Shannon permettant un échantillonnage satisfaisant de ce signal.

Un oscillateur OSC crée une tension périodique $s_r(t)$ en rampe, de période T_e , variant entre les tensions $-U_0$ et $+U_0$ (figure 12a) telle que $\forall t, |u(t)| < U_0$. Cet oscillateur synchronise les deux échantillonneurs ECHT en imposant les intervalles d'échantillonnage $[nT_e, (n+1)T_e]$.

Le signal $s_r(t)$ est comparé au signal $u(t)$ grâce à un comparateur simple dont le signal de sortie est noté $S(t)$ (figure 12b). Les ALI du montage sont idéaux. Les tensions de saturation sont notées $\pm V_{\text{sat}}$.

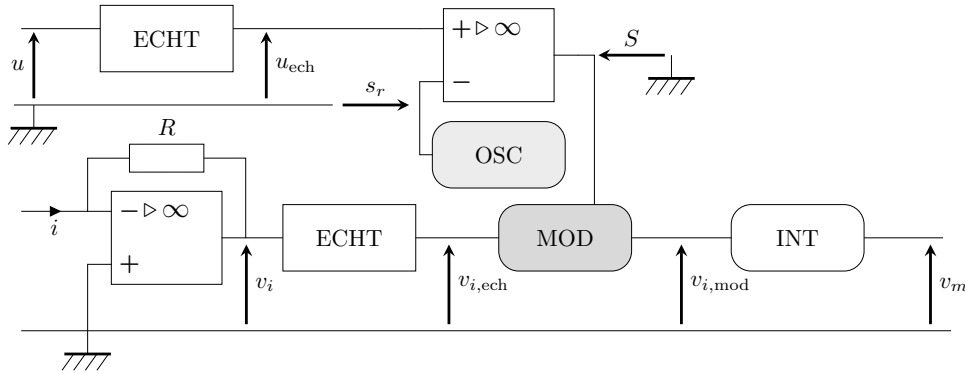


Figure 11 – Montage multiplicateur numérique. (ECHT désigne un échantillonneur, MOD le modulateur, INT l'intégrateur et OSC l'oscillateur.) L'oscillateur synchronise les deux échantillonneurs mais les contacts entre ces circuits ne sont pas représentés.

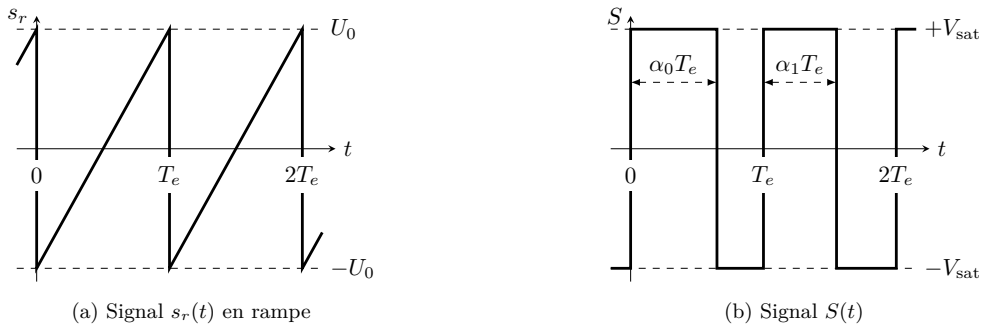


Figure 12 – Signaux

Q27. On a représenté figure 12b le signal $S(t)$ sur les deux premiers intervalles de temps $n = 0$ et $n = 1$. Pour chaque intervalle de temps $[nT_e, (n+1)T_e]$, la durée pour laquelle $S(t) > 0$ est notée $\alpha_n T_e$ où α_n est le rapport cyclique. Exprimer α_n en fonction de u_n et U_0 .

L'intensité $i(t)$ est appliquée à la seconde entrée du montage de la figure 11.

Q28. Exprimer la tension $v_i(t)$ en fonction de $i(t)$ et R . Quel est l'intérêt de ce montage ?

La tension $v_i(t)$ est elle aussi échantillonnée selon les mêmes paramètres que la tension $u(t)$; on obtient en sortie de l'échantillonneur la tension $v_{i,\text{ech}}(t)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [nT_e, (n+1)T_e], v_{i,\text{ech}}(t) = v_{i,n} = v_i(nT_e).$$

Le modulateur, schématisé figure 13, reçoit en entrée $v_{i,\text{ech}}$. L'interrupteur K , idéal, est commandé à l'ouverture et à la fermeture par le signal S :

$$K \begin{cases} \text{fermé si } S(t) > 0, \\ \text{ouvert si } S(t) < 0. \end{cases}$$

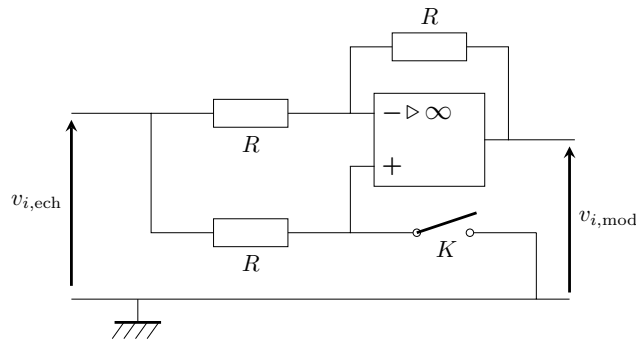


Figure 13 – Modulateur

Q29. Le signal de sortie du modulateur est noté $v_{i,mod}$. Exprimer $v_{i,mod}$ en fonction de $v_{i,ech}$ selon la valeur du signal de commande S .

La tension $v_{i,mod}(t)$ est ensuite intégrée sur un intervalle de longueur T_e .

Q30. Proposer le schéma d'un montage actif intégrant un signal d'entrée $v_e(t)$ par rapport au temps. Donner l'expression de la tension de sortie en fonction de la tension d'entrée.

Soit $v_{i,mod}(t)$ le signal d'entrée de l'intégrateur. Celui-ci fournit en sortie la tension

$$v_m(t) = -\frac{1}{\tau} \int_{nT_e}^t v_{i,mod}(u) du, \text{ pour } t \in [nT_e, (n+1)T_e].$$

τ est une constante caractéristique de l'intégrateur, homogène à un temps.

Q31. Exprimer $v_{m,n} = v_m((n+1)T_e)$ en fonction de u_n , $i_n = i(nT_e)$ et des différentes constantes du montage. Montrer que l'on a bien obtenu le résultat voulu à une constante multiplicative près.

Le signal périodique nécessaire au fonctionnement du circuit est généré par un oscillateur. On étudie ici un oscillateur dit « à réseau déphaseur », à trois cellules RC (figure 14).

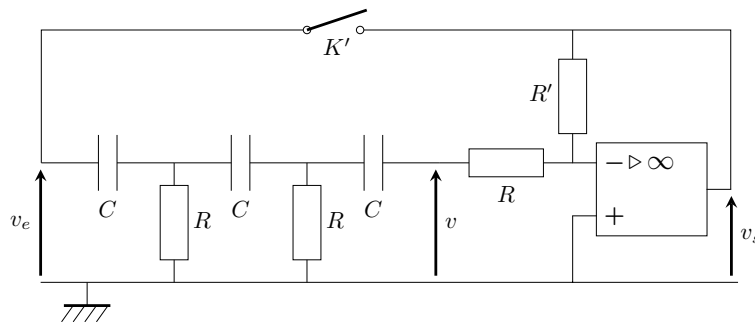


Figure 14 – Oscillateur à réseau déphaseur

La fonction de transfert des trois cellules RC est donnée par :

$$\underline{H} = \frac{v}{v_e} = \frac{1}{1 - \frac{5}{(RC\omega)^2} + \frac{1}{jRC\omega} \left(6 - \frac{1}{(RC\omega)^2} \right)}.$$

Q32. Préciser la nature de ce filtre.

Q33. Exprimer le gain $G = \frac{v_s}{v}$ de l'amplificateur. Quand l'interrupteur K' est fermé, montrer que la tension v_s peut être sinusoïdale si G et $\underline{H}$ vérifient une condition que l'on précisera. En déduire l'expression de la pulsation ω_{osc} du signal v_s ainsi que la valeur numérique de G .

On pose $v_s = A_{\text{osc}} \cos(\omega_{\text{osc}} t + \varphi_{\text{osc}})$. Dans le circuit présenté figure 14, aucun paramètre ne permet de contrôler l'amplitude A_{osc} . Pour pallier ce problème, la résistance R' est remplacée par une résistance R_{com} commandée en tension selon l'une des deux expressions suivantes :

$$1) R_{\text{com}} = R_0 + \frac{r}{1 + \frac{A_{\text{osc}}}{V_0}} \quad 2) R_{\text{com}} = R_0 - \frac{r}{1 + \frac{A_{\text{osc}}}{V_0}},$$

où R_0 , r et V_0 sont des constantes positives caractéristiques de la résistance commandée.

Q34. Quelle est l'expression de R_{com} qui permet de stabiliser les oscillations, et pourquoi ? En particulier, quelle valeur faut-il donner à r pour obtenir $A_{\text{osc}} = 7 \text{ V}$? On prendra $R = 5 \text{ k}\Omega$, $R_0 = 125 \text{ k}\Omega$ et $V_0 = 5 \text{ V}$.

- C26 D'après le critère de Nyquist-Shannon, pour échantillonner correctement un signal dont le spectre est contenu dans l'intervalle $[0, F]$, il faut que la fréquence d'échantillonnage f_e soit strictement supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans le signal, soit

$$f_e > 2F.$$

Comme $f_e = \frac{1}{T_e}$, on peut également écrire

$$T_e < \frac{1}{2F}.$$

- C27 Sur chaque intervalle $[nT_e, (n+1)T_e]$, la tension u_{ech} est constante et vaut u_n . La tension s_r est une rampe variant linéairement entre $-U_0$ et $+U_0$ pendant une durée T_e . Sur l'intervalle considéré, on peut donc écrire

$$s_r(t) = -U_0 + \frac{2U_0}{T_e}(t - nT_e).$$

Le comparateur bascule lorsque $s_r(t) = u_n$. D'après la figure 12b, la durée pendant laquelle $S(t) > 0$ est $\alpha_n T_e$, le basculement a donc lieu pour $t - nT_e = \alpha_n T_e$. Ainsi

$$\begin{aligned} u_n &= -U_0 + \frac{2U_0}{T_e} \alpha_n T_e \\ &= -U_0 + 2U_0 \alpha_n, \end{aligned}$$

soit

$$u_n + U_0 = 2U_0 \alpha_n$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u_n}{U_0} \right).$$

Comme $|u_n| < U_0$, on vérifie bien que $0 < \alpha_n < 1$.

- C28 L'ALI est monté avec une rétroaction négative par l'intermédiaire de la résistance R , il fonctionne donc en régime linéaire. Pour un ALI idéal il vient que

$$V_- = V_+ = 0.$$

De plus le courant entrant dans la borne inverseuse est nul. En appliquant une loi des nœuds à l'entrée inverseuse, il vient que

$$i + \frac{v_i}{R} = 0,$$

soit

$$v_i(t) = -Ri(t).$$

Ce montage permet donc de convertir l'intensité $i(t)$ en une tension $v_i(t)$ qui lui est proportionnelle. Il s'agit d'un convertisseur courant-tension.

- C29 Lorsque $S(t) > 0$, l'interrupteur est fermé donc $V_+ = 0$. L'ALI fonctionne en régime linéaire à gain infini donc $\varepsilon = 0$ soit $V_+ = V_-$. On exprime V_- à l'aide de la loi des nœuds en terme de potentiels, il vient que

$$\frac{v_{i,ech} - V_-}{R} = \frac{V_- - v_{i,mod}}{R} \quad \text{soit} \quad 2V_- = v_{i,ech} + v_{i,mod}.$$

Comme $0 = V_+ = V_-$ alors

$$v_{i,\text{mod}} = -v_{i,\text{ech}}$$

Lorsque $S(t) < 0$, l'interrupteur est ouvert donc la tension au niveau de la résistance reliée à la borne non-inverseuse est $u_R = Ri_+ = v_{i,\text{ech}} - V_+$. Comme L'ALI est idéal $i_+ = 0$, ainsi $V_+ = v_{i,\text{ech}}$. l'expression de V_- reste la même $2V_- = v_{i,\text{ech}} + v_{i,\text{mod}}$. Comme $V_+ = V_-$ alors

$$2v_{i,\text{ech}} = v_{i,\text{ech}} + v_{i,\text{mod}} \quad \text{soit}$$

$$v_{i,\text{mod}} = v_{i,\text{ech}}$$

- C30 Un montage intégrateur actif est constitué d'un ALI en montage inverseur, avec une résistance R à l'entrée $e(t)$ et un condensateur C dans la boucle de rétroaction. La borne non-inverseuse est reliée à la masse, ainsi $V_+ = 0$. On exprime V_- à partir de la loi des nœuds en terme de potentiels

$$i_1 = i_2 + i_- \quad ; \quad \frac{u_R}{R} = \frac{u_C}{Z_C} \quad ; \quad \frac{e - V_-}{R} = (V_- - \underline{s}) j\omega C$$

$$V_- = \frac{e + j\omega RC \underline{s}}{1 + j\omega RC}$$

car $i_- = 0$, l'ALI étant idéal. En régime linéaire pour un ALI à gain infini, il vient que $\varepsilon = 0$, soit $V_+ = V_-$, ainsi

$$0 = \frac{e + j\omega RC \underline{s}}{1 + j\omega RC} \quad ; \quad \underline{s} = -\frac{1}{RC} \frac{1}{j\omega} e.$$

Après intégration entre t_0 et t , on obtient

$$s(t) = s(t_0) - \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t e(u) du$$

La constante caractéristique de l'intégrateur est donc $\tau = RC$.

- C31 Sur l'intervalle $[nT_e, (n+1)T_e]$, la tension $v_{i,\text{ech}}$ est constante et vaut $v_{i,n}$. D'après la question précédente sur le convertisseur courant-tension,

$$v_{i,n} = -Ri_n$$

avec $i_n = i(nT_e)$.

Pendant une durée $\alpha_n T_e$, on a $S > 0$ et donc $v_{i,\text{mod}} = v_{i,n}$. Pendant la durée restante $(1 - \alpha_n)T_e$, on a $S < 0$ et donc $v_{i,\text{mod}} = -v_{i,n}$.

La sortie de l'intégrateur à la fin de l'intervalle vaut

$$v_{m,n} = -\frac{1}{\tau} \int_{nT_e}^{(n+1)T_e} v_{i,\text{mod}}(u) du.$$

On sépare l'intégrale sur les deux états du modulateur

$$v_{m,n} = -\frac{1}{\tau} \left(\int_{nT_e}^{nT_e + \alpha_n T_e} v_{i,\text{mod}}(u) du + \int_{nT_e + \alpha_n T_e}^{(n+1)T_e} v_{i,\text{mod}}(u) du \right)$$

$$v_{m,n} = -\frac{1}{\tau} \left(- \int_{nT_e}^{nT_e + \alpha_n T_e} v_{i,\text{ech}}(u) du + \int_{nT_e + \alpha_n T_e}^{(n+1)T_e} v_{i,\text{ech}}(u) du \right)$$

car entre nT_e et $nT_e + \alpha_n T_e$, $S > 0$ donc $v_{i,\text{mod}} = -v_{i,\text{ech}}$, et entre $nT_e + \alpha_n T_e$ et $(n+1)T_e$, $S < 0$ donc $v_{i,\text{mod}} = v_{i,\text{ech}}$. De plus, on sait que $v_{i,\text{ech}} = -Ri_n$, ainsi

$$v_{m,n} = \frac{Ri_n}{\tau} \left(- \int_{nT_e}^{nT_e + \alpha_n T_e} du + \int_{nT_e + \alpha_n T_e}^{(n+1)T_e} du \right) = \frac{Ri_n}{\tau} (-(nT_e + \alpha_n T_e) + nT_e + (n+1)T_e - (nT_e + \alpha_n T_e))$$

$$v_{m,n} = -\frac{Ri_n}{\tau} T_e (2\alpha_n - 1).$$

Or, on a montré que $\alpha_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{u_n}{U_0} \right)$, donc

$$v_{m,n} = -\frac{Ri_n}{\tau} T_e (2\alpha_n - 1)$$

Finalement

$$v_{m,n} = -\frac{Ru_n i_n T_e}{\tau U_0}.$$

La tension obtenue est donc bien proportionnelle au produit $u_n i_n$, avec comme constante multiplicative

$$K = -\frac{RT_e}{\tau U_0}.$$

C32 La fonction de transfert des trois cellules RC est

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - \frac{5}{(RC\omega)^2} + \frac{1}{jRC\omega} \left(6 - \frac{1}{(RC\omega)^2} \right)}.$$

À basse fréquence, lorsque $\omega \rightarrow 0$, le module de $\underline{H}$ tend vers zéro

$$\underline{H} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0.$$

À haute fréquence, lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, il vient que

$$\underline{H} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 1.$$

Le filtre atténue donc les basses fréquences et laisse passer les hautes fréquences. Il s'agit donc d'un

filtre passe-haut d'ordre 3.

C33 Sur le bloc de droite, on considère que l'ALI est en régime linéaire car la sortie est reliée à l'entrée inverseuse. On voit que $V_+ = 0$. On exprime V_- à partir de la loi des nœuds en terme de potentiels

$$\begin{aligned} i_1 = i_2 + i_- \quad ; \quad \frac{u_R}{R} = \frac{u_{R'}}{R'} \quad ; \quad \frac{v - V_-}{R} = \frac{V_- - v_s}{R'} \\ V_- \frac{R + R'}{RR'} = \frac{v}{R} + \frac{v_s}{R'} \quad ; \quad V_- = v \frac{R'}{R + R'} + v_s \frac{R}{R + R'} \end{aligned}$$

avec $i_- = 0$, l'ALI étant idéal. Dans le cas de l'ALI à gain infini en régime linéaire, il vient que $\varepsilon = V_+ - V_- = 0$, soit

$$v \frac{R}{R + R'} + v_s \frac{R}{R + R'} \quad ; \quad v_s = -v \frac{R'}{R}.$$

Ainsi, le gain de l'amplificateur que l'on identifie à un intégrateur inverseur

$$G = \frac{v_s}{v} = -\frac{R'}{R}.$$

Lorsque l'interrupteur K' est fermé, la sortie est réinjectée à l'entrée du filtre : $v_s = v_e$. Il vient donc que

$$\underline{v} = \underline{H} \underline{v_e} \quad ; \quad \frac{\underline{v_s}}{G} = \underline{H} \underline{v_e} \quad ; \quad \frac{\underline{v_s}}{G} = \underline{H} \underline{v_s} \\ \underline{v_s} (1 - G \underline{H}) = 0.$$

Il faut donc que $\boxed{GH = 1}$. Il s'agit de la condition de Barkhausen. Il faut que le gain de l'ensemble soit égal à 1 en module et que son argument soit nul modulo 2π . Comme G est réel négatif, le filtre doit également avoir une fonction de transfert réelle négative à la pulsation d'oscillation. Pour que H soit réelle, il faut annuler le terme imaginaire de son dénominateur

$$\frac{1}{RC\omega} \left(6 - \frac{1}{(RC\omega)^2} \right) = 0.$$

Comme $\omega \neq 0$, il vient que

$$6 - \frac{1}{(RC\omega_{\text{osc}})^2} = 0 \quad ; \quad (RC\omega_{\text{osc}})^2 = \frac{1}{6} \quad ; \quad RC\omega_{\text{osc}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ainsi

$$\boxed{\omega_{\text{osc}} = \frac{1}{RC\sqrt{6}}}.$$

À cette pulsation

$$\frac{1}{(RC\omega_{\text{osc}})^2} = 6 \quad \text{donc} \quad H(\omega_{\text{osc}}) = \frac{1}{1 - 5 \times 6} = -\frac{1}{29}.$$

La condition $GH = 1$ donne alors

$$G \times \left(-\frac{1}{29} \right) = 1,$$

soit

$$\boxed{G = -29}.$$

Comme $G = -R'/R$, il vient également que

$$R' = 29R.$$

- C34 Pour stabiliser l'amplitude des oscillations, il faut que le gain de l'amplificateur diminue lorsque l'amplitude A_{osc} augmente. En effet, si l'amplitude devient trop importante, une diminution du gain permet de réduire l'amplitude des oscillations. Inversement, si l'amplitude diminue, le gain doit augmenter.

Comme

$$|G| = \frac{R_{\text{com}}}{R},$$

il faut donc que R_{com} soit une fonction décroissante de A_{osc} . Parmi les deux expressions proposées, il faut choisir

$$\boxed{R_{\text{com}} = R_0 + \frac{r}{1 + \frac{A_{\text{osc}}}{V_0}}}.$$

À l'amplitude stabilisée, la condition d'oscillation obtenue à la question précédente impose

$$R_{\text{com}} = 29R.$$

Avec $R = 5 \text{ k}\Omega$, il vient que

$$R_{\text{com}} = 29 \times 5 \text{ k}\Omega = 145 \text{ k}\Omega.$$

On souhaite obtenir $A_{\text{osc}} = 7$ V avec $R_0 = 125 \text{ k}\Omega$ et $V_0 = 5$ V. Ainsi

$$145 \text{ k}\Omega = 125 \text{ k}\Omega + \frac{r}{1 + \frac{7}{5}} \quad ; \quad 20 \text{ k}\Omega = \frac{r}{\frac{12}{5}} \quad ; \quad r = 20 \text{ k}\Omega \times \frac{12}{5}.$$

A.N.

$$r = 48 \text{ k}\Omega.$$