

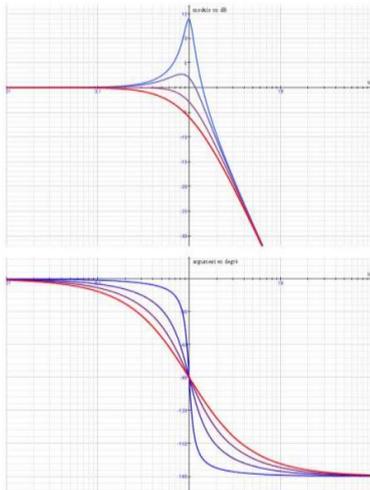
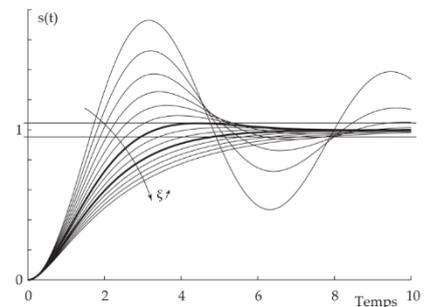
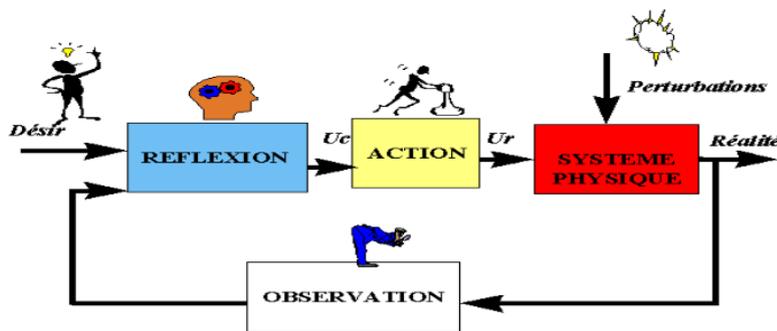
**C1 – Proposer une démarche de résolution**

Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.

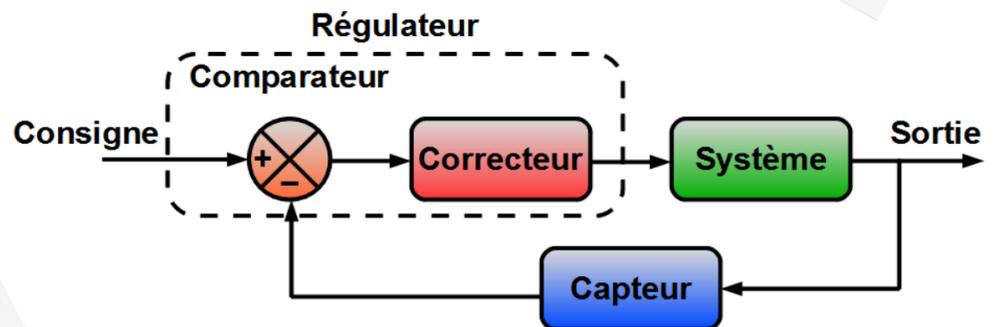
**C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique**

Déterminer les performances d'un système asservi.

## 2ème partie PERFORMANCES D'UN SYSTEME ASSERVI



$$H(p) = \frac{K \prod_i (1 + a_i p)}{p^\alpha \prod_k (1 + \alpha_k p) \prod_j (1 + b_j p + c_j p^2) \prod_l (1 + \beta_l p + \gamma_l p^2)}$$



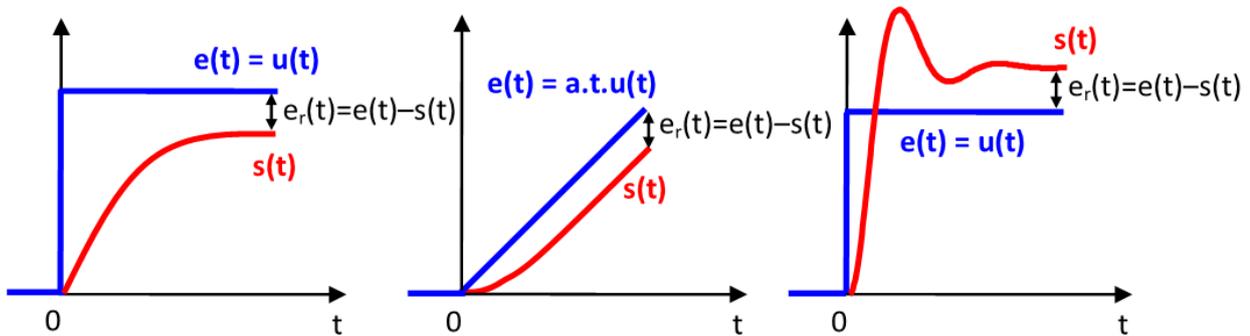
$$H(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{1}{k + \frac{RJ}{k} p + \frac{LJ}{k} p^2}$$

1/ Précision, erreur, écart

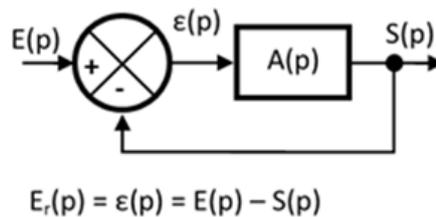
La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur visée.

Elle est caractérisée par l'erreur  $e_r(t)$  entre la consigne en entrée et la valeur asymptotique effectivement atteinte par la grandeur de sortie.

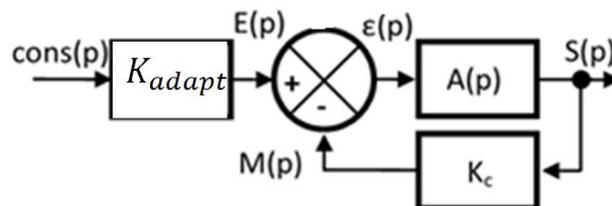
Si l'erreur est nulle, on dit que le système est précis.



Cas du système bouclé à retour unitaire :



Cas du système bouclé à retour **non** unitaire



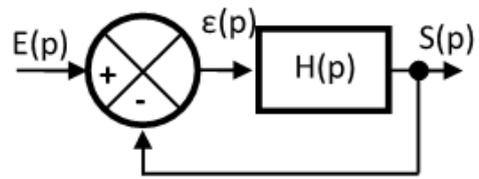


Sachant que tout système peut se ramener à un système à retour unitaire par opérations sur les schémas blocs, nous allons limiter l'étude suivante au cas des systèmes à retour unitaire.

L'objectif pour obtenir un système précis est d'annuler l'erreur en régime permanent ce qui amène à traiter 2 types de problèmes :

- l'entrée varie au cours du temps : minimiser l'erreur  $e_r$  lorsque l'entrée du système varie c'est résoudre un problème de poursuite.
- le système subit des perturbations : minimiser l'erreur  $e_r$  malgré l'existence de ces perturbations c'est résoudre un problème de régulation

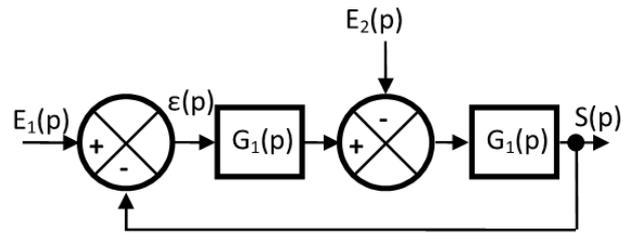
## 2/ Détermination de la précision en problème de poursuite





### 3/ Détermination de la précision en problème de régulation

Prenons le cas d'un système à retour unitaire perturbé par une perturbation  $E_2(p)$



Le théorème de superposition permet d'écrire :

De façon générale, les fonctions de transfert  $G_1(p)$  et  $G_2(p)$  s'écrivent (sous forme canonique):

$$G_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)} \text{ et } G_2(p) = \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \cdot \frac{N_2(p)}{D_2(p)} \text{ où } \lim_{p \rightarrow 0} \frac{N_i(p)}{D_i(p)} = 1 \text{ et } \alpha_i \geq 0.$$

L'écart  $\varepsilon(p)$  s'exprime :

$$\varepsilon(p) = E_1(p) - S(p) = E_1(p) - \frac{G_1(p) \cdot G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot E_1(p) + \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot E_2(p)$$

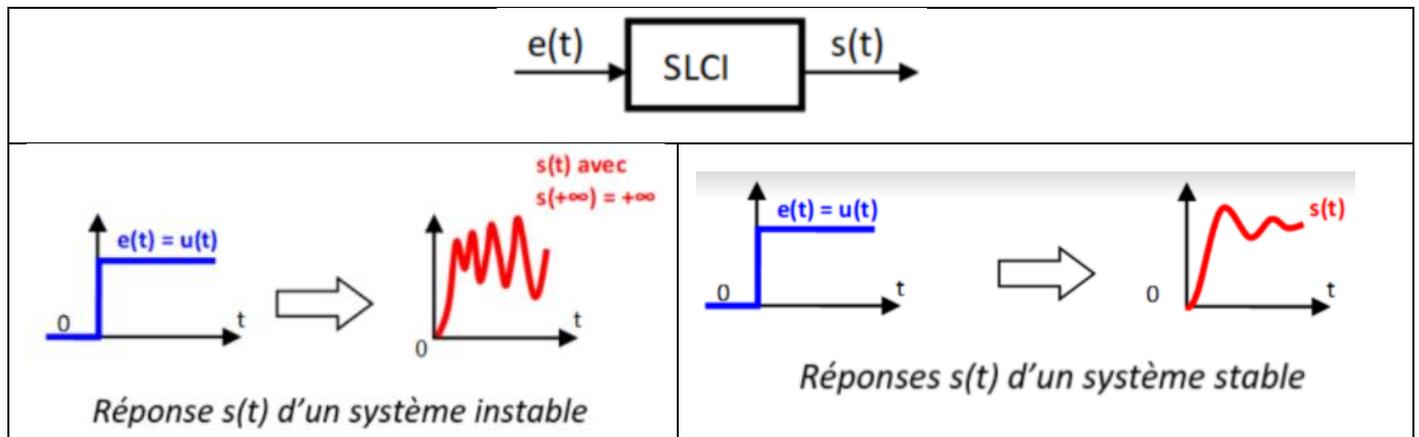
soit :

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot E_1(p) + \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot E_2(p)$$



### 1/ Stabilité : définition adaptée aux SLCI

On dit qu'un système est stable si, écarté de sa position par une cause extérieure, il revient vers cette position lorsque la cause disparaît.



## 2/ Etude de la stabilité à partir de l'étude du polynôme caractéristique de la FTBF

- Pôle de la FTBF

➤ Si les pôles sont tous réels :

$$p_1 = \alpha \Rightarrow s(t) = A e^{\alpha t}$$

**s(t) écartée de 0, ne tend vers 0 que si les pôles sont tous négatifs.**

➤ Si il y a des pôles complexes conjugués deux à deux :

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\omega \Rightarrow s(t) = \underline{A} e^{(\alpha+j\omega)t} + \underline{B} e^{(\alpha-j\omega)t} = C e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

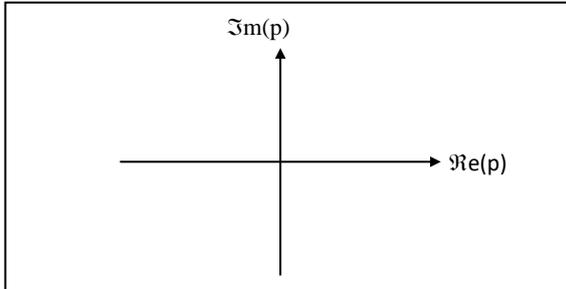
**s(t) écartée de 0, ne tend vers 0 que si  $\alpha < 0$ .**

- **Carte des pôles**

On peut représenter graphiquement les **pôles** (racines du dénominateur)

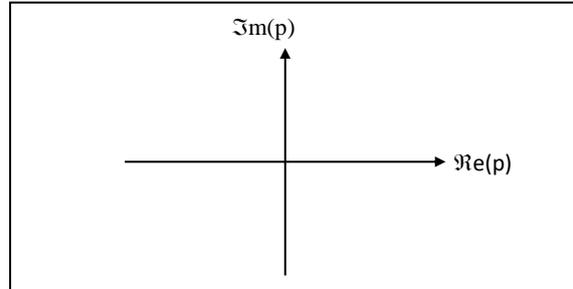
✍ **Placer les pôles des FTBF suivantes et préciser si le système est stable ou non :**

$$H_{BF}(p) = \frac{5(p-3)}{(p+1) \cdot (p+2)}$$



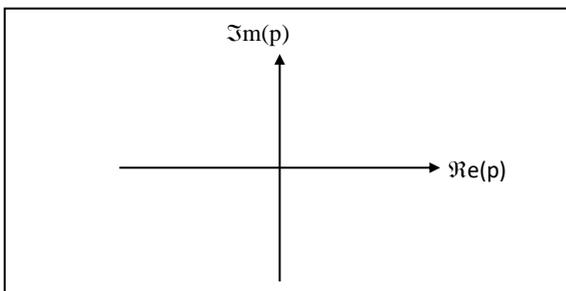
Système .....

$$H_{BF}(p) = \frac{2}{p^2 + p + 1}$$



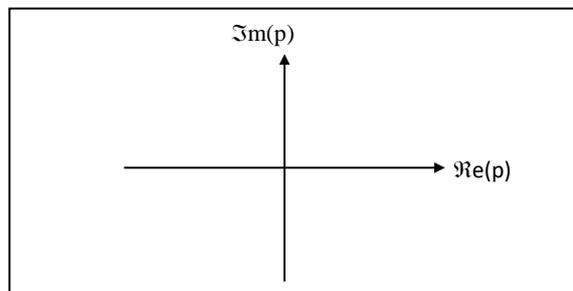
Système .....

$$H_{BF}(p) = \frac{2}{p^2 - 2p + 1}$$



Système .....

$$H_{BF}(p) = \frac{2}{(p-1) \cdot (p^2 + p + 1)}$$

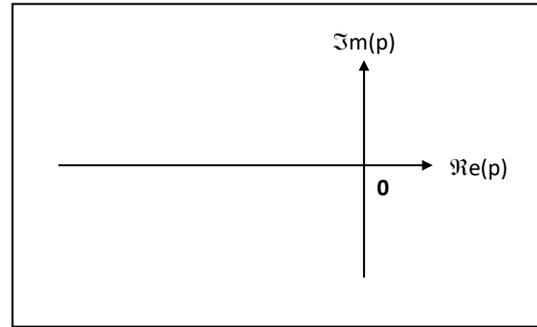


Système .....

- **Allure de la réponse impulsionnelle selon la position des pôles de la FTBF**



$$F(p) = \frac{H_0}{(1+T_1 p) \cdot (1+T_2 p)} \quad \text{avec } T_1 \ll T_2$$



L'allure de la réponse indicielle  $s(t)$  montre que l'on peut négliger la constante de temps la plus faible  $T_1$  ce qui conduit à l'expression simplifiée suivante pour  $H(p)$  :

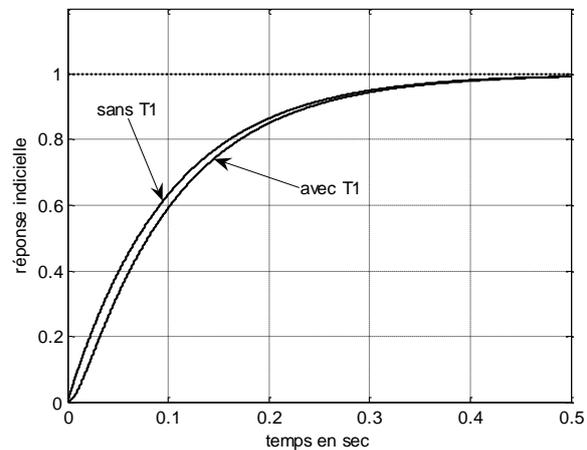
$$F(p) \approx \frac{H_0}{1+T_2 p}$$

En effet, dans l'expression temporelle de  $s(t)$  :

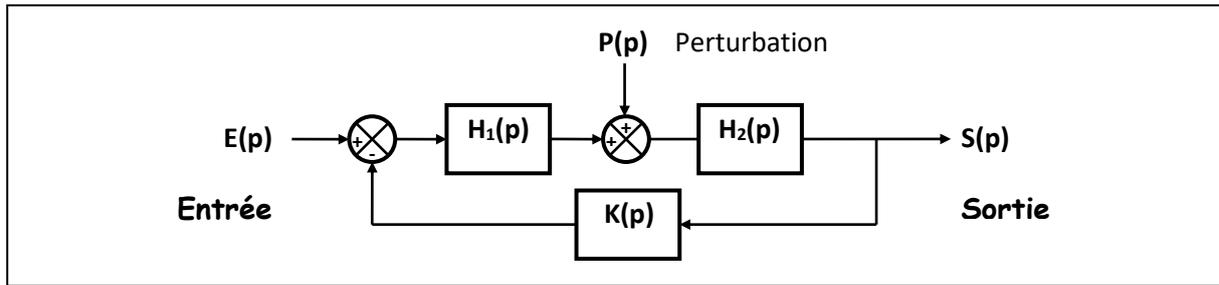
$$s(t) = \frac{H_0 * E_0}{T_1 - T_2} \cdot \left( T_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) - T_2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_2}} \right) \right)$$

Le terme  $e^{-t/T_2}$  correspondant au pôle dominant  $p_2$  devient prépondérant lorsque le temps croît.

Il détermine la dynamique asymptotique du système.



- Systeme perturbe



On montrerait que :  $S(p) = F_1(p) \cdot E(p) + F_2(p) \cdot P(p)$  (principe de superposition)

où :  $F_1(p) = \left( \frac{S(p)}{E(p)} \right)_{P=0} = \frac{H_1(p) H_2(p)}{1 + K(p) H_1(p) H_2(p)}$  et  $F_2(p) = \left( \frac{S(p)}{P(p)} \right)_{E=0} = \frac{H_2(p)}{1 + K(p) H_1(p) H_2(p)}$

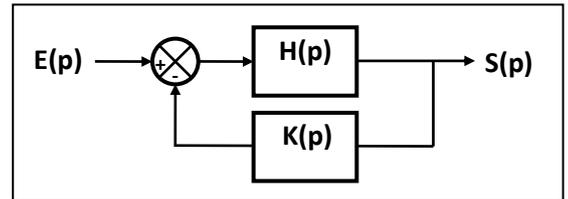
Les deux fonctions de transfert  $F_1(p)$  et  $F_2(p)$  ont le même dénominateur. Ainsi, un système perturbé conserve la même équation caractéristique  $1 + K(p) H_1(p) H_2(p) = 0$  dans le cas de perturbation additive.

### 3/ Méthode d'étude de la stabilité à partir de la FTBO

- Critères graphiques

Dans le cas d'un système asservi représenté par le schéma bloc ci-contre :

$$FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + K(p) H(p)} = \frac{H(p)}{1 + FTBO(p)}$$





Exemple :

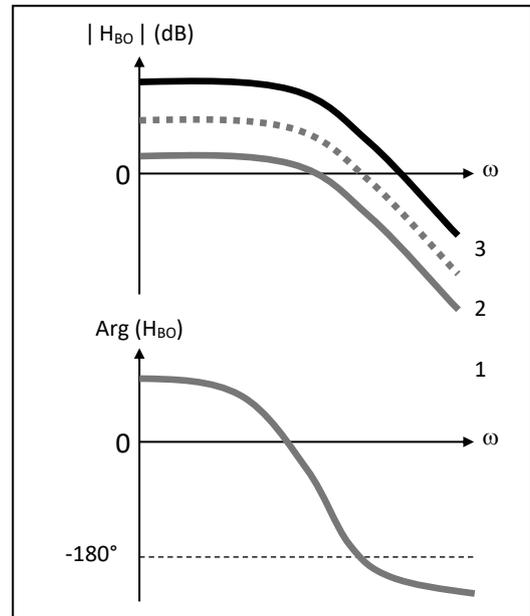
La courbe de phase est la même pour les 3 systèmes.

☒ Définir si le système est stable ou non en BF :

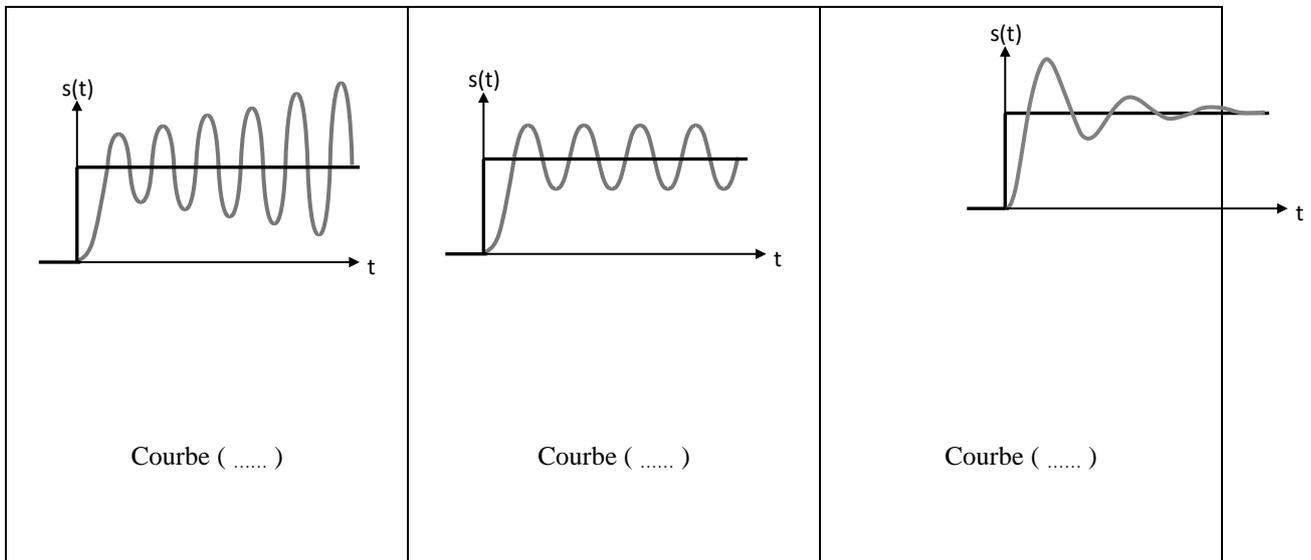
Courbe (1) : .....

Courbe (2) : .....

Courbe (3) : .....



☒ A quelle courbe pourraient correspondre les réponses indicielles suivantes ?



• Marges de stabilité

Si un système est à la limite de la stabilité, la moindre dérive de l'un des paramètres, due à la température en particulier, peut entraîner l'instabilité. Il est donc nécessaire de prévoir des "marges" vis à vis du problème d'instabilité. Elles se traduisent par une "distance de sécurité" entre le lieu de la FTBO et le point critique. On définit principalement :



### Représentation des marges de stabilité

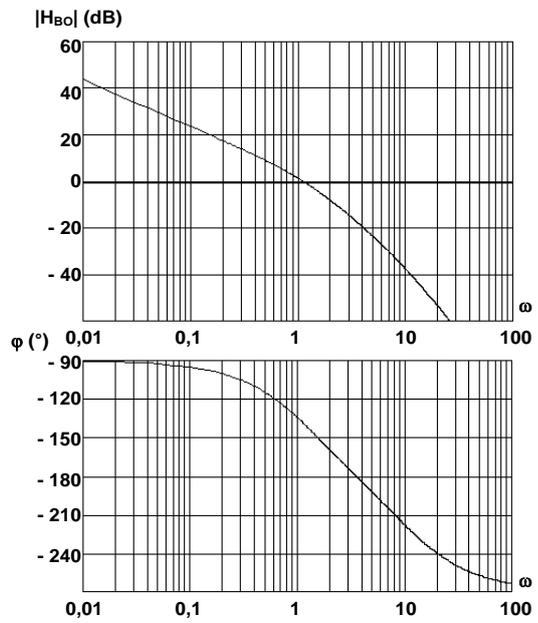
☒ Définir graphiquement  $M_G$  et  $M_\phi$ .

Donner leur valeur.

Système .....

$M_G = \dots\dots\dots$

$M_\phi = \dots\dots\dots$

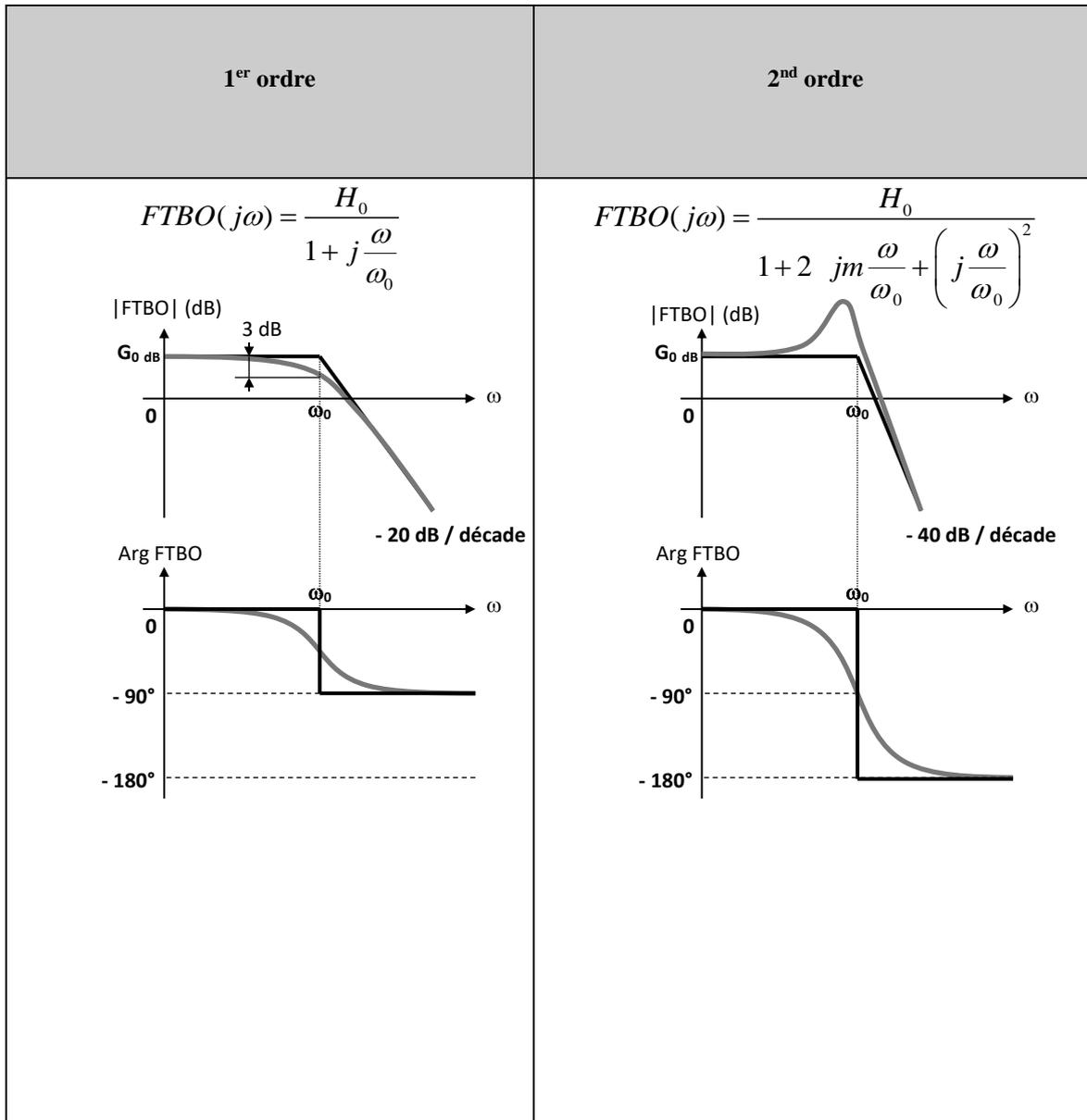


- Conséquences

- ✓ **Systèmes du premier et de second ordre**

N'atteignant jamais  $-180^\circ$  de déphasage, les systèmes du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>nd</sup> ordre respectant les formes canoniques sont intrinsèquement stables après bouclage.

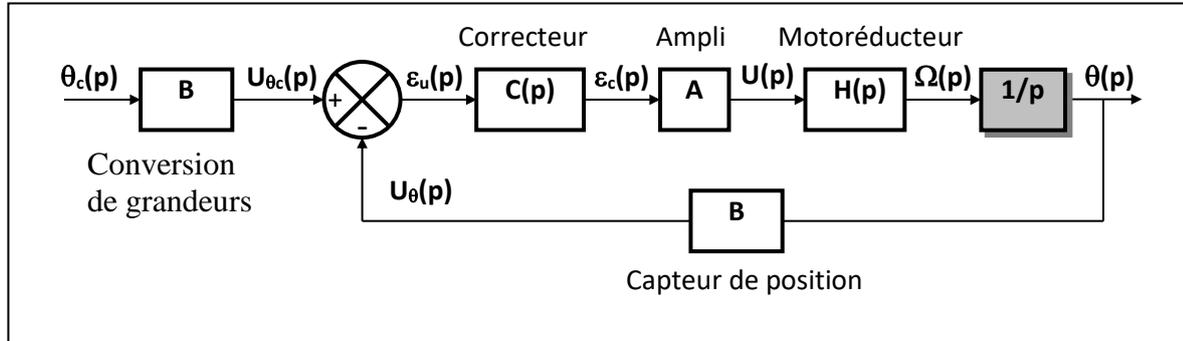
✎ Dans chaque cas, définir graphiquement  $M_G$  et  $M_\phi$ .



✓ **Systèmes avec intégrateur**

La **présence d'un intégrateur** dans une chaîne d'action apporte un déphasage de  $-90^\circ$ , ce qui rapproche le **lieu de la FTBO** du point critique, et donc tend à **déstabiliser le système**.

Exemple : Asservissement de position



Lorsqu'on passe de la vitesse angulaire  $\Omega$  en **rad/s** à la position angulaire  $\theta$  en **rad**, on introduit une **intégration fonctionnelle** dans la chaîne d'action. En effet :

$$\theta(t) = \int \Omega(t) \cdot dt \Rightarrow \theta(p) = \frac{\Omega(p)}{p} \Rightarrow \frac{\theta(p)}{\Omega(p)} = \frac{1}{p}$$

✓ **Système retardé**

Tout retard est **facteur d'instabilité**. En effet, un retard  $T$  dans une évolution temporelle se traduit par un déphasage  $\varphi = -T\omega$  décroissant linéairement avec la pulsation  $\omega$ . Son amplitude est constante et égale à **1** (0 dB).

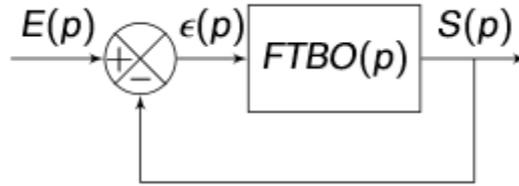
Coche la(les) bonne(s) réponse(s)

- Soit un système asservi, soumis à une perturbation. L'erreur statique sera nulle pour une entrée et une perturbation en échelon si l'intégration dans la FTBO est située après la perturbation.
  - vrai
  - faux
- Soit un système asservi, non soumis à une perturbation. S'il présente au moins une intégration dans la boucle ouverte, alors l'erreur statique en réponse à un échelon est nulle.
  - vrai
  - faux
- Un système est d'autant plus précis que
  - la classe de la FTBO est faible
  - le gain de la FTBO est faible
  - la classe de la FTBO est importante
  - le gain de la FTBO est important
- Soit la fonction de transfert en boucle fermée d'un système est  $(p) = \frac{6}{3+2p}$ . Le temps de réponse à 5% de ce système est :
  - 2 s
  - 6 s
  - 10 s
  - On ne le connaît pas à priori
- Soit la fonction de transfert en boucle fermée d'un système est  $(p) = \frac{6}{1+3p+p^2}$ . Le temps de réponse à 5% de ce système est :
  - 6 s
  - 3 s
  - 15 s
  - On ne le connaît pas à priori
- Un système stable en poursuite ne l'est pas forcément en régulation
  - vrai
  - faux
- Soit un système asservi, non soumis à une perturbation. S'il présente au moins une intégration dans la boucle ouverte, alors l'erreur statique en réponse à un échelon est nulle.
  - vrai
  - faux
- Un SLCI est stable si et seulement si sa fonction de transfert en boucle fermée est telle que :
  - les pôles de cette fonction de transfert sont à partie réelle  $>0$
  - les pôles de cette fonction de transfert sont à partie imaginaire  $<0$
  - les pôles de cette fonction de transfert sont à partie imaginaire  $>0$
  - les pôles de cette fonction de transfert sont à partie réelle  $<0$
- Soient plusieurs systèmes asservis modélisables par les fonctions de transfert en boucle fermée suivantes. Statuer sur la stabilité des ces systèmes en justifiant :

FTBF	Stable ? Oui ou Non et <b>POURQUOI</b>
$H(p) = \frac{1}{1 + 2p + 2p^2}$	
$H(p) = \frac{3}{p + 1}$	

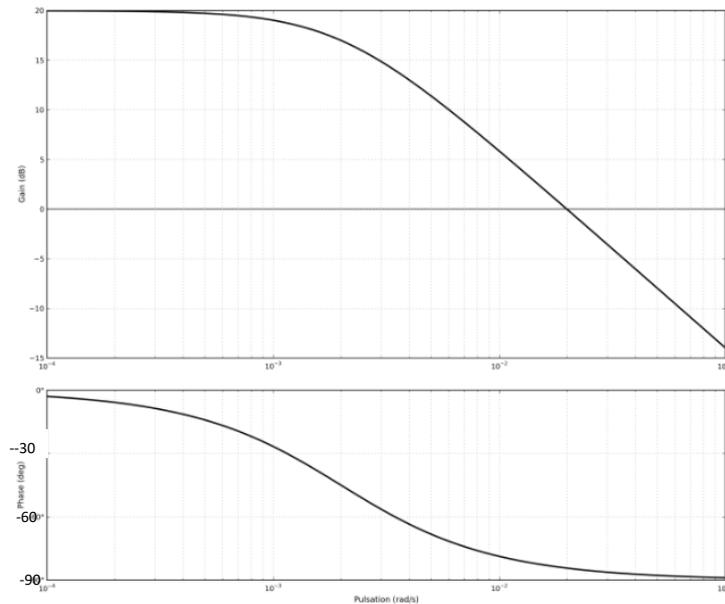
$H(p) = \frac{7}{(p+1) * (p-3)}$	
$H(p) = \frac{7}{(p+1) * (p^2 + 4p - 1)}$	

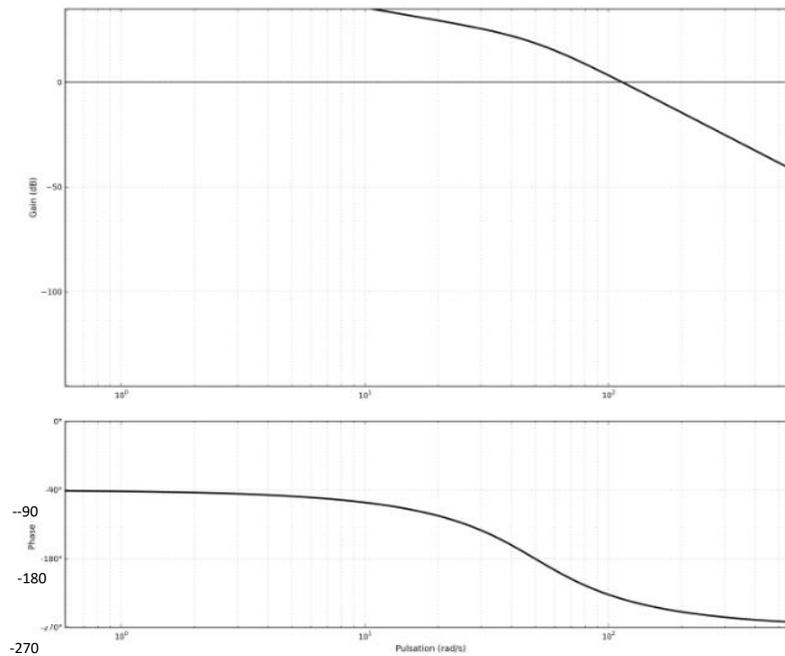
10. Soient plusieurs systèmes asservis modélisables par les fonctions de transfert en boucle ouverte suivantes. Statuer sur la stabilité de ces systèmes en justifiant:



FTBO	Stable ? Oui ou Non et <b>POURQUOI</b>
$H(p) = \frac{3}{p+1}$	
$H(p) = \frac{3}{p}$	
$H(p) = \frac{1}{1 + 0,5p + p^2}$	

11. Voici les diagrammes de Bode des FTBO de différents systèmes asservis. Statuer sur la stabilité de ces systèmes ::





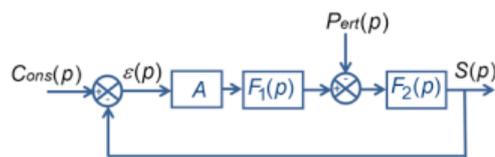
12. On peut approcher la fonction de transfert  $H(p) = \frac{10}{(p+500).(p+3)}$  par :

- $H_1(p) = \frac{10}{(p+500)}$   
  $H_2(p) = \frac{10}{(p+3)}$

13. Le temps de réponse à 5% d'une FTBF d'ordre 3 présentant les pôles  $p_1 = -2$ ,  $p_2 = -22 + 5j$ ,  $p_3 = -22 - 5j$  est d'environ 1.5s car  $-2$  est le pôle dominant

- vrai  
 faux

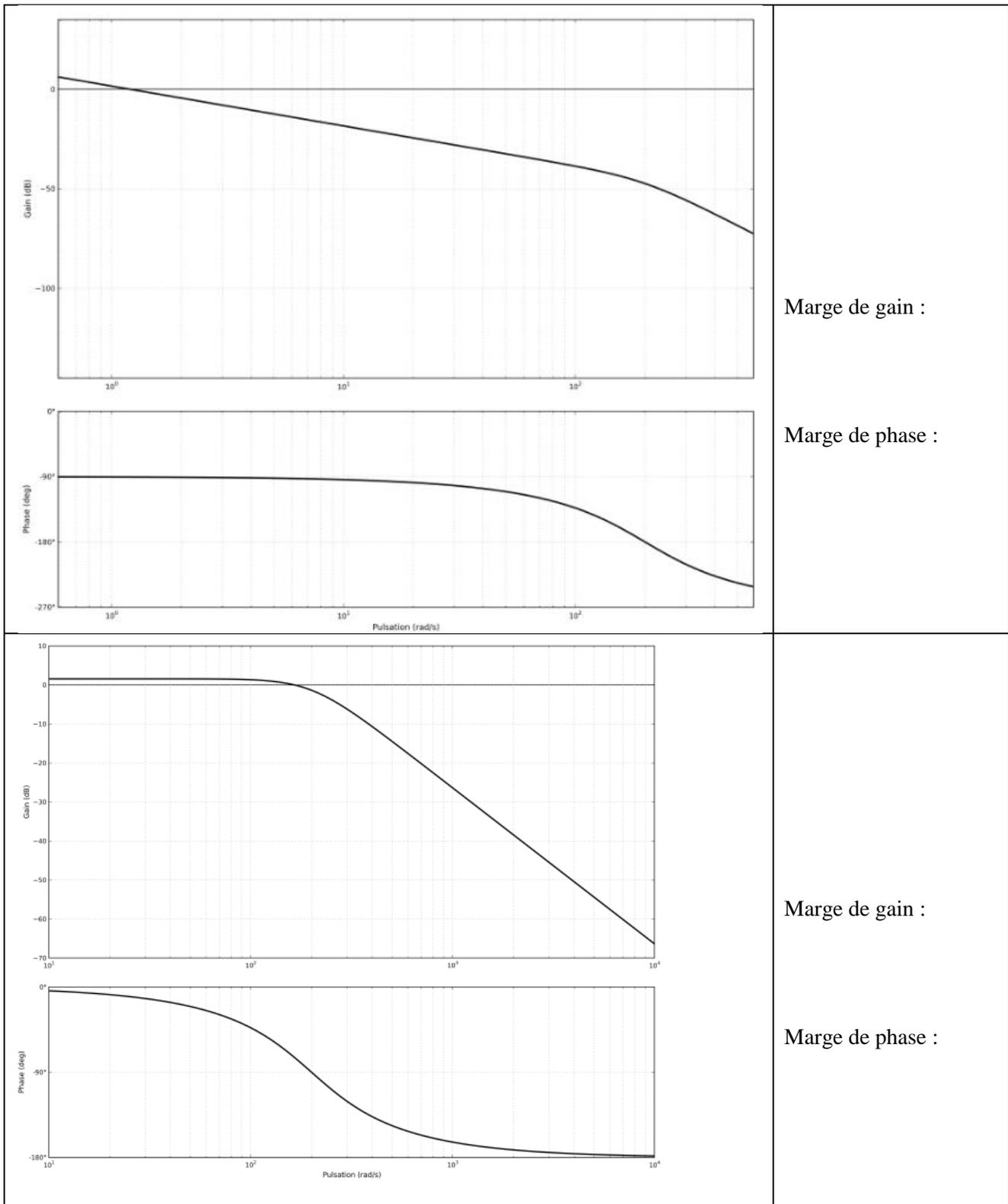
14. Soit le système asservi représenté par le schéma bloc ci-dessous :



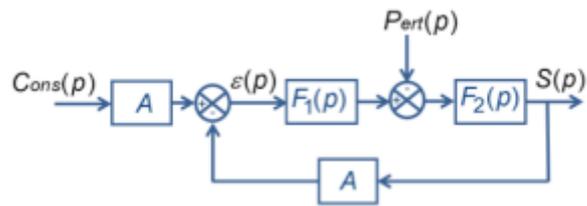
En régulation ( $Cons(p) = 0$ ), conclure, sans calcul, sur l'erreur de position si le système est soumis à un échelon de perturbation dans les cas suivant :

Cas 1 : $F_1(p) = \frac{4}{3+2p}$ et $F_2(p) = \frac{1}{p.(1+p)}$	<input type="checkbox"/> Erreur de position = 0	<input type="checkbox"/> Erreur de position $\neq 0$
Cas 2 : $F_1(p) = \frac{1}{0.1p^2+p+1}$ et $F_2(p) = \frac{1}{(1+p)}$	<input type="checkbox"/> Erreur de position = 0	<input type="checkbox"/> Erreur de position $\neq 0$
Cas 3 : $F_1(p) = \frac{1}{0.1p^2+p+1}$ et $F_2(p) = \frac{1}{(1+p)}$	<input type="checkbox"/> Erreur de position = 0	<input type="checkbox"/> Erreur de position $\neq 0$
Cas 4 : $F_1(p) = \frac{1}{0.1p^2+p}$ et $F_2(p) = \frac{1}{(1+p)}$	<input type="checkbox"/> Erreur de position = 0	<input type="checkbox"/> Erreur de position $\neq 0$
Cas 5 : $F_1(p) = \frac{1}{0.1p^2+p}$ et $F_2(p) = \frac{1}{p(1+p)}$	<input type="checkbox"/> Erreur de position = 0	<input type="checkbox"/> Erreur de position $\neq 0$
Cas 6 : $F_1(p) = \frac{3}{1+p}$ et $F_2(p) = \frac{1}{2+3p}$	<input type="checkbox"/> Erreur de position = 0	<input type="checkbox"/> Erreur de position $\neq 0$

15. Voici les diagrammes de Bode des FTBO de différents systèmes asservis. Mettre en évidence et estimer la marge de phase et la marge de gain



16. Donner l'expression de l'erreur correspondant au schéma bloc ci-dessous:



- $e_r(t) = \frac{\varepsilon(t)}{A}$
- $e_r(t) = \text{cons}(t) - \frac{s(t)}{A}$
- $e_r(t) = \frac{\text{cons}(t)}{A} - s(t)$
- $e_r(t) = \varepsilon(t)$
- $e_r(t) = A \cdot \varepsilon(t)$