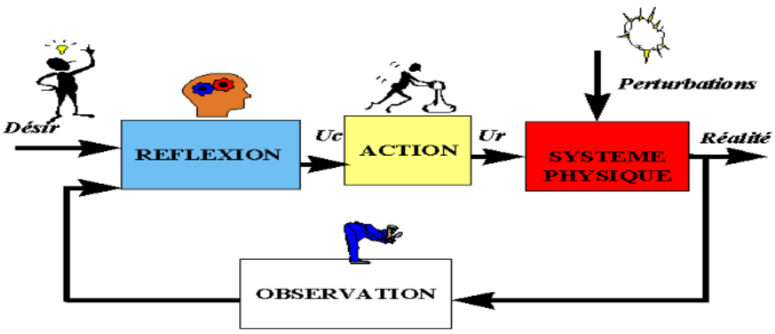
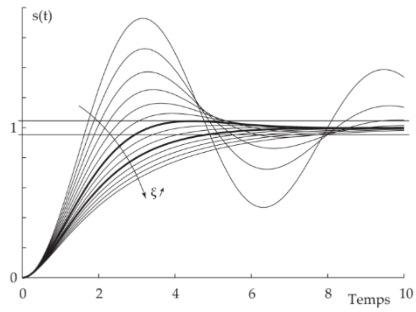
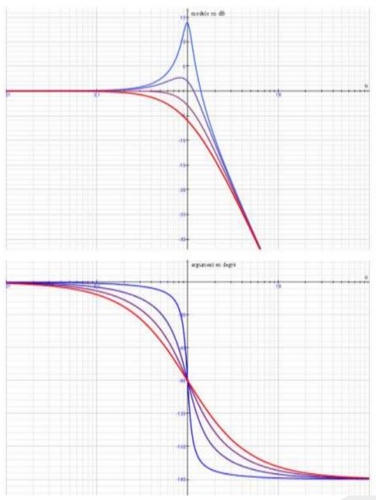
C1 – Proposer une démarche de résolution
Proposer une démarche de réglage d'un correcteur.
C2 – Mettre en œuvre une démarche de résolution analytique
Mettre en œuvre une démarche de réglage d'un correcteur.

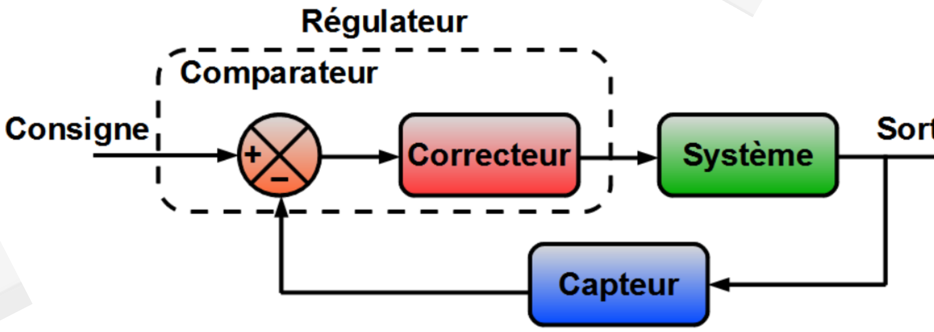
3ème partie
CORRECTION D'UN SYSTEME ASSERVI





$$H(p)=\frac{K}{p^{\alpha}}\frac{\prod_i(1+a_ip)\prod_j(1+b_jp+c_jp^2)}{\prod_k(1+\alpha_kp)\prod_l(1+\beta_lp+\gamma_lp^2)}$$





$$H(p)=\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}=\frac{1}{k+\frac{RJ}{k}p+\frac{LJ}{k}p^2}$$

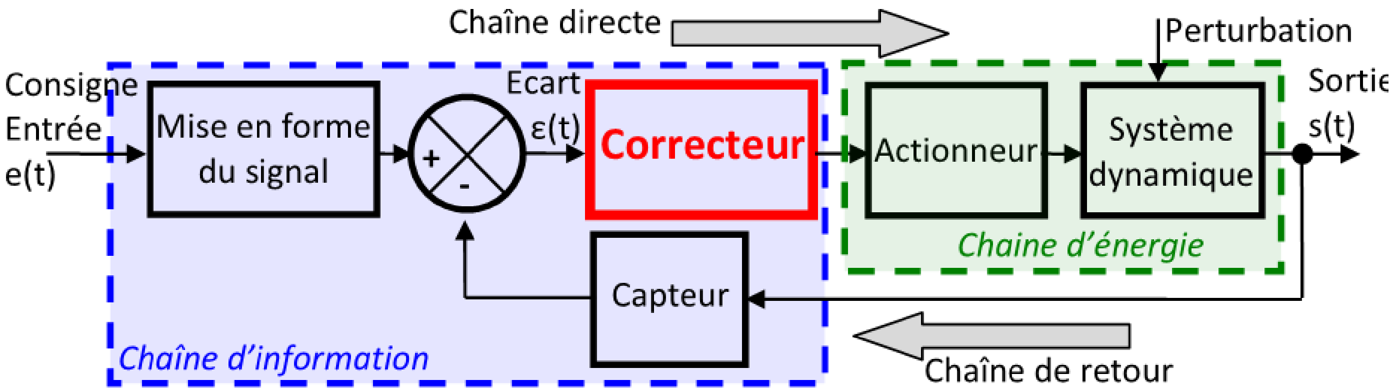
COURS	SLCI - Chapitre 8 CORRECTION DES SYSTEMES ASSERVIS

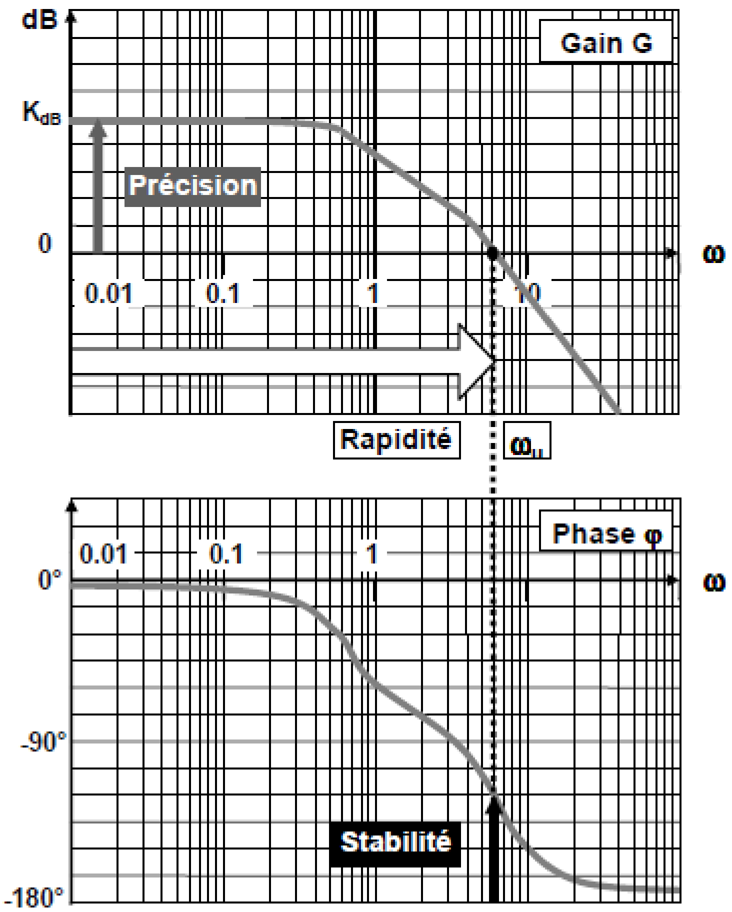
Une boucle d'asservissement répond à un besoin (garantir la position d'un mobile, sa vitesse en toutes circonstances, reproduire aussi fidèlement que possible une consigne, etc.). Les exigences permettant de quantifier ce besoin se traduisent par des performances attendues. Ces performances et leurs niveaux sont consignés dans le **C**ahier **d**es **C**harges **F**onctionnelles (**CdCF**) : précision (ε_S, ε_T,…), amortissement, dépassement (**D%**) ou non, rapidité ($t_{r5\%}$).

Le concepteur intègre ces contraintes dans ses calculs d'avant-projet en évaluant dans un premier temps les performances intrinsèques du système, puis en les améliorant par une **correction** ou **compensation**.

1/ Mise en place d'un correcteur

La correction est réalisée par un correcteur qui élabore un signal en entrée de la chaîne d'action en fonction de l'écart, c'est à dire entre l'image de la consigne et l'image de la sortie.
Généralement, il est placé dans la chaine directe, entre le comparateur et la chaine d'énergie du système.
cette position permet :
- de travailler avec des signaux peu énergétiques,
- d'assurer une correction efficace des perturbations puisqu'il est placé avant les perturbations,
- de réaliser une correction avec les informations les plus "fraiches" puisqu'en sortie de comparateur le signal n'a pas été modifié par les différents constituants du système.



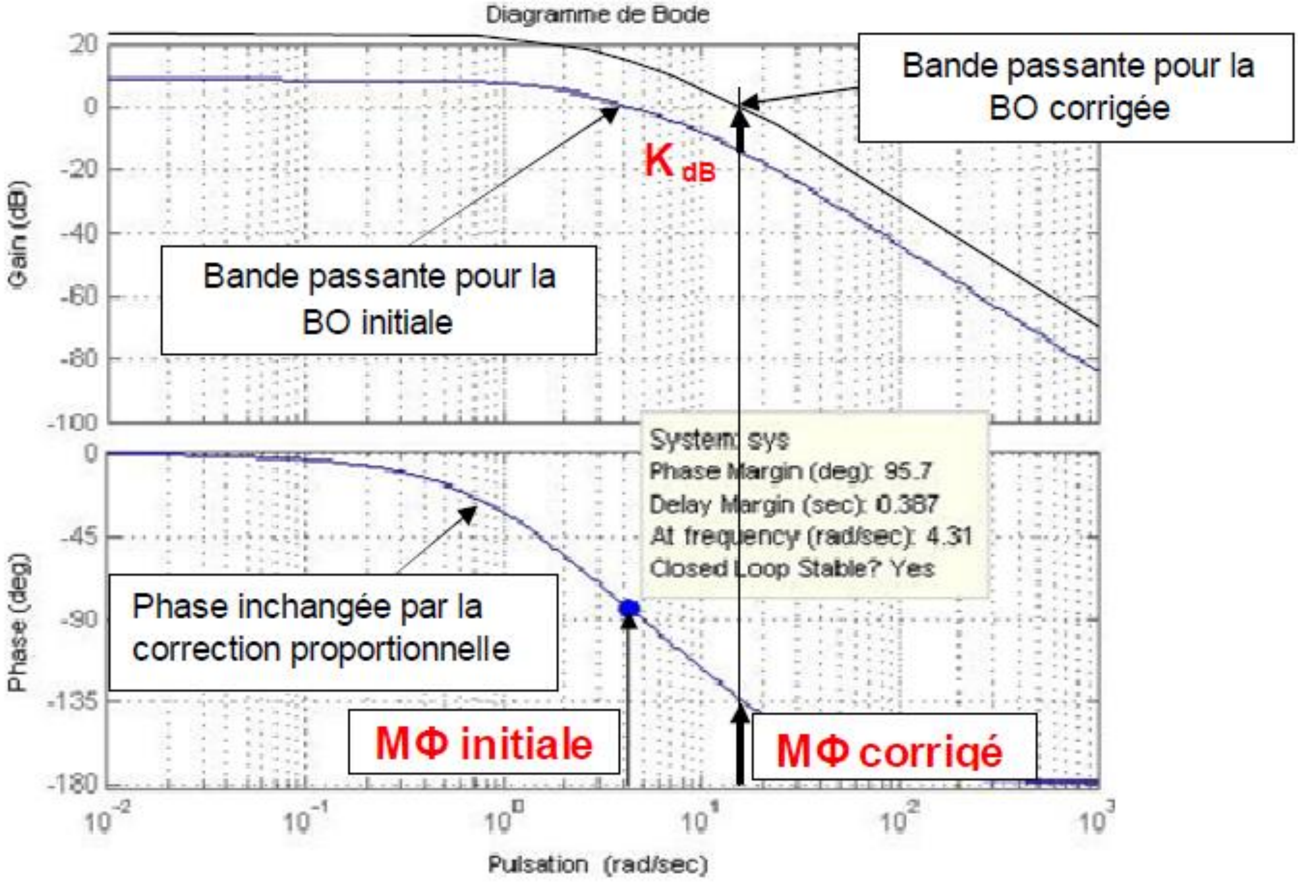


La **stabilité** est liée aux caractéristiques de la FTBO au voisinage de ω_{0dB}.
Un système sera d'autant plus stable en BF que sa marge de phase **Mφ** en BO est importante.

La **précision** est conditionnée par la forme de la FTBO aux "basses fréquences".
Elle requiert un **gain élevé $K_{dB} = 20.\log_{10}(K)$** et/ou une plusieurs **intégrations** en BO.

La **rapidité** est conditionnée par la caractéristique de la FTBO aux "hautes fréquences".
Elle exige une **bande passante (ω_{0dB}) à 0 dB** du système la plus grande possible.

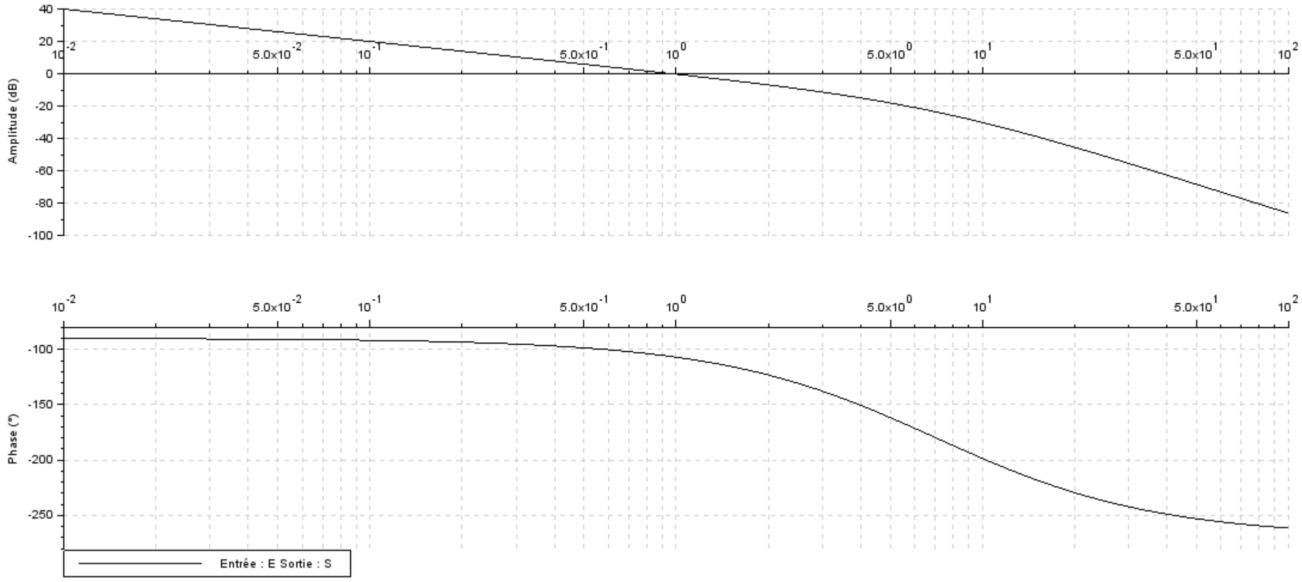
2/ Correcteur par action proportionnelle



Exemple : On donne

$$H_{BO}(p) = \frac{K}{p \cdot (1+0{,}1p) \cdot (1+0{,}2p)}$$

✍ **Déterminer à partir du diagramme de Bode de la FTBO la valeur de K pour avoir Mφ = 45° ?**



3/ Correcteur par action proportionnelle et intégrale

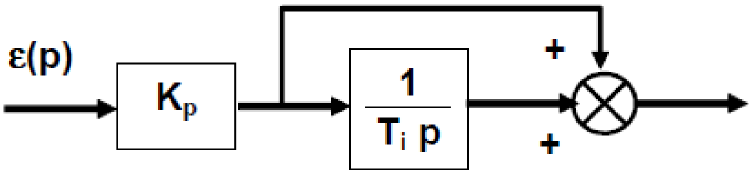
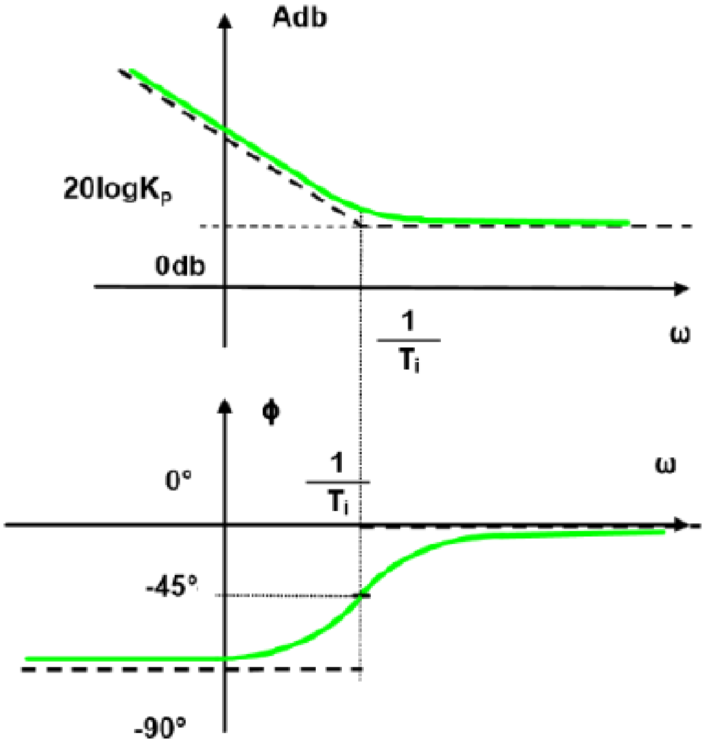


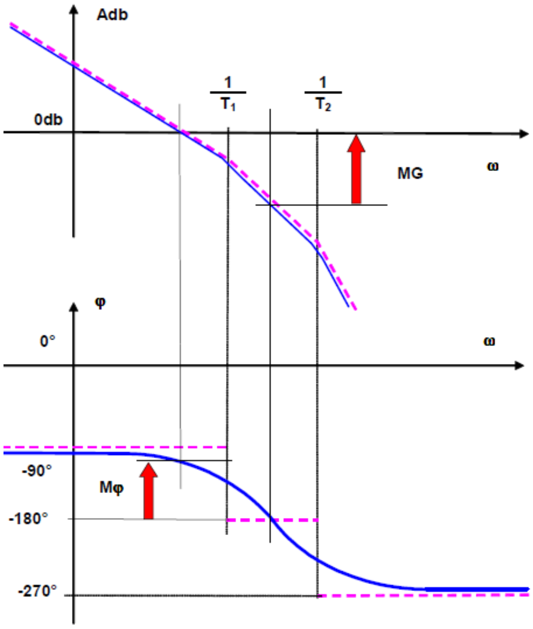
Diagramme de Bode du correcteur



Compte tenu de l'effet parasite, il faut bien choisir la pulsation $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ du correcteur pour ne pas affecter la stabilité du système :

Exemple :

On considère un système perturbé dont la FTBO est $\frac{K}{p(1+T_1.p)(1+T_2.p)}$. La FTBO peut se représenter par le diagramme de Bode suivant :

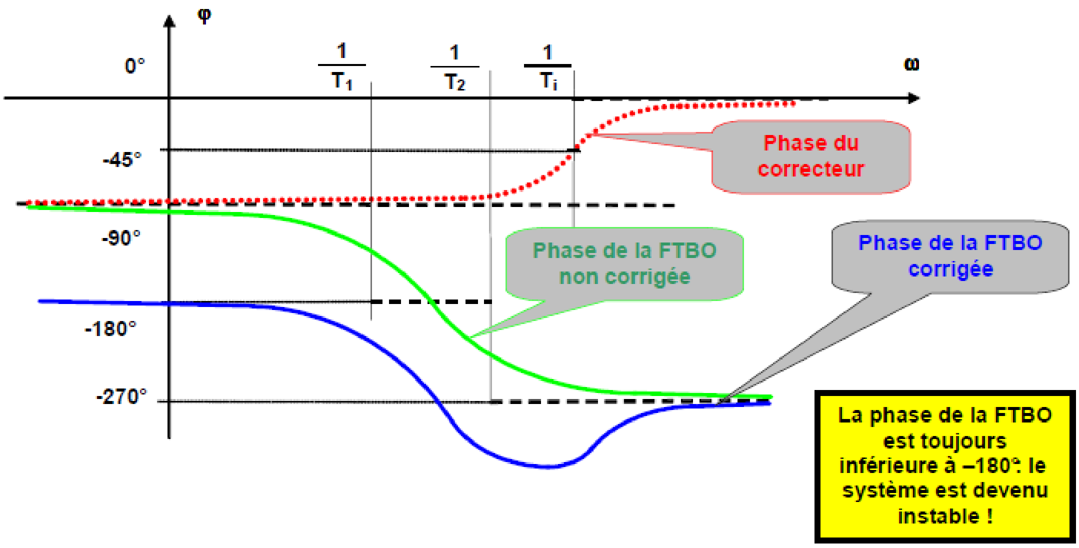


L'intégration placée après la perturbation ne permet pas d'obtenir un système précis. On décide donc d'utiliser un correcteur proportionnel et intégral, de fonction de transfert $C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$

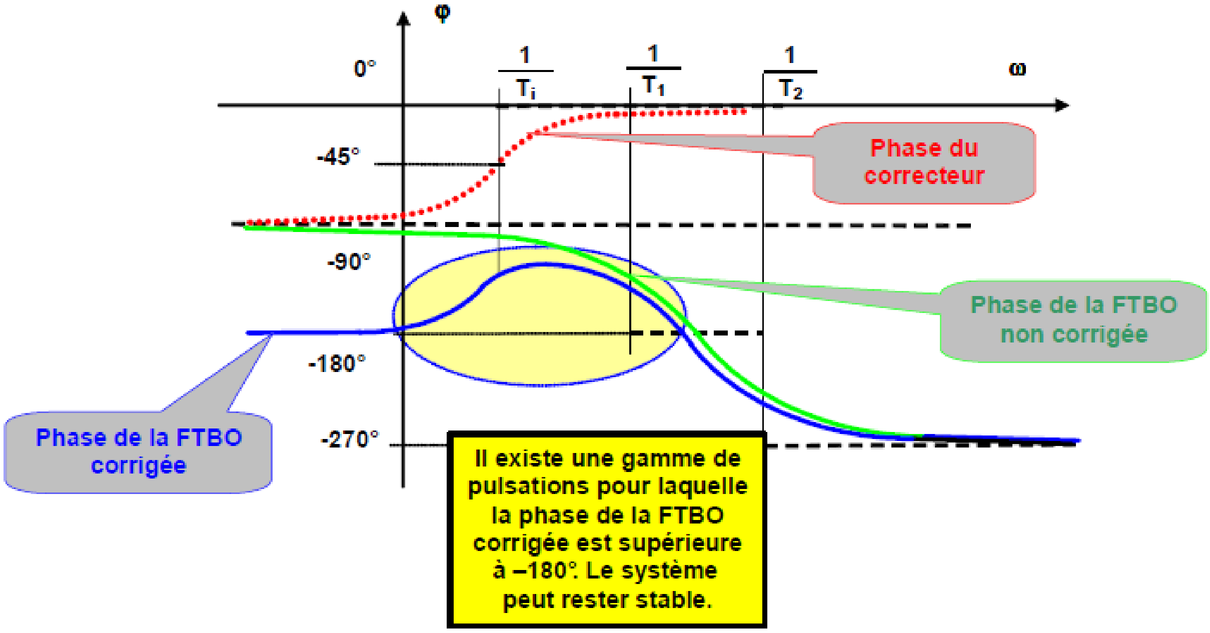
Dans cet exemple, le système est stable avant correction. Les marges de gain et de phase sont suffisantes.

Mais le choix des variables du correcteur peut rendre le système instable...

Mauvais choix de la constante T_i : Si la constante de temps T_i est trop faible (et donc $1/T_i$ trop grande), alors la phase de la FTBO corrigée sera toujours inférieure à –180°. Le système sera alors devenu instable.



Choix pertinent de la constante T_i : Si la constante de temps T_i est plus grande que les deux constantes T_1 et T_2, alors on préserve pour la phase de la FTBO corrigée une gamme de pulsations où elle sera supérieure à –180°. Le système pourra alors rester stable si par ailleurs on choisit convenablement la valeur de K_p.



Le choix de T_i donnera une gamme plus ou moins importante de pulsations où la phase sera supérieure à –180°. Plus T_i sera grande par rapport à la constante de temps T_1, dite « dominante », plus la gamme sera étendue, mais aussi, plus l'extremum de phase sera éloigné de –180°. C'est la marge de phase imposée par le cahier des charges du système qui permettra le choix le plus adéquat.

Dimensionnement du correcteur proportionnel et intégral

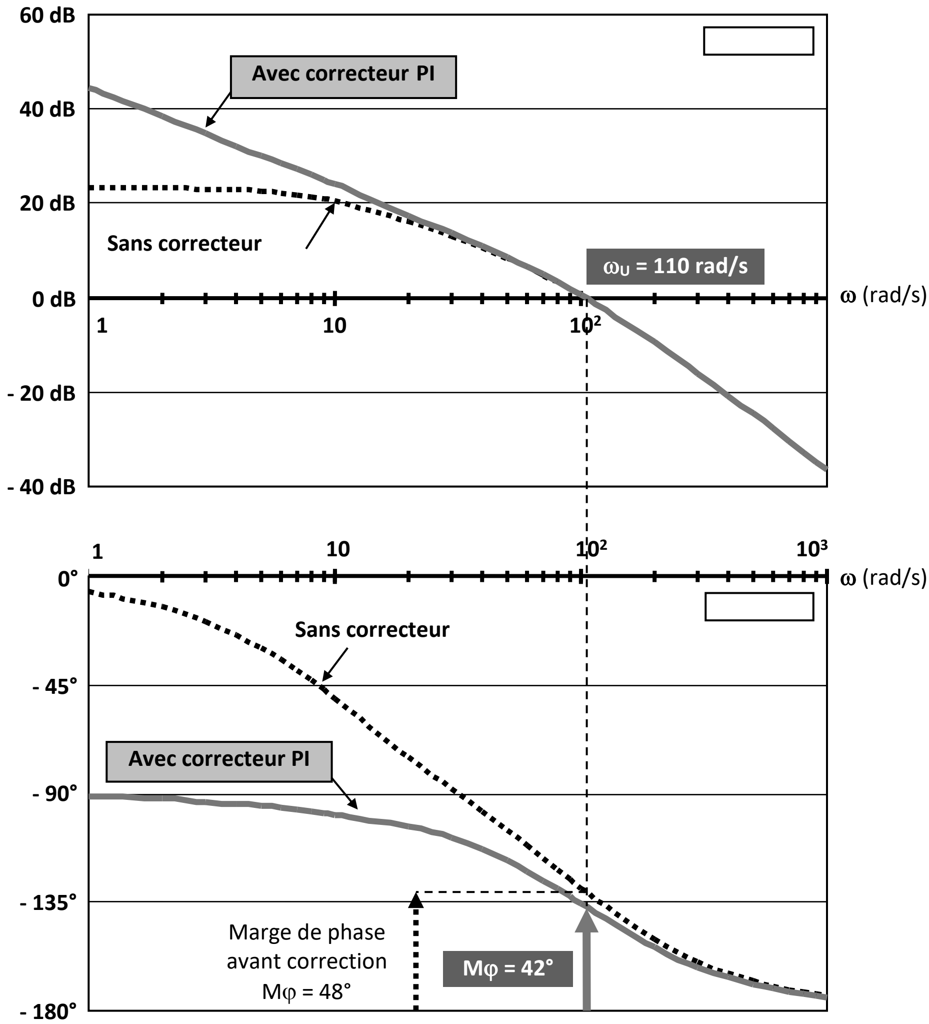
Compte tenu de l'effet parasite, il faut que la pulsation $\omega_i = \frac{1}{T_i}$ du correcteur soit petite devant la pulsation $\omega_u = \omega_{0dB}$ en boucle ouverte .

Ainsi le retard de phase amené sera éloigné du point critique et ne conduira pas à rendre le système instable.

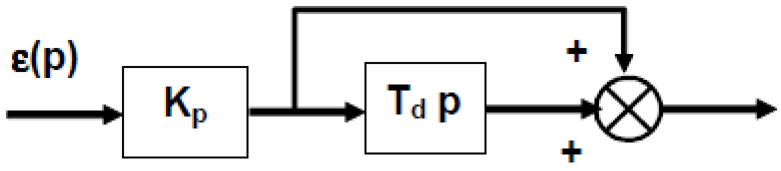
Exemple : On donne

$$H_{BO}(p) = \frac{15}{(1+0{,}01p)\cdot(1+0{,}1p)}$$

Si on désire $\varepsilon_S = 0$, il faut ajouter un correcteur à **action intégrale**.



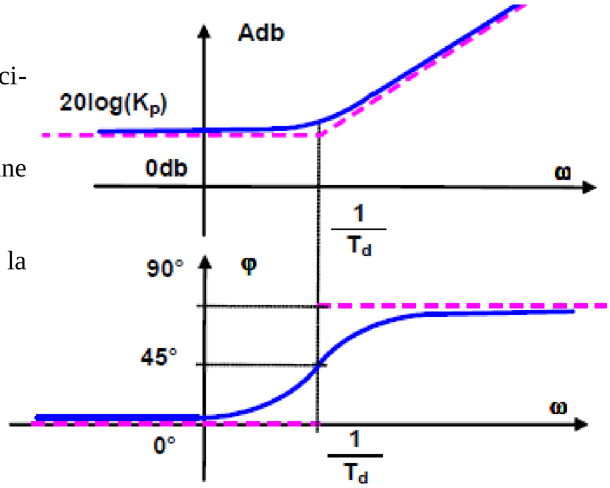
3/ Correcteur par actions proportionnelle et dérivée (PD)



L'allure du diagramme de Bode d'un tel correcteur est donné ci-contre.

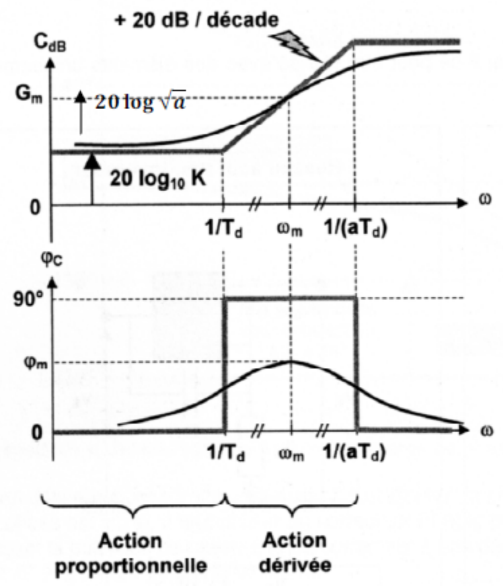
Une modification de la valeur de T_d se traduit par une translation horizontale des courbes de gain et de phase.

Une modification de K_p entraine une translation verticale de la courbe de gain.



On utilise en réalité des correcteurs dont la fonction de transfert est de la forme suivante :

$$C(p) = K_p.\frac{1+T_d.p}{1+a.T_d.p} \text{ avec } 0 < a < 1$$



Le déphasage maximal est obtenu pour la pulsation :

$$\boxed{\omega_m = \frac{1}{T_d\sqrt{a}}}$$

Le déphasage maximal vaut :

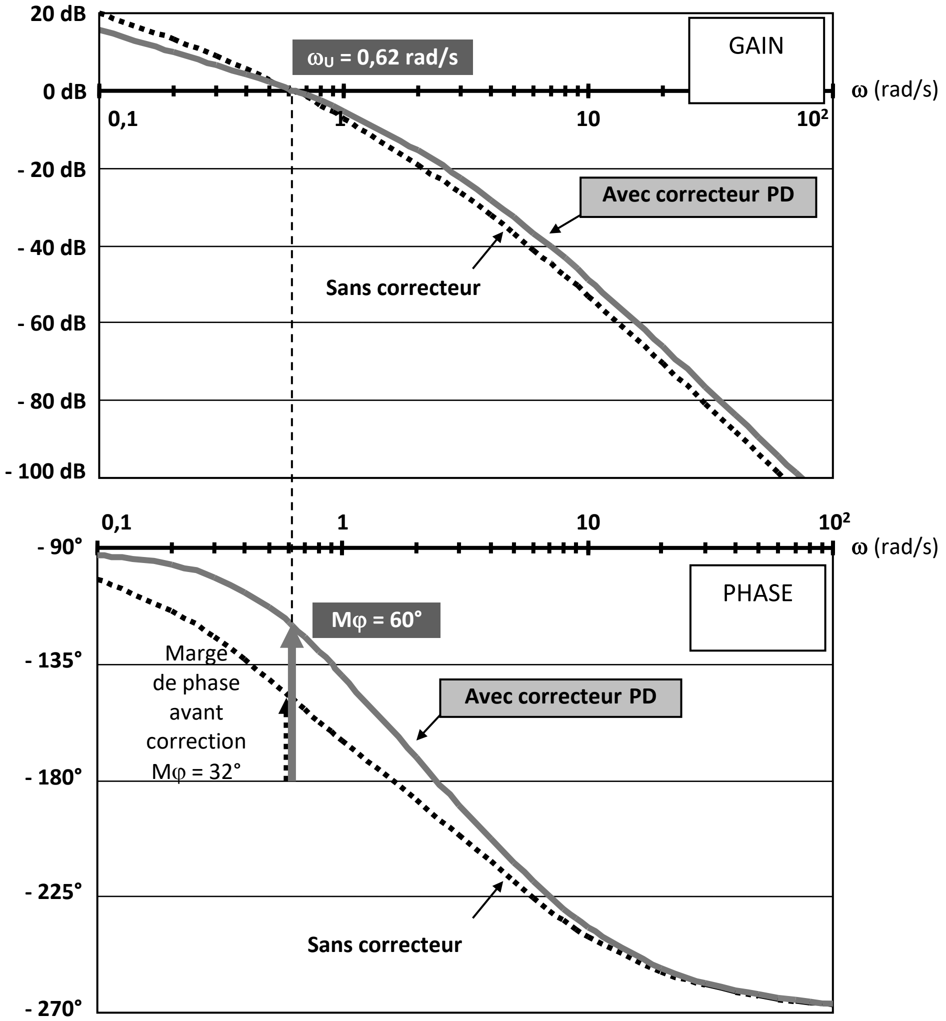
$$\boxed{\sin\varphi_m = \frac{1-a}{1+a}}$$

Exemple : On donne

$$H_{BO}(p) = \frac{1}{p \cdot (1+2p) \cdot (1+0{,}2p)}$$

Le système avant correction présente une marge de phase de **32°** Le cahier des charges impose une marge de phase de 60°

✍ **En déduire l'avance de phase apportée par le correcteur puis les valeurs de a et T_d.**



Le gain apporté par **C(p)** à la pulsation $\omega_m = \omega_u$ doit être nul.

✍ **En déduire la valeur de K.**

La fonction de transfert du correcteur a donc pour expression :

C(p) = ____________

A VOIR SUR INTERNET, LES CORRECTEURS RACONTES PAR QUELQU'UN D'AUTRE....

Vidéos mis à disposition par M.DERUMAUX (http://marc.derumaux.free.fr/)

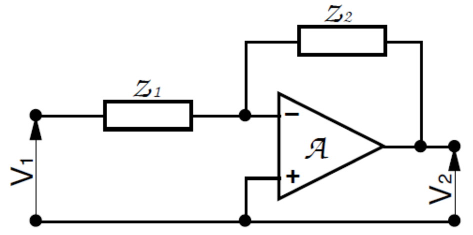
https://www.youtube.com/watch?v=H-_XGsBzKqY&feature=youtu.be

https://www.youtube.com/watch?v=2GrszbHISJY&feature=youtu.be

https://www.youtube.com/watch?v=ine0cvMvLWc&feature=youtu.be

1/ Réalisation analogique d'un correcteur

Il est possible de réaliser une correction analogique à l'aide d'amplificateurs opérationnels
Une correction proportionnelle pourra ainsi être réalisée comme suit :



$$\frac{V_2(p)}{V_1(p)} = -\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}$$

Le tableau, page 20, montre des possibilités de réalisation des principaux types de correcteurs à l'aide d'amplificateurs opérationnels.

2/ Réalisation numérique d'un correcteur

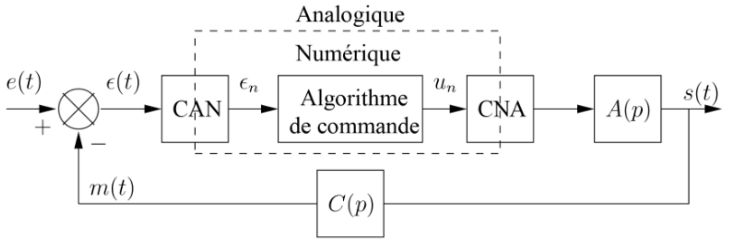
La tendance actuelle est d'utiliser des méthodes numériques pour réaliser les correcteurs.
Le correcteur n'est plus, dans ce cas, un appareil à part, mais se présente sous le forme d'un algorithme, c'est à dire d'un programme de calcul mémorisé dans l'ordinateur.
On parle alors de correcteurs numériques.

Avantages :

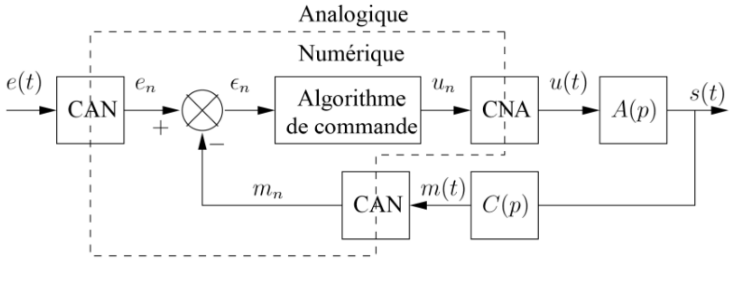
- Mise en œuvre facile de lois de commande complexes
- Modification aisée des paramètres ou de la structure des lois de commande
- Intégration plus facile dans un système complexe.
- Pas de dérive liée à l'utilisation de dipôles passifs

3/ Exemples de systèmes asservis avec correcteur numérique

La comparaison se fait en analogique et seul le correcteur est numérique.



Cette fois-ci, la consigne et la sortie du capteur sont numériques.

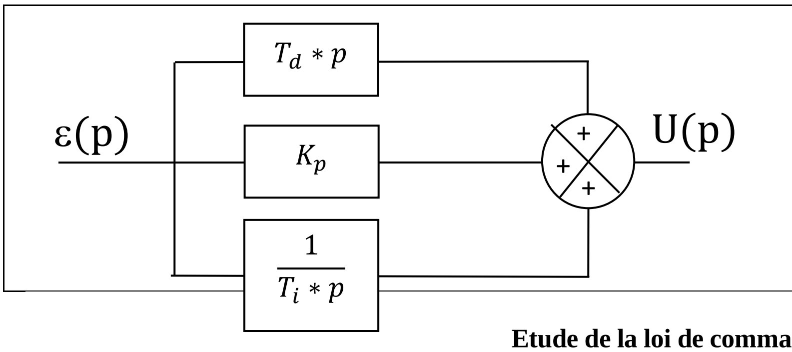


4/ Démarche de discrétisation

Pour échantillonner une relation écrite dans le domaine de Laplace, il faut

- Modifier l'équation de telle sorte que la variable de Laplace « p » n'apparaisse que sous forme : « $p.\varepsilon(p)$ », ou « $p.U(p)$ »
- Repasser dans le domaine temporel et remplacer la multiplication par p du domaine de Laplace par la dérivation temporelle : $p.\varepsilon(p) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$
- Évaluer l'expression de la relation à un instant d'échantillonnage $n.Te$

5/ Algorithme du PID numérique



avec
$\boldsymbol{\varepsilon(t)}$ = *signal d'erreur*
u(t) = *loi de commande*
$\mathbf{K_p}$ = coefficient proportionnel
$\mathbf{T_i}$= constante de temps d'intégration
$\mathbf{T_d}$ = constante de temps dérivée

Etude de la loi de commande

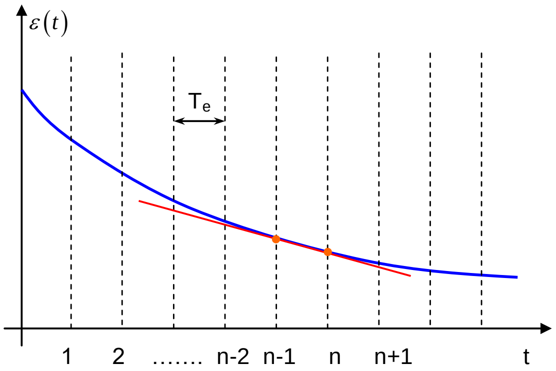
$$U(p) = \left(K_p + \frac{1}{T_i.p} + T_d.p\right).\varepsilon(p) = U_p(p) + U_i(p) + U_d(p)$$

Avec :
$U_p(p) = K_p.\varepsilon(p)$
$U_i(p) = \frac{1}{T_i.p}.\varepsilon(p)$ soit $T_i.p.U_2(p) =.\varepsilon(p)$
$U_d(p) = T_d.p.\varepsilon(p)$
soit dans le domaine temporel :
$u_p(t) = K_p.\varepsilon(t)$
$\varepsilon(t) = T_i.\dfrac{du_i(t)}{dt}$
$u_d(t) = T_d.\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}$
La loi de commande est donc $u(t) = u_p(t) + u_i(t) + u_d(t)$
soit : $u(t) = K_p * \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon(t).dt + T_d.\frac{d\varepsilon(t)}{dt}$
Cette loi peut être discrétisée en l'évaluant à chaque instant d'échantillonnage noté $n.T_e$.

Calcul du terme proportionnel

CORRECTION PROPORTIONNELLE	
ANALOGIQUE ∀t	NUMERIQUE à t = $n.T_e$
$u_p(t) = K_p * \varepsilon(t)$	$u_p(n.T_e) = K_p * \varepsilon(n.T_e)$

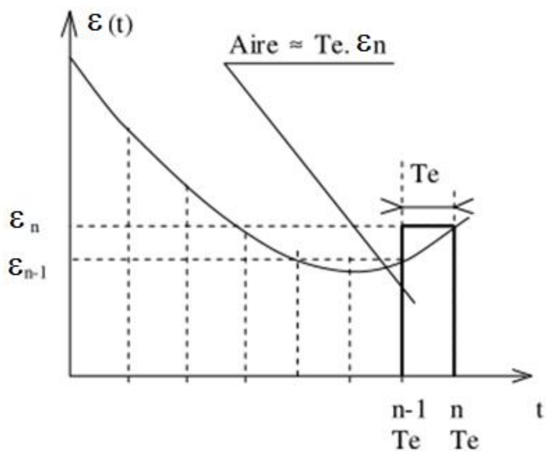
Calcul du terme dérivée
La dérivée peut être approximée par la pente de la droite liant l'échantillon de l'instant présent $n.T_e$ à son précédent $(n-1).T_e$



Pour la dérivée, on a donc l'équivalence : $\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{\varepsilon(n.T_e)-\varepsilon((n-1).T_e)}{T_e}$

CORRECTION DERIVEE	
ANALOGIQUE ∀t	NUMERIQUE à t = $n.T_e$
$u_d(t) = T_d * \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$	$u_d(n.T_e) = T_d * \frac{\varepsilon(n.T_e) - \varepsilon((n-1).T_e)}{T_e}$

Calcul du terme intégral
La résolution de l'intégrale passe par le calcul de l'aire comprise entre l'axe t et le signal ε(t).
Une approximation de cette aire peut être faite par la méthode des rectangles :
L'intégrale de ε(t) à l'instant t = $n.T_e$ est approchée par une somme de rectangles de largeur "T_e" et de hauteur "ε(t)".



On peut donc calculer une valeur approchée de l'intégrale :

$$\int_{t=0}^{t} \varepsilon(t)dt = \sum_{i=0}^{i=n} (\varepsilon(i.T_e) * T_e)$$

CORRECTION INTEGRALE	
ANALOGIQUE ∀t	NUMERIQUE à t = $n.T_e$
$u_i(t) = \frac{1}{T_i} * \int_{t=0}^{t} \varepsilon(t).dt$	Méthode des rectangles: $$u_i(n.T_e) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{T_i} * (\varepsilon(i.T_e) * T_e)$$ Soit $$u_i(n.T_e) = \frac{T_e}{T_i} * \varepsilon(n.T_e) + u_i((n-1).T_e)$$

La loi de commande discrète du régulateur PID numérique devient :

$$u(k) = K_p * \varepsilon(k) + \frac{1}{T_i} \sum_{i=0}^{k} \varepsilon(i).T_e + T_d.\frac{\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)}{T_e}$$

$$u(k) = K_p * \varepsilon(k) + \frac{T_e}{T_i} * \varepsilon(k) + u_i(k-1) + T_d.\frac{\varepsilon(k) - \varepsilon(k-1)}{T_e}$$

A partir de cette relation il est possible de programmer un « correcteur numérique » à partir d'un algorithme tel celui ci-dessous.

Déclaration des variables :
ε
u_i
u

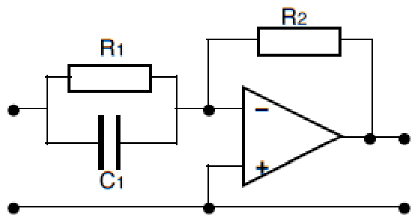
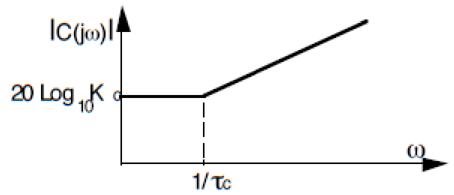
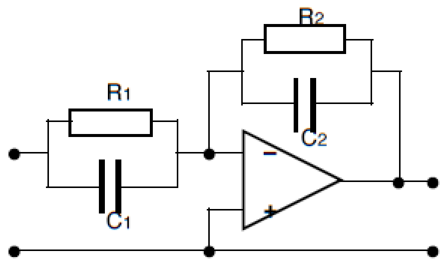
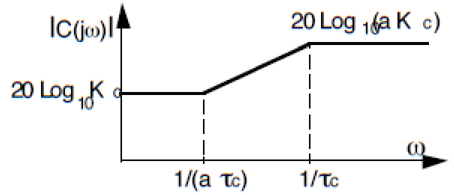
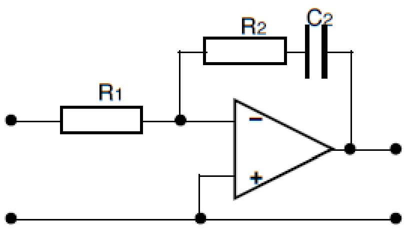
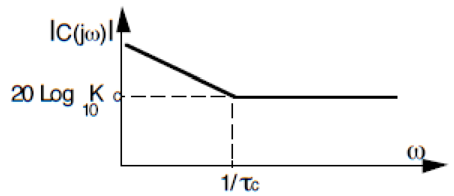
Déclaration des constantes :
K_p
T_i
T_d
T_e

Initialisation :
$\varepsilon(k-1) = 0$
$u_i(k-1) = 0$

Répéter

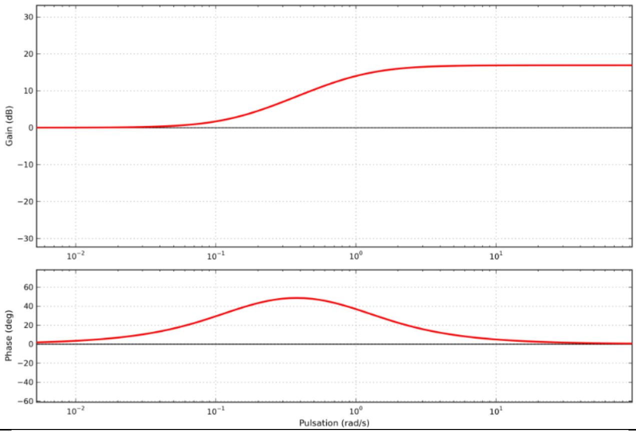
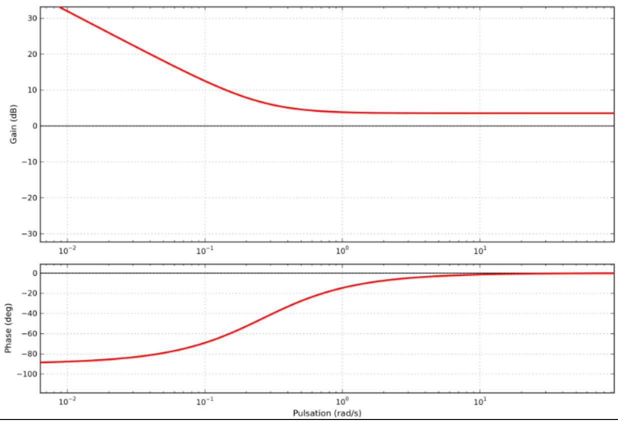
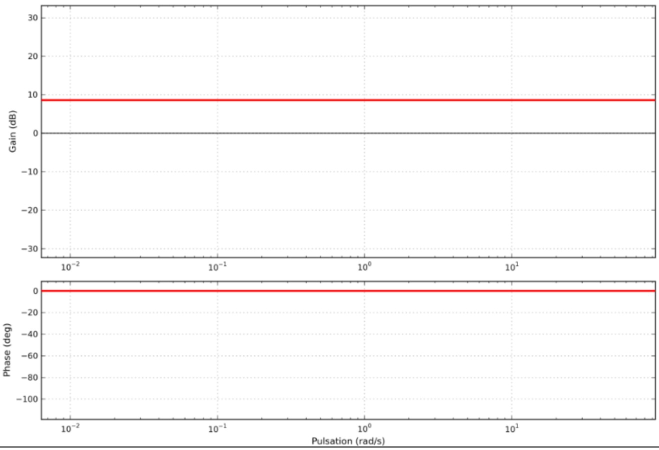
Lire consigne E
Lire mesure M
Calculer $\varepsilon(k) = E - M$
Calculer $u(k) = K_p * \varepsilon(k) + \frac{T_e}{T_i} * \varepsilon(k) + u_i(k-1) + T_d.\frac{\varepsilon(k)-\varepsilon(k-1)}{T_d}$
Affecter $\varepsilon(k) \rightarrow \varepsilon(k-1)$
Affecter $u_i(k) \rightarrow u_i(k-1)$

Jusqu'à .....

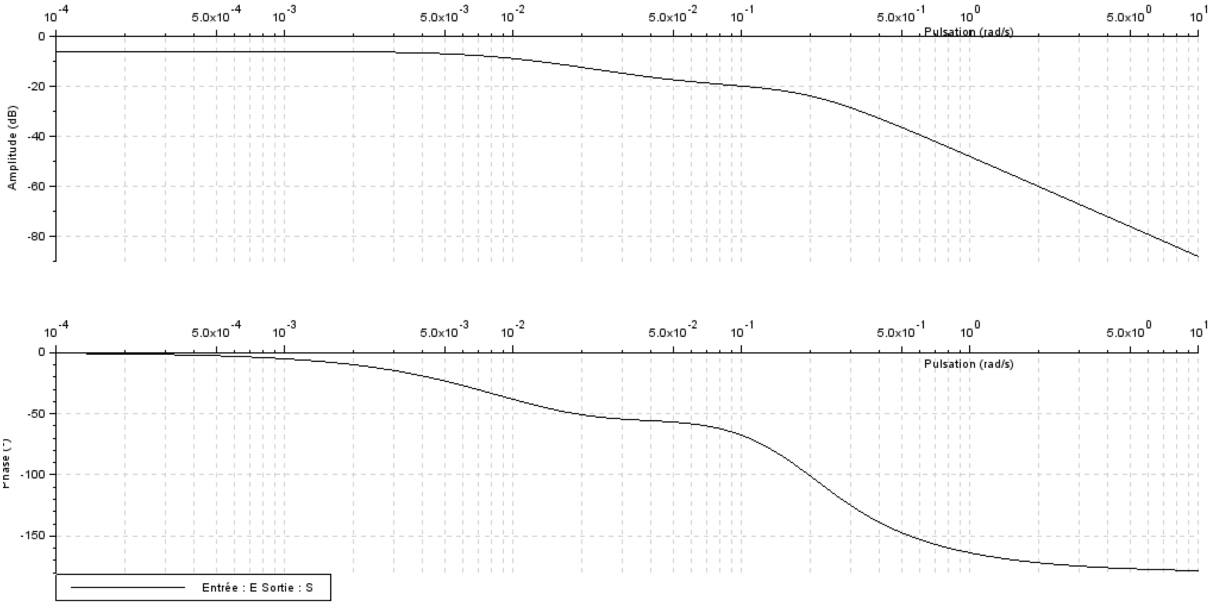
Réalisation du correcteur	Relations importantes	Fonction de transfert	Diagramme de BODE (pour le gain)	Nom du correcteur
	$\tau_c = R_1 C_1$ $K_c = \frac{R_2}{R_1}$	$C(p) = K_c\,(1 + \tau_c\, p)$		P.D. idéal
	$\tau_d = R_2 C_2$ $a = \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}$ $K_c = \frac{R_2}{R_1}$	$C(p) = K_c\,\frac{(1 + a\,\tau_c\, p)}{(1 + \tau_c\, p)}$ avec $a > 1$		P.D. réel (ou avance de phase)
	$\tau_c = R_2 C_2$ $K_c\,\tau_c = \frac{R_2}{R_1}$ $K_c = \frac{1}{R_1 C_2}$	$C(p) = K_c\,\frac{(1 + a\,\tau_c\, p)}{\tau_c\, p}$		P.I. idéal

Bilan du chapitre 8 — Sais-tu répondre à ces questions de base ?

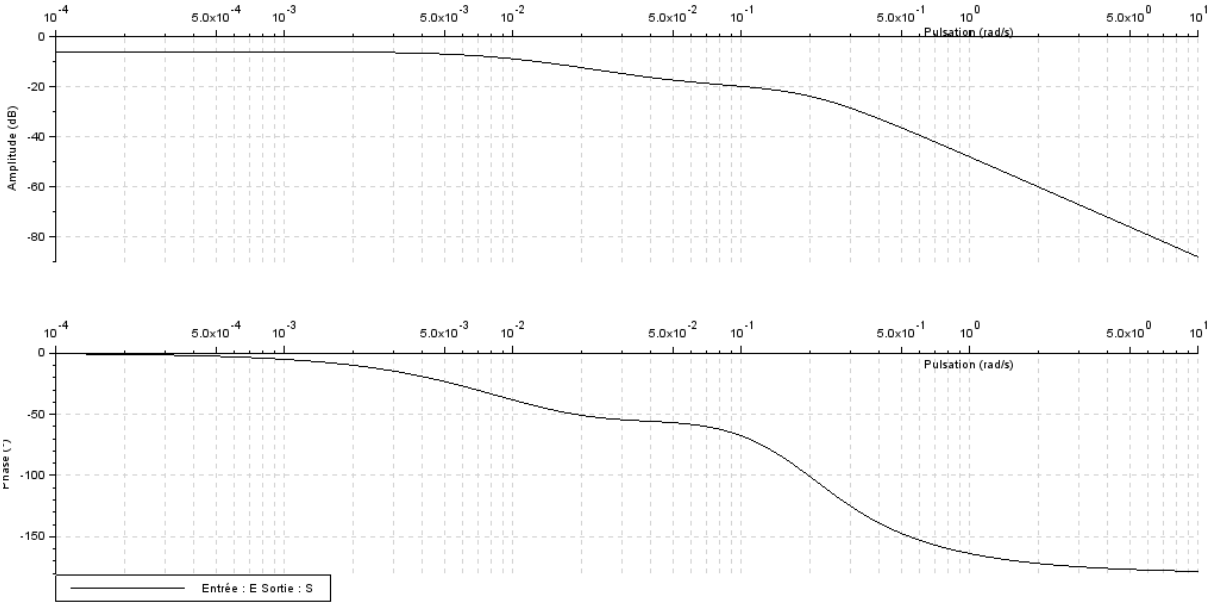
1. Associer diagramme de Bode et nom de correcteur
   - Correcteur proportionnel
   - Correcteur proportionnel et intégral
   - Correcteur à avance de phase

Diagramme de Bode	Nom du correcteur
	
	
	

2. Soit $F(p)$ la FTBO d'un système bouclé à retour unitaire. Les diagrammes de Bode de $F(p)$ sont représentés ci-après. On ajoute au système un correcteur de type proportionnel. On note Kp le gain de ce correcteur.
   Déterminer la valeur de Kp permettant d'obtenir une marge de phase de 45°.
   - ☐ 45
   - ☐ 6,3
   - ☐ 16
   - ☐ 31



3. Soit $F(p)$ la même FTBO qu'à la question précédente dont les diagrammes de Bode sont regroupés ci-dessous.
   Déterminer la valeur de Kp permettant d'obtenir une bande passante à 0dB de 2 rad/s
   - ☐ 10
   - ☐ 100
   - ☐ 1000



4. Soit F(p) la FTBO d'un système bouclé à retour unitaire d'expression $H_{BO}(p) = \frac{0.5}{(1+5p).(1+100p)}$
   On ajoute au système un correcteur de type proportionnel intégral $C(p) = K_I.\frac{(1+T_i.p)}{T_i.p}$ que l'on souhaite régler par compensation du pôle dominant.
   Quelle est la valeur de T_i dans ce cas
   - ☐ 5
   - ☐ 100
   - ☐ 500

5. Pour les 3 fonctions de transfert proposées
   - Tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique
   - Donner le nom du correcteur correspondant

Diagramme de Bode	Fonction de transfert	Nom du correcteur
	$C(p) = K$	
	$C(p) = K_p \,. \dfrac{1 + T_i . p}{T_i . p}$	
	$C(p) = K_p . \dfrac{1 + T_d . p}{1 + a . T_d . p}$ $0 \leq a \leq 1$	