AL1 - Rappels d'AL et compléments sur les matrices

Révisions : Sous-espaces de $\mathbb{K}^n$

1 - Écrire chacun des sous-espaces vectoriels suivants comme un Vect :

1. $E_1 = \{(x+y, y, x-y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$
2. $E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y = z+t\} \subset \mathbb{R}^4$

2 -Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ appartient-il à Vect$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$?

3 -On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base puis la dimension de $\ker A$.
2. En déduire $\mathrm{rg}(A)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ puis un système d'équations de $\mathrm{Im}(A)$.

4 - On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base puis la dimension de $\ker A$.
2. En déduire $\mathrm{rg}(A)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A)$ puis un système d'équations de $\mathrm{Im}(A)$.

5 ★ - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ & \ddots & \ddots & \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

1. Exhiber une matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(a,b) = bJ + (a-b)I_n$.
2. Déterminer le rang de $M(a,b)$ en fonction de a et b.
3. Dans chaque cas de figure mis en évidence dans la question précédente, déterminer une base du noyau.

Révisions d'algèbre linéaire - Avec des polynômes

6 -On considère l'application $u : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(0) + P'(0) \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. En calculant l'image d'un polynôme constant, montrer que u est surjective. En déduire $\dim \ker u$.
3. Déterminer une base de $\ker u$.

7 -On note $F = \{P \in \mathbb{C}[X], XP' - P = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(X)$.

8 - On considère l'application

$$u : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(0) + (P(1) - P(0))X \in \mathbb{R}_2[X].$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. En déduire $\mathrm{rg}(u)$ puis $\dim \ker u$.
4. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}_1[X]$.
5. Déterminer $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\ker u = \mathrm{Vect}(Q)$.

Révisions d'algèbre linéaire - Avec des matrices

9 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10 - On considère l'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & b \\ a & a-b \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. Justifier que F peut s'écrire sous la forme $F = \mathrm{Vect}(M, N)$ où M, N sont deux matrices à préciser.
2. Vérifier que (M, N) est libre.
3. En déduire $\dim F$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ **-** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On considère l'application $u : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Écrire la matrice de u dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. En déduire $\mathrm{rg}(u)$.

Compléments sur les matrices : trace et transposée

$\boxed{\mathbf{12}}$ **-** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure, dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, T^k est une matrice triangulaire supérieure dont on précisera les coefficients.
2. En déduire une expression de $\mathrm{tr}(T^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ **-**Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que AA^T est symétrique.
2. Montrer que si $\mathrm{tr}(AA^T) = 0$, alors $A = 0$.

$\boxed{\mathbf{14}}$ **-** Soit $A \in A_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{r} \in \mathbb{R}^3$ tel que pout tout $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{u}$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ **-**Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \in S_n(\mathbb{R}) \iff A$ et B commutent.

$\boxed{\mathbf{16}}$ **-** On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $F = \ker \mathrm{tr}$.

1. Déterminer, à l'aide du théorème du rang, $\dim \ker \mathrm{tr}$.
2. Donner une base de F dans le cas $n = 2$.

$\boxed{\mathbf{17}}$ **-** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. On considère l'application $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(M)A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que u est linéaire.
2. Écrire la matrice de u dans la base canonique. En déduire $\mathrm{tr}\, u$.
3. En complétant la famille constituée uniquement de A en une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, retrouver $\mathrm{tr}(u)$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ **-** Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathrm{tr}((A+B)^2) = \mathrm{tr}(A^2) + 2\,\mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(B^2)$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}((AB)^k) = \mathrm{tr}((BA)^k)$.

$\boxed{\mathbf{19}}$ **-** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $X^2P''(X) \in \mathbb{R}_n[X]$. *On pourra distinguer les cas $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$.*
2. En déduire que l'application $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto X^2P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ est bien définie et montrer que u est linéaire.
3. Déterminer $\mathrm{tr}(u)$ et $\mathrm{rg}(u)$.

$\boxed{\mathbf{20}}$ ★ **-** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que l'application $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ est bien définie et montrer que u est linéaire.
3. Déterminer $\mathrm{tr}(u)$.
4. Déterminer $\ker u$ et $\mathrm{Im}(u)$.
