Programme de khôlle. Semaine 1

Description des thèmes

AL1- Rappels d'algèbre linéaire et compléments sur les matrices

I) **Rappels de définition et exemples** : sous-espace vectoriel, combinaisons linéaires, espace vectoriel engendré, famille libre, famille génératrice, base, rang d'une famille.

II) **Rappels sur les sev de $\mathbb{K}^n$** : Déterminer une base d'un sev de $\mathbb{K}^n$ de la forme $AX = 0$. Déterminer une base et un système d'équations d'un espace vectoriel engendré ou de $\operatorname{Im} A$.

III) **Rappels sur les applications linéaires.**

- Définition d'une application linéaire. Endomorphisme. Isomorphisme. Automorphisme.
- Noyau. Image. Formule du rang. Caractérisation de l'injectivité par le noyau.
- Caractérisation de la bijectivitié par l'image d'une base et cas de la dimension finie (injectif $\iff$ bijectif $\iff$ surjectif quand $\dim E = \dim F$)
- Composition. Notation f^n.

IV) **Rappels sur le changement de base.**

- Matrice d'une application linéaire dans des bases. Matrice d'un endomorphisme. Le rang de la matrice est le rang de l'application linéaire. Rappel de la formule $Y = AX$.
- Matrice de passage. Définition. Cas particulier de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ au départ.
- Formule $X = PX'$.
- Formules $B = Q^{-1}AP$ et $B = P^{-1}AP$.

V) **Compléments sur les matrices.**

1) Trace.
   - Trace d'une matrice. La trace est linéaire.
   - $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Deux matrices semblables ont même trace.
   - Trace d'un endomorphisme. Exemple de la trace de l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{K}_n[X]$.
2) Transposée.
   - Définition. La transposition est linéaire.
   - Propriétés. Transposée d'un produit, de l'inverse. $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$.
   - $\operatorname{tr}(AA^T) = 0 \iff A = 0$.
3) Matrices symétriques et antisymétriques.
   - $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sev. Calcul de leurs dimensions.
   - Une matrice antisymétrique a ses coeff diagonaux nuls.
4) Polynôme d'une matrice.
   - Définition de $P(A)$ si $P \in \mathbb{K}[X]$.
   - Si $P(A) = 0$ et $P(0) \neq 0$ alors A est inversible et A^{-1} s'exprime en fonction de A. Exemple : $P^3 = I_2$.

Questions de cours

La khôlle commencera par **deux** questions de cours par élève :

- Première question : $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ étant une matrice de taille raisonnable $(n, p \leq 4)$ au choix du kholleur, une question au choix parmi.
  - Déterminer une base de $\ker A$ et sa dimension.
  - Déterminer une base de $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{rg}(A)$.
- Deuxième question : une démonstration au choix parmi
  - Montrer que l'application $g : P \in \mathbb{C}_1[X] \to (P(0), P'(0)) \in \mathbb{C}^2$ est linéaire, injective puis justifier qu'elle est bijective par l'argument de son choix.
  - Montrer que la trace $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est linéaire et que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et montrer que $\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$. On précisera notamment une base de $S_n(\mathbb{R})$ **sans** démontrer que c'en est une.

Exercice au choix

Au choix du colleur, sur le chapitre de la semaine.