

DM1 : Polynômes d'interpolation de Lagrange

Le deuxième problème est une version généralisée du problème 1. Vous pouvez donc choisir de faire l'un ou l'autre de deux problèmes, **mais pas les 2!**

Problème 1. Version 3/2.

On fixe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ deux à deux distincts $a \neq b$, $b \neq c$ et $a \neq c$. On considère l'application

$$\Phi : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (P(a), P(b), P(c)) \in \mathbb{R}^3.$$

Q1. Autour de Φ .

- Montrer que Φ est linéaire.
- Montrer que Φ est injective.
- En déduire que Φ est bijective.

Q2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. La question précédente assure donc qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_0(a) = \alpha$, $P_0(b) = \beta$, $P_0(c) = \gamma$. On va chercher à construire explicitement un tel polynôme. Pour cela, on introduit les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$L_a = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} ; L_b = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} ; L_c = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$$

- Calculer $\Phi(L_a)$, $\Phi(L_b)$, $\Phi(L_c)$.
- En déduire que (L_a, L_b, L_c) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
- En déduire, en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, L_a, L_b, L_c$, le polynôme P_0 cherché.
- Que peut-on dire des coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ dans la base (L_a, L_b, L_c) .
- Donner la matrice de passage de (L_a, L_b, L_c) à $(1, X, X^2)$.

Problème 2. Version 5/2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On fixe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $n+1$ points 2 à 2 distincts. On considère l'application

$$\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Q1. Autour de Φ .

- Montrer que Φ est linéaire.
- Montrer que Φ est injective.
- En déduire que Φ est bijective.

Q2. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La question précédente assure donc qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $P_0(a_i) = \alpha_i$. On va chercher à construire explicitement un tel polynôme. Pour cela, on introduit les polynômes d'interpolation de Lagrange : pour $0 \leq i \leq n$,

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

- Calculer $\Phi(L_i)$ pour $0 \leq i \leq n$.
- En déduire que (L_0, L_1, \dots, L_n) forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- En déduire, en fonction des α_i et des L_i , l'expression du polynôme P_0 cherché.
- Que peut-on dire des coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base (L_0, \dots, L_n) .
- Donner la matrice de passage de (L_0, \dots, L_n) à $(1, X, \dots, X^n)$.