# An1 - Rappels sur l'intégration sur un segment

*Révisions de sup*

**1** - Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_2^3 \frac{dt}{t\ln(t)}$
b) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$
c) $\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt$
d) $\int_{-1}^1 |x^2-x|dx$

**2** - Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel non nul. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^\pi x\cos(nx)dx$. b) $\int_{-\pi}^\pi \sin(nx)xdx$. c) $\int_{-\pi}^\pi \sin(nx)x^2dx$

**3** -Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^1 xe^{-x^2}dx$
b) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$
c) $\int_0^1 xe^x dx$
d) $\int_0^1 x^2e^x dx$

**4** - Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$ et $G(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt$.

1. Justifier que $F$ est dérivable et donner $F'$. En déduire que $F$ est de classe $C^\infty$.
2. Montrer que $F$ est impaire.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = F(x^2) - F(x)$.
4. En déduire que $G$ est $C^\infty$ et donner une expression de $G'(x)$.

**5** -Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $F(x) = \int_0^x \ln(1+t^4)dt$ et $G(x) = \int_{-x}^{x^3} \ln(1+t^4)dt$.

1. Justifier que $F$ est dérivable et donner $F'$. En déduire que $F$ est de classe $C^\infty$.
2. Exprimer $G$ en fonction de $F$.
3. En déduire que $G$ est $C^\infty$ et donner une expression de $G'(x)$.

**6** - *Comparaison série/intégrale.* Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Montrer que pour tout $t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{n\ln(n)}$.
2. En déduire que $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{n\ln(n)}$.
3. Application. On pose $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)}$.
   a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $S_n \geq \int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)}$.
   b) Calculer $\int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)}$.
   c) En déduire que $S_n \to +\infty$.

**7** -En exploitant le théorème sur les sommes de Riemann, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k}$$

**8** ★ - Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. En exploitant le théorème sur les sommes de Riemann, déterminer un équivalent simple de $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} k^\alpha$.

*Suite d'intégrales*

**9** - Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \ln(1+u^n)du$.

1. Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.
2. *Calcul de la limite.*
   a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leq \ln(1+x) \leq x$.
   b) En déduire la limite de $(I_n)$.

**10** - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{2n}(x)\mathrm{d}x$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Montrer que $I_n \sim \frac{1}{4n}$.

4. En conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

---

**11** -*Intégrale de Wallis.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$.

1. Calculer $I_0$ et $I_1$.

2. En faisant le changement de variable $u = \pi/2 - x$, montrer que

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx.$$

3. Propriétés de base.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{2}$.
   b) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.
   c) En déduire que $(I_n)$ converge.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$.

5. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

6. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

---

**12** -*Lemme de Riemann-Lebesgue.* Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ de classe $C^1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n(f) = \int_0^1 f(x)e^{inx}dx$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

---

**13** -Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. On note $I_n(f) = \int_0^1 x^n f(x)dx$.

1. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|I_n(f)| \leq M \int_0^1 x^n dx$

2. En déduire la limite de $(I_n(f))_n$.

3. On suppose de plus de $f$ est de classe $C^1$ et que $f(1) \neq 0$. En faisant une intégration par parties, montrer que $I_n(f) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f(1)}{n}$.

---

**14** ★ - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que l'application $f_n : x \in ]0, 1] \mapsto x^n \ln(x)$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, 1]$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x)dx$. En faisant une intégration par parties, déterminer la valeur de $I_n$.

---